യുക്തിഭാഷാ

(ഒന്നാംഭാഗം—സാമാന്യഗണിതം)

510 AKH-Y
GRANDHA SOFT
D.C.L. KANNUR
18317

പ്രസാധകന്മാർ:
മംഗളോദയം (പ്രൈവററ്) ലിമിററഡ്,
തൃശ്ശിവപേരൂർ.

യുക്തിഭാഷാ

(ഒന്നാംഭാഗം—സാമാന്യഗണിതം)

DISTRICT CENTRAL LIBRARY
L. L. A.
27 APR 1967
CANNANORE

വ്യാഖ്യാതാക്കൾ:

രാമവർമ്മ (മരു) തമ്പുരാൻ തിരുമനസ്സുകൊണ്ടും

എ. ആർ. അഖിലേശ്വരയ്യർ, എം. എ., എൽ. ടി.

ഹെഡ്മാസ്റ്റർ, സർക്കാർഹൈസ്കൂൾ,

വടക്കാഞ്ചേരി.

പ്രസാധകന്മാർ:

മംഗളോദയം ലിമിറ്റഡ്, തൃശ്ശിവപേരൂർ.

ഒന്നാംപതിപ്പ്: 1128 മകരം.
കോപ്പി: 500.

7830

വില: പത്തുറപ്പിക.

തൃശ്ശിവപേരൂർ മംഗളോദയം പ്രസ്സിൽ
അച്ചടിച്ചതു്

District Central Library
Book No : 18317

ഉപോദ്ഘാതം

"വേദസ്യ ചക്ഷുഃ കില ശാസ്ത്രമേതൽ
പ്രധാനതാംഗേഷു തതോസ്യ യുക്താ"

എന്നിങ്ങനെ വേദാംഗങ്ങളിൽ സർവ്വപ്രാധാന്യം അർഹിക്കുന്ന ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രത്തിന്റെ അപാരതയും ഗഹനതയും സർവ്വവിദിതമാണല്ലൊ. ആ ശാസ്ത്രത്തിന്റെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളായ ക്രിയാഭാഗവും ഫലഭാഗവും ആധാരാധേയഭാവംപോലെയാണ് വർത്തിക്കുന്നത്. നക്ഷത്രതിഥിവാരയോഗകരണങ്ങളായ പഞ്ചാംഗത്തെ പുരസ്കരിച്ചുള്ള സാധാരണഗണിതംതൊട്ടു ഗ്രഹണപര്യന്തമുള്ള എല്ലാ ഗണിതവും ക്രിയാഭാഗത്തിൽ പെട്ടതാകയാൽ അതിന്റെ പ്രാധാന്യം അനുക്തസിദ്ധമാണ്. ഇപ്രകാരം പ്രാധാന്യവും പ്രാഥമ്യവും അർഹിക്കുന്ന ഗണിതപദ്ധതിയുടെ ദൃഢതയും പ്രൌഢതയും നിർമ്മാണയുക്തിയും യഥാതഥം ആധുനികഗണിതശാസ്ത്രപണ്ഡിതന്മാർക്കുകൂടി ദൃഷ്ടിഗോചരമാക്കിത്തരുന്ന ഒരു പ്രാചീനഗ്രന്ഥരത്നമാണ് ഒരു ലഘുവ്യാഖ്യാനത്തോടുകൂടി ഞങ്ങളിപ്പോൾ വിദ്വൽസമക്ഷം അവതരിപ്പിക്കുന്ന ഈ "യുക്തിഭാഷാ."

യുക്തിഭാഷയിൽ സമ്യക്കായ ജ്ഞാനവും തഴക്കവും പഴക്കവും സിദ്ധിച്ചിട്ടുള്ള ഗണിതപടുക്കൾ ഇന്ന് അതിവിരളമായിരിക്കുന്നു. ഉത്തമനായ ഒരു ഗുരുവിന്റെ മുഖത്തുനിന്നു പഠിക്കുവാൻ ഉദ്ദേശിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു മഹൽഗ്രന്ഥമാണ് "യുക്തിഭാഷാ" എന്നു പലപ്പോഴും ഞങ്ങൾക്കു തോന്നിയിട്ടുണ്ട്. താദൃശനായ ഒരു ഗുരുവിന്റെ അഭാവം നിമിത്തം യുക്തിഭാഷാ കർത്താവിന്റെ യഥാർത്ഥമനോഗതി ഏതാണ്ട് ഊഹിച്ചെടുക്കുവാൻ മാത്രമേ ഞങ്ങൾക്കു സാധിച്ചിട്ടുള്ളു. ഇന്നത്തെ ഗണിതശാസ്ത്രന്യായങ്ങളെ അനുസരിച്ചു യുക്തിഭാഷയെ വ്യാഖ്യാനിക്കുവാൻ എളുപ്പമാണെന്നു ചിലർക്കു തോന്നിയേക്കാമെങ്കിലും അതു് അത്രത്തോളം ക്ഷിപ്രസാദ്ധ്യമാണെന്നു ഞങ്ങൾക്കു തോന്നുന്നില്ല. യുക്തിഭാഷയിലെ ഭാഷയുടെ പഴമയ്ക്കും വിഷയത്തിന്റെ ഗൌരവത്തിനും പഴയരീതിയിൽ തന്നെ വ്യാഖ്യാനിക്കുകയായിരിക്കും സമഞ്ജസമായിരിക്കുക എന്നാണ് ഞങ്ങളുടെ അഭിപ്രായം. പ്രാചീനകേരളഗണകോത്തമന്മാരുടെ ചിന്താഗതിയെ അനുസരിച്ചു തന്നെയാണ് ഞങ്ങളുടെ വ്യാഖ്യാനത്തിന്റെ ഗതിയും. ഞങ്ങളുടെ

ഈ ശ്രമം പൂൎണ്ണമായും സഫലമായി എന്നു ഞങ്ങൾ അഭിമാനിക്കു
ന്നില്ല. തുടങ്ങിവെച്ചാൽ പൂൎത്തിയാക്കുവാനോ പരിഷ്കരിക്കുവാനോ പ
ലരുമുണ്ടാകുമെന്നുള്ള വിശ്വാസത്താൽ മാത്രമാണ് ഞങ്ങൾ ഈ ഉദ്യ
മത്തിലേയ്ക്കു പ്രവേശിച്ചതു്.

കയ്യെഴുത്തു പ്രതികളിൽ എഴുത്തുകാരുടെ അനവധാനതയാൽ
വന്നുകൂടിയ പിഴകളും അവ്യക്തതകളും കഴിയുന്നതും തീൎത്തുകൊണ്ടു
ള്ള ഒരു പാഠമാണ് ഇതിൽ സ്വീകരിച്ചിട്ടുള്ളതു്. പാഠനിൎണ്ണയം ചെ
യ്യുവാൻ തൃപ്പൂണിത്തുറ സംസ്കൃതഗ്രന്ഥശാലവക ഒരു കയ്യെഴുത്തുപ്ര
തി, കൂളിവാരിയംവക ഒരു ഗ്രന്ഥം, ദേശമംഗലം മനവക ഒരു ഗ്ര
ന്ഥം, കൊടുങ്ങല്ലൂർ കോവിലകം വക ഒരു ഗ്രന്ഥം എന്നിങ്ങനെ നാ
ലു ഗ്രന്ഥങ്ങൾ ഞങ്ങൾക്കു സഹായകമായിത്തീൎന്നിട്ടുണ്ടു്.

ഏതദ്ഗ്രന്ഥത്തിൽ സാമാന്യഗണിതപ്രകരണമായ പൂൎവ്വഭാഗ
ത്തിലെ വിഷയങ്ങളെ ഏഴദ്ധ്യായങ്ങളായിട്ടാണ് വിഭജിച്ചിട്ടുള്ളതു്.
"പരികൎമ്മാഷ്ടകം" മുതൽ "ത്രൈരാശികം"വരെയുള്ള ആദ്യത്തെ
നാലദ്ധ്യായങ്ങളിൽപ്പെട്ട ക്രിയകളെല്ലാം സാമാന്യഗണിതമാൎഗ്ഗ
ത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നവൎക്കൊക്കെയും സുപരിചിതമായിട്ടുള്ളതാകകൊ
ണ്ടും മൂലംകൊണ്ടുതന്നെ വിഷയം മിക്കവാറും സ്പഷ്ടമാകുന്നതുകൊണ്ടും
വിശദീകരണം വേണമെന്നു തോന്നിയേടത്തു മാത്രമേ ടിപ്പണികൾ
ചേൎത്തിട്ടുള്ളു. അഞ്ചാമദ്ധ്യായത്തിൽ "കുട്ടാകാരക്രിയ"യുടെ യുക്തി
യാണ് പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുള്ളതു്. ഈ യുക്തി മനസ്സിലാക്കുവാൻ കുട്ടാ
കാരക്രിയയിൽ നല്ല ഉപസ്ഥിതി ആവശ്യമാണ്. തന്മൂലം അവിട
വിടെ ടിപ്പണികൾ ചേൎത്തിട്ടുള്ളതിനു പുറമെ യുക്തിഭാഷാ കൎത്താ
വിൻെറതന്നെ ഒരു ഭാഷാവ്യാഖ്യാനത്തെ അനുസരിച്ചൊരു ലഘുവ്യാ
ഖ്യാനത്തോടും ഉദാഹരണങ്ങളോടുംകൂടി "തന്ത്രസംഗ്രഹ"ത്തിലെ കു
ട്ടാകാരപ്രകരണത്തെ ഒരനുബന്ധമായി പുസ്തകത്തിൻെറ ഒടുവിൽ
പ്രത്യേകം ചേൎത്തിട്ടുമുണ്ടു്. പരിധിവ്യാസം, ജ്യാപ്രകരണം എന്ന
ആറും ഏഴും അദ്ധ്യായങ്ങൾ പ്രൌഢങ്ങളും ഗഹനങ്ങളുമാകയാൽ
ആ ഭാഗങ്ങൾ സവിസ്തരം വ്യാഖ്യാനിച്ചിട്ടുണ്ടെന്നു കാണാവുന്ന
താണ്.

പ്രസ്തുത ഗ്രന്ഥത്തിൽ പലതരം സംഖ്യാസൂചനകളുണ്ടു്. അവ
യുടെ സുഗമതയ്ക്കുവേണ്ടി കടപയാദ്യക്ഷരങ്ങളിൽനിന്നും രൂഢിമൂല
കാൎത്ഥപ്രതിപാദിതഭൂതസംഖ്യകളിൽനിന്നും സംഖ്യകളെ കണക്കാ
ക്കുന്ന സമ്പ്രദായത്തിൻേറയും അതോടൊപ്പം പാശ്ചാത്യഗണിതശാ

ന്ത്രപ്രകാരമുള്ള ക്രിയാസൂചകചിഹ്നങ്ങളുടേയും ഒരു സംക്ഷിപ്തവിവരണം ഈ പ്രസ്താവനയുടെ ചുവട്ടിൽ എഴുതിച്ചേർത്തിട്ടുണ്ട്.

വിദ്യാഭ്യാസം ഉദ്ദിഷ്ടഫലപ്രാപ്തിയിലെത്തണമെങ്കിൽ മാതൃഭാഷാ വഴിക്കാകണമെന്നുള്ള വിദഗ്ദ്ധാഭിപ്രായത്തെ ഇന്നു മിക്ക ഗവൺമെണ്ടുകളും സ്വീകരിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഈ കാര്യത്തിൽ നേരിട്ടുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന വൈഷമ്യങ്ങളിലൊന്നു സാങ്കേതികപദങ്ങളുടെ ദൌർല്ലഭ്യമാണ്. എന്നാൽ ഗണിതശാസ്ത്രത്തെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളമെങ്കിലും കൈരളിയിൽ ഈ ക്ഷാമം തീർക്കുവാൻ യുക്തിഭാഷയിലെ സാങ്കേതികപദങ്ങൾ തുലോം പര്യാപ്തങ്ങളും സാർവ്വത്രികമായ പ്രചാരം അർഹിക്കുന്നവയുമാണെന്നാണ് ഞങ്ങൾക്കു തോന്നുന്നതു്. ഇംഗ്ലീഷുതർജ്ജമയോടുകൂടി അകാരാദിക്രമത്തിൽ ചേർത്തിട്ടുള്ള സാങ്കേതികപദങ്ങളുടെ ഒരു പട്ടികയും ഇന്നു് ഇംഗ്ലീഷുഗണിതപാഠപുസ്തകങ്ങളിൽ കാണുന്ന സാങ്കേതികപദങ്ങൾക്കു ശരിയായ മലയാളപദങ്ങളുടെ ഒരു പട്ടികയും ഈ ഗ്രന്ഥാവസാനത്തിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ളതു് ഒരു പക്ഷേ പാഠശാലകളിലേയ്ക്കു വേണ്ടതായ ഗണിതശാസ്ത്രപാഠപുസ്തകങ്ങൾ തെയ്യാറാക്കുന്നവർക്കെങ്കിലും മാർഗ്ഗദർശകമായിത്തീർന്നുകണ്ടാൽ കൊള്ളാമെന്ന ആഗ്രഹത്താൽ മാത്രമാണ്.

കുട്ടാകാരക്രിയാസമ്പ്രദായം പാശ്ചാത്യഗണിതജ്ഞർക്കും പരിചയപ്പെടണമെന്ന ഉദ്ദേശത്തോടെ അതിനെപ്പററി ഇംഗ്ലീഷിൽ ഒരു ഉപന്യാസവും ഇതിൽ ചേർത്തിട്ടുണ്ട്.

പരിലേഖങ്ങളിലെ മുകൾഭാഗം സാമാന്യേന കിഴക്കെന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഇനി, ഈ സദുദ്യമത്തിൽ ഞങ്ങളെ പല വിധത്തിലും സഹായിച്ച മാന്യവ്യക്തികളെക്കുറിച്ചുകൂടി രണ്ടുവാക്കു പറയേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. അവരിൽ പരേതനായ സംസ്കൃതപണ്ഡിതർ ശ്രീമാൻ കോണത്തു കൃഷ്ണവാരിയരുടെ സ്വരൂപമാണ് ഞങ്ങളുടെ സ്മൃതിപഥത്തിൽ ആദ്യമായി ഉദിക്കുന്നതു്. യുക്തിഭാഷാപഠനത്തിൽ ഞങ്ങളുടെ സഹപ്രവർത്തകനായിരുന്ന അദ്ദേഹത്തിൻെറ പാണ്ഡിത്യവും തീക്ഷ്ണബുദ്ധിയും ഞങ്ങൾക്ക് എത്രമാത്രം സഹായകമായിത്തീർന്നിട്ടുണ്ടെന്നു പറഞ്ഞറിയിക്കാവതല്ല. അദ്ദേഹത്തിൻെറ ആത്മാവിനു നിത്യശാന്തി ഭവിക്കട്ടെ എന്നു പ്രാർത്ഥിക്കുകയല്ലാതെ കരണീയാന്തരമില്ലല്ലോ. അടുത്തു്, എടുത്തുപറയത്തക്ക പ്രമുഖവ്യക്തികളിൽ പ്രഥമസ്ഥാനം വഹിക്കുന്നതു് ഇപ്പോൾ വടക്കാഞ്ചേരി ഹൈസ്കൂൾ അദ്ധ്യാപകനായി

രിക്കുന്ന ശ്രീമാൻ ടി. വി. വേദമൂൎത്തിഅയ്യർ ബി. എ. അവർകളാണ്. കയ്യെഴുത്തു പകൎപ്പുകൾ പരിശോധിക്കുക, ഉദാഹരിച്ചിരിക്കുന്ന ക്രിയകൾ വീണ്ടുംചെയ്തു ഉറപ്പിക്കുക, പരിലേഖനങ്ങളുടെ അററകുററങ്ങൾ തീൎത്തു അവയെ വരച്ചുണ്ടാക്കുക, സാങ്കേതികപദങ്ങൾ മുതലായവയുടെ പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക എന്നിങ്ങനെ സൎവ്വവിധത്തിലും ഞങ്ങളെ സഹായിച്ച ശ്രീമാൻ വേദമൂൎത്തിഅയ്യർ അവർകളോടു് അദ്ദേഹത്തിൻെറ സഹായസഹകരണങ്ങൾക്കു ഞങ്ങൾ എന്നും കടപ്പെട്ടവരാണ്. അതുപോലെതന്നെ "പ്രൂഫ്"നോക്കുക എന്ന ആ ഭാരിച്ച കൃത്യം മുഴുവനും ഹൃദയപൂൎവ്വം നടത്തിത്തന്ന ചാലക്കുടി സൎക്കാർ പ്രാഥമികസ്കൂൾ ഹെഡ്മാസ്റ്റർ ടി. കെ. രങ്കയ്യർ അവർകളോടും ഞങ്ങൾക്കുള്ള ആധമൎണ്ണ്യം തീൎത്താൽ തീരാത്തതാണ്. കയ്യെഴുത്തു പകൎപ്പു സനിഷ്കൎഷം പരിശോധിക്കുകയും വേണ്ടത്തക്ക നിൎദ്ദേശങ്ങൾ നല്കുകയും ചെയ്ത പണ്ഡിതർ ശ്രീമാൻ കുനെഴുത്തു പരമേശ്വരമേനോൻ അവർകളും വ്യാഖ്യാനത്തിലെ ചില വിഷമഘട്ടങ്ങളെ സുഗമമാക്കിത്തീൎത്തുതന്ന ശ്രീമാൻ പി. കെ. കോരു എം. എ. എൽ. ടി. അവർകളും ഞങ്ങളുടെ സവിശേഷകൃതജ്ഞതയ്ക്കു പാത്രീഭവിച്ചിട്ടുള്ള മററു രണ്ടു മാന്യവ്യക്തികളാകുന്നു. ആരുടെ നിരന്തരമായ നിൎബ്ബന്ധവും പ്രോത്സാഹനവും ഹേതുവായിട്ടാണോ ഈ ഗ്രന്ഥം ഏവംവിധം വ്യാഖ്യാനസഹിതം രംഗപ്രവേശം ചെയ്തതു് ആ ശാസ്ത്രകുതുകിയും മഹാമതിയുമായ ബ്രഹ്മശ്രീ എ. കെ. ടി. കെ. എം. വാസുദേവൻ നമ്പൂതിരിപ്പാടവർകളോടും ഞങ്ങളുടെ ആവശ്യപ്രകാരമാണെങ്കിലും യാതൊരു വൈമനസ്യവുംകൂടാതെ ഈ ഗ്രന്ഥത്തിനു സമുചിതമായ ഒരവതാരിക എഴുതിത്തന്ന, സംസ്കൃതചിത്തനായ പണ്ഡിതർ ശ്രീമാൻ ശ്രീധരമേനോൻ (ചാലക്കുടി ഹൈസ്കൂൾ സീനിയർ മലയാളം പണ്ഡിതർ) അവർകളോടും ഇത്രയും ഭംഗിയിൽ ഇതിൻെറ അച്ചടിവേല മുഴുവനും നടത്തിത്തന്ന മംഗളോദയം പ്രസ്സ് ഭാരവാഹികളോടും, പ്രത്യേകിച്ചു പ്രസ്സ് മാനേജർ ശ്രീമാൻ പി. വി. നാരായണയ്യർ ബി. എ. അവർകളോടും ഞങ്ങൾക്കുള്ള നിസ്സീമമായ നന്ദിയേയുംകൂടി ഇവിടെ രേഖപ്പെടുത്തിക്കൊണ്ടു ഞങ്ങൾ ഈ പ്രസ്താവനയെ അവസാനിപ്പിച്ചുകൊള്ളുന്നു.

ചിഹ്നങ്ങളും അവയുടെ അൎത്ഥങ്ങളും

ചിഹ്നം	ഉദാഹരണം	വിവരണം
+	ഗ+മ	'ഗ' എന്ന സംഖ്യയോടു 'മ' എന്ന സംഖ്യ കൂട്ടുക.
—	ഗ—മ	'ഗ'എന്ന സംഖ്യയിൽനിന്നു 'മ' എന്ന സംഖ്യയെ വാങ്ങുക.
×; ·	ഗ×മ; ഗ.മ	'ഗ'എന്ന സംഖ്യയെ 'മ'എന്ന സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിക്കുക.
÷	ഗ÷മ; $\frac{\text{ഗ}}{\text{മ}}$	'ഗ' എന്ന സംഖ്യയെ 'മ' എന്ന സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുക.
		$\frac{\text{ഗ}}{\text{മ}}$, 'ഗ' അംശവും 'മ' ഛേദവും ആയിരിക്കുന്ന ഒരു ഭിന്നസംഖ്യ
$\frac{\text{പ്രമാണഫലം}}{\text{പ്രമാണം}}$		പ്രമാണത്തിന്റെ എത്ര ആവൎത്തി പ്രമാണഫലമെന്നു്.
: : ; =	ഗ : : മ; ഗ=മ	സമം; തുല്യം, : : ഈ അടയാളം ത്രൈരാശികത്തിൽ മാത്രമെ ഉപയോഗിക്കാറുള്ളു.
ഗ : മ : : ന : ട ഗ : മ = ന : ട	$\frac{\text{ഗ}}{\text{മ}}=\frac{\text{ന}}{\text{ട}}$	
±	ഗ±മ	'ഗ'; 'മ' എന്ന സംഖ്യകളുടെ യോഗമൊ അന്തരമൊ.
∼	ഗ∼മ	'ഗ', 'മ' എന്നീ സംഖ്യകളുടെ അന്തരം
ഗ^2, ഗ^3, ഗ^4, ഗ^5 ഇത്യാദി		'ഗ'എന്ന സംഖ്യയുടെ ക്രമേണവൎഗ്ഗം, ഘനം സമചതുൎഘാതം, സമപഞ്ചഘാതം എന്നു്
√	√ഗ	'ഗ' എന്ന സംഖ്യയുടെ വൎഗ്ഗമൂലം
L	Lഗ	1×2×3×4...×ഗ. ഒന്നു തുടങ്ങി 'ഗ' എന്ന സംഖ്യവരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഘാതം
∴		അതുകൊണ്ടു്
—°, —′, —″, —‴	ഗ°—മ′—ത″—ച‴	തിയ്യതി, ഇലി, വിലി, തല്പര.
( ); { } [ ]	ഗ+[ച+{ത−(സ−പ)}]	ക്രിയചെയ്യുമ്പോൾ അതാതു ആവരണചിഹ്നത്തിനകത്തുള്ള ക്രിയകൾ ആദ്യം ചെയ്യണം.

കുറിപ്പുകൾ

കടപയാദി: കവൎഗ്ഗം, ടവൎഗ്ഗം, പവൎഗ്ഗം ഇവ ഓരോന്നിലും അയ്യഞ്ച് അക്ഷരങ്ങൾ ക്രമേണ ഒന്ന്, രണ്ട്, മൂന്ന്, നാല്, അഞ്ച്, എന്ന സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ചവൎഗ്ഗം, തവൎഗ്ഗം ഇവ ഓരോന്നിലും ആദ്യത്തെ നാലക്ഷരങ്ങൾ ക്രമേണ ആറ്, ഏഴ്, എട്ട്, ഒമ്പത് എന്ന സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഞ, ന എന്നീ രണ്ടക്ഷരങ്ങളും അച്ചുകളും (സ്വരാക്ഷരങ്ങളും) ശൂന്യങ്ങളാകുന്നു. യ, ര, ല, വ, ശ, ഷ, സ, ഹ, ള, ഇവ ക്രമേണ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 എന്നീ സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. കൂട്ടക്ഷരങ്ങളിൽ ഒടുക്കത്തെ അക്ഷരംകൊണ്ടു മാത്രമാണ് സംഖ്യയെ നിൎണ്ണയിക്കുന്നത്.

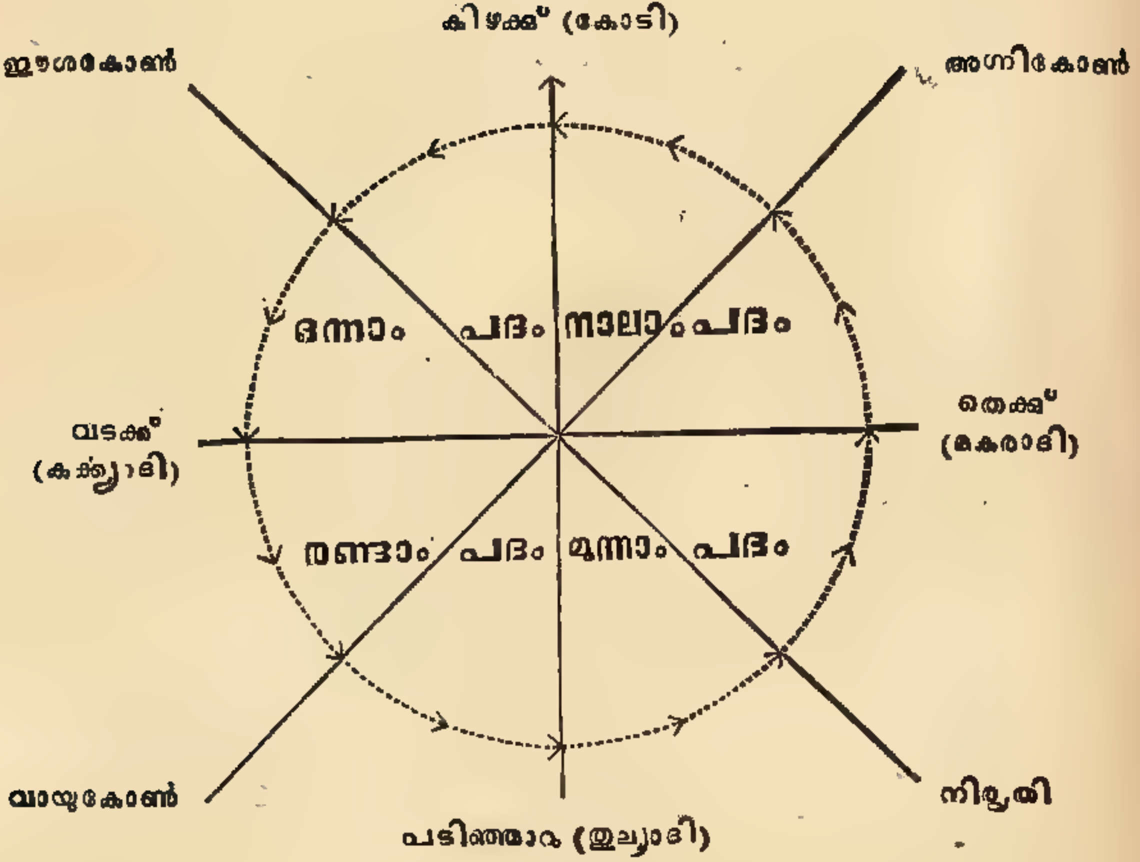
ഭൂതസംഖ്യകൾ: നാലുവേദങ്ങൾ, ദ്വാദശാദിത്യന്മാർ, ഏകാദശരുദ്രന്മാർ, നയനദ്വയം, പഞ്ചബാണൻ, മൂന്നഗ്നികൾ ഇത്യാദികളെല്ലാം പ്രസിദ്ധങ്ങളാണല്ലൊ. അതുകൊണ്ടു വേദങ്ങൾ എന്നുപറഞ്ഞാൽ നാലെന്നും, ആദിത്യന്മാർ എന്നു പറഞ്ഞാൽ പന്ത്രണ്ടെന്നും ഇത്യാദിരീത്യാ ഭൂതങ്ങളിൽനിന്നും സംഖ്യകളെ കല്പിക്കേണ്ടും പ്രകാരം.

പട്ടിക

60 തല്പര (60‴)=ഒരു വിലി
60 വിലി (60″)=ഒരു ഇലി
60 ഇലി (60′)=ഒരു തിയതി
30 തിയതി(30°)=ഒരു രാശി
12 രാശി =ഒരു ഭഗണം

60 ഗുൎവ്വക്ഷരം=ഒരു വിനാഴിക
60 വിനാഴിക=ഒരു നാഴിക
60 നാഴിക =ഒരു ദിവസം

ദിക്കുകൾ



കിഴക്ക് (കോടി)
ഈശാനകോൺ
അഗ്നികോൺ
ഒന്നാം പാദം
നാലാം പാദം
വടക്ക് (കർക്ക്യാദി)
തെക്ക് (മകരാദി)
രണ്ടാം പാദം
മൂന്നാം പാദം
വായുകോൺ
നിരൃതി
പടിഞ്ഞാറ (തുല്യാദി)

അവതാരിക

"യുക്തിഭാഷാ" എന്ന ഈ പ്രാചീനഗണിതഗ്രന്ഥം ,ഏവം വിധം സമഞ്ജസമായ ഒരു ഭാഷാവ്യാഖ്യാനത്തോടുകൂടി രംഗപ്രവേശം ചെയ്യുന്നതു് ഇദംപ്രഥമമായിട്ടാണെന്നു തോന്നുന്നു. അമേയമായ ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രസൌധത്തിൻെറ അസ്ഥിവാരമായ ക്രിയാപദ്ധതിയുടെ എല്ലാ ഭാഗവും അങ്ങേ അററത്തോളം സസൂക്ഷ്മം സനിഷ്കർഷം പരിശോധിച്ചു് അതിൻെറ നിർമ്മാണകൌശലയുക്തിയും അതിൽക്കൂടി സുഗമമാംവിധം സഞ്ചരിക്കുവാനുള്ള മാർഗ്ഗനിർദ്ദേശവും നൽകുന്ന പ്രസ്തുതഗ്രന്ഥം ഒരു ഭാഷാഗ്രന്ഥമാകയാൽ കൈരളിക്കും ഒരു കേരളീയനാൽ വിരചിതമായിട്ടുള്ളതാകയാൽ കേരളീയർക്കേവർക്കും അഭിമാനത്തെ വളർത്തിക്കൊണ്ടു് ഭാഷാഭണ്ഡാഗാരത്തിൻെറ ഒരൊഴിഞ്ഞ മൂലയിലാണു് വർത്തിക്കുന്നതു്. തന്മൂലം ഈ അമൂല്യരത്നം അധികമാരുടേയും ദൃഷ്ടിയിൽപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടാവില്ല. അങ്ങിനെയായാൽപ്പോരെന്നു തീരുമാനിച്ച ഇതിൻെറ പ്രസാധകന്മാരുടെ സദ്വ്യവസായം എത്രയും അഭിനന്ദനീയമായിരിക്കുന്നു.

ഭാരതത്തിലെ ഇതരദേശങ്ങളെ അപേക്ഷിച്ചു കേരളത്തിനുള്ള പ്രത്യേകത ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രവിഷയത്തിലും കാണപ്പെടുന്നുണ്ടു്. പഞ്ചസിദ്ധാന്തങ്ങളിൽ സൂര്യസിദ്ധാന്തത്തെ സർവ്വപ്രധാനമായി ഇതരദേശീയർ സ്വീകരിച്ചിരിക്കേ കേരളീയർ മാത്രം ആദ്യം മുതൽക്കേ ബ്രഹ്മസിദ്ധാന്തത്തെ അനുസരിച്ചു വരുന്നതുതന്നെ ഇതിനു മതിയായ ലക്ഷ്യമാകുന്നു. കല്യബ്ദം 3785-ൽ (എ. ഡി. 684-ൽ) ആണല്ലോ പരഹിതഗണിതപദ്ധതി ആദ്യമായി നടപ്പിൽ വന്നതു്. അതിനു മുമ്പു ഗോളഗണിതപാരദൃശ്വാവായ ആര്യഭടാചാര്യരുടെ ആര്യഭടീയഗ്രന്ഥമായിരുന്നു ഇവിടെ ഗണിതമനീഷികൾക്കാലംബം. ഈ ആര്യഭടൻ ഒരു കേരളീയനാണെന്നും ആര്യഭടൻ എന്നായിരുന്നില്ല അദ്ദേഹത്തിൻെറ സാക്ഷാൽ നാമധേയമെന്നും സാധാരണക്കാർക്കു ദുർഗ്ഗമമായ ആര്യാവൃത്തത്തിൽ ആര്യഭടീയം ഗ്രന്ഥം മുഴുവനും എഴുതിയതിനാൽ ലഭിച്ച ഒരു ബിരുദനാമം മാത്രമാണു് അതെന്നും പല അഭിജ്ഞന്മാരും അഭിപ്രായപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടു്. ഈ അഭിപ്രായത്തിനു് ഉപോൽബലകമായി തെളിവുകളുമുണ്ടു്. ആര്യഭടീയത്തിൻെറ ഗണിതപാദത്തിലേയും ഗീതികാപാദത്തിലേയും പ്രാരംഭശ്ലോകങ്ങൾ അസ്പദമാക്കി നോക്കുമ്പോൾ ആര്യഭടീയം ബ്രഹ്മസിദ്ധാന്തത്തെ അടിസ്ഥാന

പ്പെടുത്തിയാണ് എഴുതിയിട്ടുള്ളതെന്നു കാണാവുന്നതാണ്. ആര്യ്യഭടീയത്തിൻെറ വ്യാഖ്യാതാക്കന്മാരെല്ലാവരും കേരളീയരാകുന്നു. മാത്രമല്ല, ആര്യ്യഭടീയഭാഷ്യകാരനായ കേളല്ലൂർ നീലകണ്ഠസോമയാജിപ്പാട്, ആര്യ്യഭടൻെറ ജന്മദേശത്തെപ്പററി "അശ്മകജനപദജാതഃ" എന്നു രേഖപ്പെടുത്തീട്ടുള്ളതും ശ്രദ്ധേയമാകുന്നു. അശ്മകപദത്തിന് ആപ്ററിയുടെ സംസ്കൃതനിഘണ്ടു (Apte's Sanskrit Dictionary)വിൽ പ്രാചീനതിരുവിതാംകൂർ എന്നാണ് അർത്ഥം കൊടുത്തിട്ടുള്ളതു്. ഇപ്രകാരം ഒരു കേരളീയനാണെന്ന് അനുമിക്കുവാൻ ഇടംനൽകുന്ന ഈ മഹാനുഭാവൻ എ. ഡി. 476_ൽ ജനിച്ചതായും എ. ഡി. 499_ൽ ഗ്രന്ഥകാരനു കേവലം 23 വയസ്സുമാത്രം പ്രായമായിരുന്ന കാലത്തു് ആര്യ്യഭടീയനിർമ്മിതി നടന്നതായും അസന്ദിഗ്ദ്ധമാംവിധം തെളിഞ്ഞിരിക്കുന്നു. "ഷഷ്ട്യബ്ദാനാം ഷഷ്ടിർയദാ വ്യതീതാസ്ത്രയശ്ച യുഗപാദാഃ ത്ര്യധികാ വിംശതിരബ്ദാസ്തദേഹ മമ ജന്മനോതീതാഃ" എന്നു ഗ്രന്ഥകാരൻതന്നെ കാലക്രിയാപാദത്തിൽ തൻെറ കാലത്തെ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ളതു നോക്കുക.

ആര്യ്യഭടീയസിദ്ധാന്തത്തിൽത്തന്നെയും കാലാനുരോധേന ന്യൂനതകൾ കണ്ടു തുടങ്ങിയതിനാലാണ് മുൻ പ്രസ്താവിച്ചപോലെ എ. ഡി. 684_ൽ ഏതാണ്ട് ഒരു രണ്ടു നൂററാണ്ടു കഴിഞ്ഞപ്പോൾ പരഹിതഗണിതം നടപ്പാവാനിടയായതു്. പരഹിതപദ്ധതിയുടെ നിർമ്മാതാവു് ആരാണെന്നു തീർത്തുപറയുവാൻ സാധിക്കുന്നില്ലെങ്കിലും ആ മഹാനും ഒരു കേരളീയനായിരിക്കണം എന്നൂഹിക്കുവാൻ അതിന്നു് ഇന്നും കേരളത്തിൽ മാത്രമുള്ള പ്രചാരംതന്നെ മതിയായ കാരണമാകുന്നു. കൃത്യമായി കാലനിർണ്ണയം ചെയ്യുവാൻ തക്ക രേഖകൾ ഇല്ലെങ്കിലും ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രപാരാവാരപാരംഗതന്മാരായ പല പണ്ഡിതവരേണ്യന്മാരും കേരളത്തെ അധിവസിച്ചിട്ടുണ്ടെന്നുള്ളതിന് അവരുടെ ചില കൃതികളും അവരെസ്സംബന്ധിച്ചുള്ള പല ഐതിഹ്യങ്ങളും സാക്ഷ്യങ്ങളായി നില്ക്കുന്നുണ്ട്. "പറച്ചിപെററ പന്തിരുകുലത്തിൻെറ പിതാവെന്നു പ്രസിദ്ധനായ, വാക്യകാരൻ എന്ന പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്ന, വരരുചിയും പാഴൂർ പടിപ്പുരയുടെ മാഹാത്മ്യത്തിനു ഹേതുഭൂതനായിത്തീർന്ന തലക്കുളത്തു ഭട്ടതിരിയും 'ജീവേ പരസ്പരന്യായ'ത്തിൻെറ മൂലകർത്താവായ സങ്ഗമഗ്രാമ മാധവനും മഹിഷമംഗലം നമ്പൂതിരി, തൃക്കണ്ടിയൂർ അച്യുതപ്പിഷാരടി തുടങ്ങിയുള്ളവരും മററും ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രപഥചാരികളുടെ ഭക്ത്യാദരബഹുമാനങ്ങൾ

ക്ക പാത്രങ്ങളായി യശശ്ശരീരികളായി കേരളം ഉള്ള കാലത്തോളം ജീവിച്ചിരിക്കുന്നവരാകുന്നു.

അന്നത്തെ ഏററവും പരിഷ്കരിച്ച ഗണിതപദ്ധതിയായിരുന്ന പ്രസ്തുത പരഹിതത്തിലും കാലാന്തരത്തിൽ സ്ഖലിതങ്ങൾ കണ്ടുതുടങ്ങി. തൽഫലമായി ദൃഗ്ഗണിതം എന്ന നൂതനപദ്ധതി നടപ്പിൽ വന്നു. ഏകദേശം ഒരഞ്ഞൂറുകൊല്ലം കൂടുമ്പോൾ ഗണിതപദ്ധതിയിൽ മാററങ്ങൾ വരുത്തേണ്ടി വരുമെന്ന് ആചാര്യന്മാർ തന്നെ പ്രവചിച്ചിട്ടുണ്ട്. ദൃഗ്ഗണിതം നടപ്പിൽ വന്നത് "ശാകേ ത്രീഷു വിശ്വമിതേ കൃതം" എന്ന വാക്യം അനുസരിച്ച് ശകാബ്ദം 1353-ന് എ. ഡി. 1430-ൽ ആണെന്നു സിദ്ധമാകുന്നു. എ. ഡി. 684-ൽ നടപ്പിൽ വന്ന പരഹിതത്തിൽ ശാസ്ത്രദൃഷ്ട്യാ പിഴകൾ കണ്ടു തുടങ്ങീട്ടും പിന്നേയും കുറെ രണ്ടു നൂററാണ്ടുകൂടി കഴിഞ്ഞതിനു ശേഷമാണ് ദൃഗ്ഗണിതം നടപ്പിൽ വന്നതെന്ന് ഇതിൽനിന്നും വ്യക്തമാകുന്നുണ്ടല്ലോ. ദൃഗ്ഗണിതകർത്താവായ വടശ്ശേരി പരമേശ്വരൻനമ്പൂതിരി—പരമേശ്വരാചാര്യർ—ആലത്തൂർ ഗ്രാമക്കാരനും ഭാസ്കരാചാര്യകൃതമായ ലീലാവതിക്കും മററു പല ജ്യൌതിഷികഗ്രന്ഥങ്ങൾക്കും വ്യാഖ്യാനങ്ങൾ എഴുതീട്ടുള്ള ആളുമാകുന്നു. ഇദ്ദേഹം 55 കൊല്ലക്കാലം നിളാനദിയുടെ (ഭാരതപ്പുഴയുടെ) തീരത്തു കിടന്നുകൊണ്ടു നക്ഷത്രനിരീക്ഷണം നടത്തിയതിൻെറ ഫലമായിട്ടാണ് ദൃഗ്ഗണിതം ഉണ്ടായതെന്നു വിശ്വാസയോഗ്യമായ ഒരൈതിഹ്യം ഇന്നും പ്രചാരത്തിലുണ്ട്. പ്രസ്തുത ദൃഗ്ഗണിതകർത്താവു മാത്രമല്ല അന്നു ഗണിതപദ്ധതിയിൽ തെററുകളുണ്ടെന്നും അവയെ യഥാകാലം തിരുത്തേണ്ടതാണെന്നും ഉൽഘോഷിച്ചിട്ടുള്ളതു്. പരമേശ്വരാചാര്യരുടെ അടുത്തു മുമ്പു ജീവിച്ചിരുന്നവരെന്ന് മിക്കവാറും ഗണിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള രണ്ടു വിദ്വച്ഛിരോമണികളുടെ പേരുകൾ ഇവിടെ പ്രത്യേകം പ്രസ്താവയോഗ്യമാകുന്നു. "നൂതനഗ്രഹസോമസുതാ രചിതായാഃ കരണപദ്ധതേർവിദുഷാ" എന്നിങ്ങനെ 'കരണപദ്ധതി'യുടെ പ്രണേതാവെന്നു പ്രസിദ്ധനായ പുതുമനച്ചോമാതിരിപ്പാടും 'ജീവേ പരസ്പരന്യായ'ത്തിൻെറ ജനയിതാവെന്നു മുൻസൂചിപ്പിച്ച സങ്ഗമഗ്രാമമാധവനും ആകുന്നു ആ രണ്ടു മാന്യവ്യക്തികൾ. കരണപദ്ധതിയുടെ കർത്താവ് ഗ്രഹണസംബന്ധിയായ പ്രതിപാദനത്തിൽ സ്ഫുടങ്ങളെ ദൃക്കുകൊണ്ടു് (നിരീക്ഷണംകൊണ്ടു്) ശരിപ്പെടുത്തുവാനുള്ള മാർഗ്ഗങ്ങളെ നിർദ്ദേശിച്ചിരിക്കുന്നതും വേണ്വാരോഹാദി മഹൽഗ്രന്ഥങ്ങളുടെ കർത്താവായ മാധവൻ പരഹിതസ്ഫുടങ്ങളെ

നിരീക്ഷണഫലങ്ങളുമായി ഒത്തു നോക്കുന്നതും അന്നു നടപ്പിലിരുന്ന ഗണിതപദ്ധതിയിൽ പ്രത്യക്ഷമായിരുന്ന സ്ഖാലിത്യങ്ങളെ പുരസ്കരിച്ചായിരുന്നുവെന്നു വിശിഷ്യ പറയേണ്ടതായിട്ടില്ലല്ലോ. ഈ മാധവൻ അപരിമിതശ്രേണികൾ മുഖേന പരിധിമാനത്തെ സൂക്ഷ്മപ്പെടുത്തിയ ആദ്യത്തെ കേരളീയനോ അഥവാ ആദ്യത്തെ ഭാരതീയനോ ആണെന്നും ഈ ഗണിതവിദ്യാസൂത്രം പാശ്ചാത്യർ കണ്ടുപിടിച്ചതായി അഭിമാനിക്കുന്നത് ഒന്നു രണ്ടു നൂററാണ്ടിനു ശേഷം മാത്രമാണെന്നും കൂടി ഇവിടെ അഭിമാനപൂർവ്വം രേഖപ്പെടുത്തിക്കൊള്ളട്ടെ.

പ്രസ്തുത പരമേശ്വരാചാര്യരുടെ ദൃഗ്ഗണിതപദ്ധതി നടപ്പിൽവന്നുവെങ്കിലും അതിന്നു കേരളമൊട്ടുക്കും സർവ്വസമ്മതമായ ആനുകൂല്യം ലഭിച്ചിരുന്നില്ലെന്ന് ഊഹിക്കുവാൻ അവകാശമുണ്ട്. ആലത്തൂർ ഗ്രാമക്കാരൊഴികെ ശേഷം ഗ്രാമക്കാർ ഒരു സിദ്ധാന്തം എന്നപോലെ ഇന്നും മുഹൂർത്താദികൾക്ക് ആ പഴയ പരഹിതസിദ്ധാന്തത്തെത്തന്നെ മുറുകെ പിടിച്ചു വരുന്നുണ്ടല്ലോ. ആ സ്ഥിതിക്ക് അന്നത്തെ കഥ എന്തായിരുന്നിരിക്കാം! ഇതരഗ്രാമക്കാരുടെ മാമൂൽപ്രിയത്വമോ അജ്ഞതയോ എന്താണ് ഇതിനു ഹേതുവെന്നു മനസ്സിലാവുന്നില്ല. എ. ഡി. 1430-ൽ നടപ്പിൽ വന്ന ഇന്നത്തെ ദൃഗ്ഗണിതത്തിൽത്തന്നെ സ്ഫുടങ്ങളിൽ ന്യൂനതകൾ കാണുന്നുണ്ടെന്നും കാലാനുസൃതം ഈ പദ്ധതിയും പരിഷ്കരിക്കേണ്ട കാലം അതിക്രമിച്ചുവെന്നും കേരളത്തിലെ ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രവിശാരദന്മാർ ഐകകണ്ഠ്യേന അഭിപ്രായപ്പെടുകയും പരിഷ്കരണാർത്ഥം കഴിയുംവിധം പരിശ്രമിക്കയും ചെയ്തുവരുന്ന ഇക്കാലത്ത്, എ. ഡി. 684-ൽ നടപ്പിൽ വന്ന ആ പഴഞ്ചൻ പരഹിതപദ്ധതി സ്വീകാര്യമാണെന്നു കരുതി പിഴച്ച മുഹൂർത്തങ്ങളിൽ മികച്ച കർമ്മങ്ങൾ അനുഷ്ഠിച്ചു പോരുന്നവരുടെ മനസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ചെന്തു പറയേണ്ടൂ! പഞ്ചാംഗപുസ്തകങ്ങളിൽ പരഹിതത്തിലും ദൃക്കിലും വെവ്വേറെ ഗ്രഹസ്ഫുടങ്ങളും പകർച്ചകളും മററും കാണിക്കുന്നതിലും ഗണിതപാഠവിദ്യാർത്ഥികളെ വെറുതെ രണ്ടു വഴിക്കും നടത്തി ബുദ്ധിമുട്ടിപ്പിക്കുന്നതിലും എത്രത്തോളം ഔചിത്യമുണ്ടെന്നുള്ള സംഗതിയും സവിശേഷം ചിന്തനീയമാകുന്നു.

ആചാര്യരുടെ പ്രസ്തുത ദൃഗ്ഗണിതഗ്രന്ഥം നാളിതുവരെ കണ്ടുകിട്ടിയിട്ടില്ലെന്നുള്ളതു വേദനാജനകമായിരിക്കുന്നു. പക്ഷേ, അതിന്റെ ഒരു പരിഷ്കരിച്ച പതിപ്പു നമുക്കു കിട്ടിയിട്ടുണ്ട്. അതാണ് "തന്ത്രസംഗ്രഹം" എന്ന പേരിൽ സുപ്രസിദ്ധമായ ഗ്രന്ഥം. തന്ത്രസംഗ്ര

ഹകത്താവ്, ദൃഗ്ഗണിതകത്താവിൻെറ ഒരു മകനായ ദാമോദരൻനമ്പൂതിരിയുടെ ശിഷ്യനും ആയ്യഭടീയ ഭാഷ്യകത്താവെന്നു വിഖ്യാതനുമായ കേളല്ലൂർ നീലകണ്ഠസോമയാജിപ്പാടുതന്നെയാകുന്നു. ഇതിൻെറ നിമ്മിതി "ഹേ വിഷ്ണോ നിഹിതം കൃത്സ്നം" എന്ന കലിയനുസരിച്ച് എ. ഡി. 1500_ാമാണ്ടിന്നടുത്താണെന്നു കാണുന്നു. ഈ തന്ത്രസംഗ്രഹമാണ് "യുക്തിഭാഷ" എന്ന പ്രകൃതഗ്രന്ഥത്തിൻെറ ആധാരം. തന്ത്രസംഗ്രഹത്തിൽ പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുള്ള വിഷയങ്ങളുടേയും ക്രിയകളുടേയും തത്തൽക്രമത്തിലുള്ള യുക്തികൾ നമുക്കു യുക്തിഭാഷയിൽ കാണാം. ഗോളഗണിതത്തിന്നും അതിന്നുപയുക്തമായ സാമാന്യഗണിതത്തിന്നും അവശ്യം ആവശ്യമായ എല്ലാ ഭാഗങ്ങളുടേയും യുക്തികളെ സവിസ്തരം ഉപപാദിക്കുക എന്നതു യുക്തിഭാഷയുടെ ഒരു പ്രത്യേകതയായ് കണക്കാക്കാം. "യേ ഗോളപഥസ്ഥാസ്സ്യുഃ" എന്ന കലിദിനത്തിൽ (എ. ഡി. 1639_ൽ) യുക്തിഭാഷ എഴുതി അവസാനിപ്പിച്ചതായ് കാണുന്നു. "അലേഖി യുക്തിഭാഷാ വിപ്രേണ ബ്രഹ്മദത്തസംജ്ഞേന"—ഇത്യാദി ശ്ലോകംകൊണ്ടു യുക്തിഭാഷാകത്താവ് 'ബ്രഹ്മദത്തൻ' എന്നൊരു ബ്രാഹ്മണനാണെന്നു തെളിയുന്നുണ്ട്. ഈ ബ്രാഹ്മണസത്തമൻ—ബ്രഹ്മദത്തൻനമ്പൂതിരി—ഏതു നാട്ടുകാരനാണെന്നോ ഏതു് ഇല്ലക്കാരനാണെന്നോ സൂക്ഷ്മത്തോളം അറിയുവാൻ സാധിച്ചിട്ടില്ല. എന്നു വരികിലും, ആലത്തൂർ ഗ്രാമത്തിൽപ്പെട്ട "പറങ്ങോട്ട്" എന്ന ഇല്ലത്തെ ഒരംഗമാണ് ഇദ്ദേഹമെന്നു തൽഗ്രാമവാസികൾ ഇന്നും പരമ്പരയാ വിശ്വസിച്ചും പറഞ്ഞും വരുന്നുണ്ടെന്നുള്ള സംഗതി ഇവിടെ പ്രസ്താവ്യമാകുന്നു. പരമ്പരാഗതമായി നിലനിന്നു വരുന്ന ആ ഐതിഹ്യം കേവലം തള്ളിക്കളയത്തക്കതാണെന്നു തോന്നുന്നില്ല. ദൃഗ്ഗണിതതന്ത്രസംഗ്രഹാദിഗ്ഗ്രന്ഥകാരണവന്മാരുടെ വഗ്ഗത്തിൽപ്പെട്ട ഈ യുക്തിഭാഷാ ശിശുവിൻേറയും ഉൽപ്പത്തി ആ ഗ്രാമത്തിൽത്തന്നെയാവാനാണല്ലോ അധികം ന്യായം.

യുക്തിഭാഷയിൽ പ്രതിപാദിതമായ വിഷയം തൽകത്താവിൻെറ സ്വന്തമല്ലെന്നും അതു പ്രാധാന്യേന തന്ത്രസംഗ്രഹത്തിനു കീഴ്പ്പെട്ടാണ് വത്തിക്കുന്നതെന്നും മുൻ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. എന്നാൽ വേറെ ചില പ്രാമാണികഗ്രന്ഥങ്ങളുടെ തണലിലും ഗ്രന്ഥകാരൻ അഭയംപ്രാപിച്ചിട്ടുള്ളതായി കാണുന്നുണ്ട്. മദ്രാസ് ഗവമ്മേണ്ടുവകയായുള്ള പൌരസ്ത്യകയ്യെഴുത്തുഗ്രന്ഥാലയത്തിൽ (Madras Government Oriental manuscripts Library_ൽ) "ഗണിതയുക്തിഭാഷ" എ

ന്നൊരു സംസ്കൃതഗ്രന്ഥമുണ്ടെന്നും വിഷയസാമ്യം നോക്കുമ്പോൾ ഏതെങ്കിലും ഒന്നു മററതിൻെറ തർജ്ജമയാവണമെന്നും സൂക്ഷ്മദൃക്കായ ഒരു മഹാൻ അഭിപ്രായപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. "ക്രിയാക്രമകരീ" എന്ന ലീലാവതീവ്യാഖ്യാനത്തിൻെറ കൎത്താവു് (അജ്ഞാതനാമാവു്) യുക്തിഭാഷാഗ്രന്ഥകാരൻതന്നെയല്ലയോ എന്നു ബലമായ് ആരും സംശയിച്ചുപോകുംവിധം അത്രയ്ക്കു സാപ്തപദീനമായ സാദൃശ്യം രണ്ടു ഗ്രന്ഥങ്ങൾക്കും തമ്മിൽ ചില സ്ഥലങ്ങളിൽ കാണപ്പെടുന്നുണ്ടു്. ദൃഷ്ടാന്തത്തിനു് ഒരു രണ്ടു വരി ഇവിടെ ഉദ്ധരിച്ചു കാണിക്കാം. ക്രിയാക്രമകരിയിലെ "കഥം പുനരത്ര മുഹുർവിഷമസംഖ്യാഹരണേന ലബ്ധസ്യ പരിധേരാസന്നത്വം അന്ത്യസംസ്കാരേണാപാദ്യതേ; ഉച്യതേ. തത്ര താവദുക്തരൂപസ്സംസ്കാരസ്സൂക്ഷ്മോ നവേതി പ്രഥമം നിരൂപണീയം" എന്ന ഭാഗവും യുക്തിഭാഷയിലെ "എങ്ങിനെ പിന്നെ ഇവിടെ പിന്നേയും പിന്നേയും മീത്തേ മീത്തേയുള്ള വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചു ഫലങ്ങളെ സംസ്കരിച്ചിരിക്കുന്നതു പരിധിയോടു് അടുത്തുവന്നു, ഒടുക്കത്തെ സംസ്കാരം ചെയ്താൽ, എന്ന പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ ഇച്ചൊല്ലിയ സംസ്കാരംതന്നെ സൂക്ഷ്മമോ അല്ലയോ എന്നു നടേ നിരൂപിക്കേണ്ടുവതു്" എന്ന ഭാഗവും ഒപ്പംവെച്ചു വായിച്ചു നോക്കുക. ഇങ്ങിനെ ചുഴിഞ്ഞു നോക്കുകയാണെങ്കിൽ വിഷയത്തെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം യുക്തിഭാഷാ കൎത്താവിനു സ്വയം അഭിമാനിക്കുവാൻ വളരെയൊന്നുമില്ലെന്നു പറയേണ്ടിവരും. എന്നാൽ യുക്തിഭാഷാ കൎത്താവിനെപ്പോലെയുള്ള ഒരു പണ്ഡിതൻ ഇപ്രകാരം "സൎവ്വനിബന്ധനകൎത്താ"വായിത്തീരുമോ എന്നതും ചിന്തനീയമാണു്. യുക്തിഭാഷയിലെ വിഷയങ്ങളുടെ ഉപപത്തി കേരളത്തിലെ ജ്യൌതിഷികകുടുംബങ്ങളിൽ രൂഢമൂലമായും പരമ്പരാസിദ്ധമായും എന്നാൽ നാനാവിധമായും കിടന്നിരുന്നതായി വിചാരിപ്പാൻ വിരോധമില്ല. ദേശഭേദത്തോടും പാഠഭേദത്തോടും പ്രകാരഭേദത്തോടും കൂടിക്കിടന്നിരുന്ന തൽസംബന്ധികളായ ക്രിയകൾക്കു് ഐകരൂപ്യവും സ്വച്ഛതയും വരുത്തുവാൻ യുക്തിഭാഷാകൎത്താവു യത്നിക്കുകയും ചിന്നിച്ചിതറിക്കിടന്നിരുന്നതു പലതും സംഭരിക്കയും സംശോധിച്ചു ക്രോഡീകരിക്കയും ചെയ്ത കൂട്ടത്തിൽ വിഷയസമഗ്രതയ്ക്കുവേണ്ടി മററു ചില ഗ്രന്ഥങ്ങളെ നോക്കുകയോ അവയിൽനിന്നു ചില ഭാഗങ്ങൾ അതേപടി തർജ്ജമചെയ്യുകയോ ചെയ്തിട്ടുണ്ടെങ്കിൽത്തന്നെ അതു ക്ഷന്തവ്യമല്ലാത്ത ഒരപരാധമായിപ്പോയെന്നു വിധിച്ചുകൂടാത്തതാകുന്നു.

പ്രതിപാദനരീതിയെക്കുറിച്ചു പറയുകയാണെങ്കിൽ യുക്തിഭാഷാകർത്താവു് എത്രയും പ്രശംസനീയനും അനുകരണീയനുമാകുന്നു. ഏതു വിഷയവും മൂലതത്വത്തിൽനിന്നു തുടങ്ങുകയും അതിനെ കേന്ദ്രമാക്കിക്കൊണ്ടു ശാഖോപശാഖകളായി സാവധാനം സംക്രമിക്കുകയും ഒടുവിൽ അതേവരെ പ്രതിപാദിച്ച ഭാഗങ്ങളുടെ ഒരു പുനഃപരിശോധനസ്കുശേഷം ഉപസംഹരിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന സമ്പ്രദായവിശേഷംകൊണ്ടു യുക്തിഭാഷാകർത്താവു പ്രതിപാദ്യവിഷയത്തെ അനുവാചകന്മാരിൽ ശിലാരേഖപോലെ പതിയുമാറാക്കിത്തീക്കുന്ന കൌശലം അനുഭവൈകവേദ്യമെന്നേ പറയേണ്ടൂ. പരിലേഖസഹായംകൂടാതെതന്നെ പ്രൌഢവും ഗഹനവുമായ വിഷയങ്ങളെ പരിമിതപദങ്ങളെക്കൊണ്ടു സുഗമമാംവണ്ണം പ്രതിപാദിക്കുക എന്ന കാൎയ്യത്തിൽ യുക്തിഭാഷാകർത്താവിനെ കവച്ചുവെയ്ക്കുവാൻ അധികംപേരുണ്ടാകുമെന്നു തോന്നുന്നില്ല. ഭാഷയെ സംബന്ധിച്ചാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ഹൃദയംഗമത്വവും അനിതരസാധാരണത്വവും വാചാമഗോചരംതന്നെയാണു്. അന്നത്തെ വിദ്യാസമ്പന്നന്മാർ സൎവ്വസാധാരണം സംസാരഭാഷയായി സ്വീകരിച്ചു പോന്നിരുന്ന ആ ഭാഷ അതേവിധംതന്നെയാണു് ഇതിൽ സാകല്യേന ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ളതു്. ഉദാഹരണത്തിനു് ഏതാനും വരികൾ ഇവിടെ കാണിക്കാം.

"കൎണ്ണത്രയഘാതത്തെ ക്ഷേത്രഫലംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഇരട്ടിച്ച വ്യാസമായിട്ടിരിക്കും." "ഇങ്ങിനെ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വൎഗ്ഗാന്തരം അവററിന്റെ ചാപയോഗത്തിന്റേയും അന്തരത്തിന്റേയും ജ്യാക്കൾ രണ്ടും തങ്ങളിലെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു്." "നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം, രണ്ടാമേടത്തു നാലു്, പിന്നെ ശൂന്യം, പിന്നെ ഋണം രണ്ടു്, പിന്നെ അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തു ധനമായിട്ടു രണ്ടു്—ഇങ്ങിനെ ക്രമം—സംസ്കാരഫലയോഗം പിന്നെ." "ഭുജമുഖഘാതാൎദ്ധത്തെ വേറെവെച്ചു് അവററിന്റെ അൎദ്ധങ്ങളുടെ വൎഗ്ഗയോഗത്തെ അതിങ്കൽ സംസ്കരിപ്പൂ. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരബാഹു ഘാതാൎദ്ധത്തിൽ അവററിന്റെ അൎദ്ധങ്ങളുടെ വൎഗ്ഗയോഗത്തെ സംസ്കരിപ്പൂ. പിന്നെ ഇങ്ങിനെ സംസ്കൃതങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഘാതാൎദ്ധങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. അതു യോഗാന്തരങ്ങളിൽ കൎണ്ണമായിട്ടിരിക്കും." ഇത്രയുംകൊണ്ടു് ഇതിലെ ഭാഷാരീതി സാമാന്യേന ഗ്രഹിക്കാവുന്നതാണല്ലോ. ഭാഷയെപ്പോലെതന്നെ തുലോം ശ്ലാഘനീയമാണു് ഇതിലെ സാങ്കേതികസംജ്ഞാനിൎമ്മാണയുക്തിയും. യുക്തിഭാ

ഷാകൎത്താവ്, വൃത്തഭാഗത്തിൻെറ ഏതാനുമൊരുഭാഗത്തിന്നു 'ചാപം (arc, bow) എന്നും ചാപമൂലാഗ്രങ്ങളുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള ഋജുരേഖയ്ക്കു ജ്യാ (chord, bow-string)വെന്നും ജ്യാമദ്ധ്യത്തിൽനിന്നു ചാപമദ്ധ്യാവധിയായ രേഖയ്ക്കുശര(one of the two segments into which the chord divides the diameter perpendicular to it, arrow)മെന്നും നാമകരണം ചെയ്തിരിക്കുന്നതു് എത്രത്തോളം അന്വൎത്ഥമായിരിക്കുന്നുവെന്നു നോക്കുക. ഇതുപോലെതന്നെ മററു സംജ്ഞകളുടെ കാൎയ്യത്തിലും കാണാവുന്നതാണ്.

ഇനി രണ്ടു വാക്കു പറയുവാനുള്ളതു് ഇതിൻെറ വ്യാഖ്യാനത്തെക്കുറിച്ചാകുന്നു. മാടരാജവംശം ശാസ്ത്രപാണ്ഡിത്യത്തിനു പണ്ടേയ്ക്കുപണ്ടേ പ്രസിദ്ധിപെററതാണ്. ആ വംശത്തിലെ സമാദരണീയമായ സാത്വികദീപ്തിയോടുകൂടിയ ഒരു മണിദീപമാണ് മഹാമഹിമശ്രീ രാമവൎമ്മ മരുത്തമ്പുരാൻ ബി. എ., തിരുമനസ്സുകൊണ്ടു്. ശൈവ്വാണീഹൈമവതിമാരാൽ പരിസേവിതനും ശാസ്ത്രമതിയുമായ തിരുമനസ്സിലെ ഏതാനും നാളത്തെ നിസ്തന്ദ്രമായ പരിശ്രമത്തിൻെറ പരിണതഫലമാണ് കേരളീയരായ നമുക്കു് ഇന്നു ലഭിച്ചിട്ടുള്ള ഈ യുക്തിഭാഷാ വ്യാഖ്യാനം. തിരുമനസ്സുകൊണ്ടു ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രവിഷയകമായി വേറേയും പല വിലപിടിച്ച ലേഖനങ്ങളും എഴുതീട്ടുണ്ടു്. അവയിൽ, 1120_ൽ "ഗണിതഗവേഷകന്മാരുടെ ശ്രദ്ധയ്ക്കു്" എന്ന പേരിൽ മലയാളത്തിലും 1121_ൽ "The Date and Authorship of Karana Paddhati" എന്ന പേരിൽ ഇംഗ്ലീഷിലും അവിടുന്നു് എഴുതി പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തീട്ടുള്ള ലേഖനങ്ങൾ വിജ്ഞാനവാരിധിയായ ഉള്ളൂരിൻെറ പ്രശംസയ്ക്കുകൂടി പാത്രമായിത്തീൎന്നവയാണെന്നു മാത്രം സ്ഥാലീപുലാകന്യായേന ഇവിടെ പ്രസ്താവിച്ചുകൊള്ളട്ടെ. തിരുമനസ്സിലെ വ്യാഖ്യാനപരമായ ഈ മഹദ്യത്നമാകട്ടെ അവിടുത്തെ ശാസ്ത്രപാണ്ഡിത്യത്തിൻെറ മറെറാരു നിദൎശനമാകുന്നു. ഈ ഉദ്യമത്തിൽ പലരും പല വിധത്തിലും തിരുമനസ്സിലെപേരിൽ സഹായിച്ചിട്ടുണ്ടെങ്കിലും ആദ്യന്തം വലംകൈയായിനിന്നു സഹായിച്ച ഒരേ ഒരു വ്യക്തി ഗണിതശാസ്ത്രവിചക്ഷണനനായ ബ്രഹ്മശ്രീ എ. ആർ. അഖിലേശ്വരയ്യർ, എം. എ. എൽ. ടി., അവർകളാകുന്നു. അദ്ദേഹത്തിൻെറ കൂട്ടുകെട്ടുകൊണ്ട് അഥവാ അദ്ദേഹത്തിൻെറ തീക്ഷ്ണബുദ്ധിയാകുന്ന ശാണോപലത്തോടുള്ള സമ്പൎക്കംകൊണ്ടു് ഈ വ്യാഖ്യാനരത്നം കൂടുതൽ ആകൎഷകവും കൂടുതൽ പ്രകാശമാനവും ആയിത്തീൎന്നിട്ടുണ്ടെ

ന്നുള്ളതിൽ രണ്ടുപക്ഷമില്ല. രണ്ടുപേരുടേയും കൂടിയുള്ള ഈ മഹൽ പ്രയത്നം ഉദ്ദിഷ്ടഫലപ്രാപ്തിയിലായിട്ടുണ്ടെന്ന് ഏതു നിഷ്പക്ഷനിരീക്ഷകനും സമ്മതിക്കും. പാശ്ചാത്യഗണിതഗവേഷകവിദഗ്ദ്ധന്മാരുടെ സിദ്ധാന്തങ്ങളെ 'യുക്തിഭാഷ'യുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തി നോക്കുക, വിവരണങ്ങൾ വിഷയഗ്രഹണത്തിനു പര്യാപ്തങ്ങളാകുന്നില്ലെന്നു തോന്നുന്ന ഘട്ടങ്ങളിൽ പരിലേഖങ്ങൾ കൊടുക്കുക, അതുകൊണ്ടും മതിയാവാത്ത സ്ഥലങ്ങളിൽ ചുവടെ ഇംഗ്ലീഷിൽ "ഫുട്ട്നോട്ട്" ചേർക്കുക എന്നിങ്ങനെ ദുർഗ്രഹങ്ങളായ യുക്തികളെ സുഗ്രഹമാക്കിത്തീർക്കുന്നതിന് എന്തെല്ലാം ചെയ്യാമോ അതെല്ലാം ഇതിൽ ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. യുക്തിഭാഷയിൽ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ള സാങ്കേതിക സംജ്ഞകളുടെ ഒരു പട്ടിക അകാരാദിക്രമത്തിൽ തുല്യാർത്ഥപ്രസിദ്ധങ്ങളായ ഇംഗ്ലീഷ്പദങ്ങളോടുകൂടി പുസ്തകത്തിന്റെ ഒടുവിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതും "കുട്ടാകാരക്രിയ"യ്ക്ക് ഒരു പ്രത്യേക വിവരണം നൽകിട്ടുള്ളതും മററും വ്യാഖ്യാനത്തിന്റെ സമീചീനമായ സുഗ്രാഹ്യതയ്ക്കുവേണ്ടി വ്യാഖ്യാതാക്കന്മാർ സഹിച്ച ബുദ്ധിമുട്ടുകളുടെ സജീവചിത്രങ്ങളാകുന്നു. വ്യാഖ്യാതാക്കന്മാരുടെ ഈ അത്യുദാരകൃത്യത്തിനു ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രത്തിൽ കൈകാര്യംചെയ്യുന്നവർ മാത്രമല്ല പൊതുവിൽ കേരളീയരെല്ലാവരുംതന്നെ എന്നെന്നും കൃതജ്ഞരായിരിക്കേണ്ടതാണ്.

ഇത്രത്തോളം സമുൽകൃഷ്ടമായ വ്യാഖ്യാനത്തോടുകൂടിയ ഈ മഹൽഗ്രന്ഥത്തെ മഹാജനസമക്ഷം അവതരിപ്പിക്കുക എന്ന മഹനീയകൃത്യത്തിനു കൂടുതൽ അർഹതയും യോഗ്യതയും തികഞ്ഞ പലരും ഇന്നു കേരളത്തിലുണ്ട്. അവരെ ആരേയും ഏല്പിക്കാതെ, വ്യാഖ്യാതാക്കന്മാരിൽ പ്രാതഃസ്മരണീയനായ തമ്പുരാൻതിരുമനസ്സുകൊണ്ട്, ആ ഭാരം ഇയ്യുള്ളവനോടു നിർവ്വഹിക്കുവാൻ കല്പിച്ചതു് എന്തുദ്ദേശത്തിന്മേലാണെന്ന് എത്ര ആലോചിച്ചിട്ടും കിട്ടുന്നില്ല. ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രസമുദ്രത്തിന്റെ അപാരതയിലും ഗംഭീരതയിലും അത്ഭുതസ്തിമിതനായി പരിഭ്രാന്തനായി അതിന്റെ ഇങ്ങേക്കരയിൽ വെറുതെ കണ്ണുംമിഴിച്ചു നില്ക്കുവാൻ മാത്രം പോന്ന ഞാൻ തമ്പുരാൻ കല്പിച്ചതനുസരിച്ചു ചിലതെല്ലാം എഴുതിക്കൂട്ടിയെന്നേയുള്ളൂ. വിഷയങ്ങളുടെ ഉള്ളിൽ കടന്നു നിന്നുകൊണ്ടുള്ള ചർച്ചയ്ക്കു ഞാൻ തുനിഞ്ഞിട്ടില്ല. അഥവാ, അതിനുള്ള ശേഷി ഇയ്യുള്ളവനില്ലതന്നെ. ചുരുക്കത്തിൽ എനിക്കൊന്നു പ്രാർത്ഥിക്കുവാനുള്ളതു് ഇതു മാത്രമാണ്. "ഗണിതകലയുടെ ഏതു വശവും യുക്തിപൂർവ്വം സ്പർശിച്ചുകൊണ്ട് വിരാജിക്കുന്ന ഈ യുക്തിഭാ

ഷാഗ്രന്ഥം, ഏതദ്വ്യാഖ്യാനസഹിതം, നമ്മുടെ ഹൈസ്കൂളുകളിലും കോളേജുകളിലും, ഒരു പാഠ്യപുസ്തകമായിട്ടല്ലെങ്കിൽ പാഠ്യപുസ്തക നിർമ്മാതാക്കൾക്കൊരു മാർഗ്ഗദർശകഗ്രന്ഥമായിട്ടെങ്കിലും അചിരേണ പ്രവേശിക്കുമാറാകട്ടെ; തദ്വാരാ, പാശ്ചാത്യരെ അപേക്ഷിച്ചു ഭാരതീയർ, വിശിഷ്യ കേരളീയർ, ഗണിതമാർഗ്ഗത്തിൽ എത്ര ദൂരം മുന്നേറി നിന്നിരുന്നു എന്ന വാസ്തവം ജനസാമാന്യം ഗ്രഹിക്കുമാറാകട്ടെ.” ഈ പ്രാർത്ഥനയോടെ വ്യാഖ്യാനത്തിനും വ്യാഖ്യാതാക്കന്മാർക്കും സർവ്വഭാവി ഭാവുകങ്ങളും ആശംസിച്ചുകൊണ്ട്, ഈ ഗ്രന്ഥതല്ലജത്തെ ഞാനിതാ സജ്ജനസമക്ഷം സാദരം അവതരിപ്പിച്ചുകൊള്ളുന്നു.

ചാലക്കുടി,
1—4—1123. } **പണ്ഡിതർ, പി. ശ്രീധരമേനോൻ.**

യുക്തിഭാഷാ വിഷയാനുക്രമണികാ

അദ്ധ്യായം	വിഷയം	പുറം
ഒന്നാമദ്ധ്യായം: പരികർമ്മാഷ്ടകം		**൧—൩൧**
	അഭീഷ്ടദേവതാനമസ്കാരം	൧
	സംഖ്യാസ്വരൂപം	൧
	സംകലിതവ്യവകലിതങ്ങൾ	൩
	സാമാന്യഗുണനം	൪
	ഖണ്ഡഗുണനം	൫
	ഗുണനത്തിങ്കൽ ചില വിശേഷങ്ങൾ	൮
	ഹരണം	൧൫
	വർഗ്ഗം	൧൫
	വർഗ്ഗമൂലം	൨൭
	വർഗ്ഗയോഗമൂലവും വർഗ്ഗാന്തരമൂലവും	൨൮
രണ്ടാമദ്ധ്യായം: ദശപ്രശ്നോത്തരം		**൩൨—൩൫**
മൂന്നാമദ്ധ്യായം: ഭിന്നഗണിതം		**൩൬—൪൪**
	സവർണ്ണനവും സംകലിതവ്യവകലിതങ്ങളും	൩൬
	അംശഗുണനം	൩൮
	അംശഭാഗഹരണം	൪൧
	സച്ഛേദരാശിയുടെ വർഗ്ഗവും മൂലവും	൪൪
നാലാമദ്ധ്യായം: ത്രൈരാശികം		**൪൫—൪൯**
	വ്യസ്തത്രൈരാശികം	൪൭-൪൮
അഞ്ചാമദ്ധ്യായം: കുട്ടാകാരം		**൫൦—൭൨**
	അഹർഗ്ഗണാനയനം	൫൦
	മദ്ധ്യമാനയനം	൫൪
	അപവർത്തനവും കുട്ടാകാരവും	൫൪
ആറാമദ്ധ്യായം: പരിധിവ്യാസപ്രകരണം		**൭൨—൧൪൨**
	ഭുജാകോടി വർഗ്ഗയോഗം	
	കർണ്ണവർഗ്ഗമെന്ന ന്യായം	൭൨
	ചതുരശ്രത്തെക്കൊണ്ടു വൃത്തത്തെ ഉണ്ടാക്കും പ്രകാരം	൭൪
	വർഗ്ഗമൂലക്രിയകൾ കൂടാതെ ഇഷ്ടവ്യാസത്തിന്നു പരിധി ഉണ്ടാക്കും പ്രകാരം	൯൪

അദ്ധ്യായം	വിഷയം	പുറം
	സമഘാതസംകലിതാനയനോപായം	൯൯
	സംകലിതങ്ങൾ	൧൦൫
	(എ) മൂലസംകലിതം	൧൦൫
	(ബി) വർഗ്ഗസംകലിതം	൧൦൭
	(സി) വർഗ്ഗസംകലിതാദി	൧൦൯
	സംകലിതാനയനസാമാന്യന്യായം	൧൧൦
	ആദ്യദ്വിതീയാദിസംകലിതങ്ങൾ	൧൧൧
	ചാപീകരണം	൧൧൩
	പ്രകാരാന്തരേണ പരിധ്യാനയനം	൧൧൬
	പരിധ്യാനയനത്തിങ്കൽ ക്രിയാലാഘവത്തിന്നാവശ്യമായ സംസ്കാരം	൧൨൦
	പരിധ്യാനയനപ്രകാരാന്തരങ്ങൾ	൧൩൪
ഏഴാമദ്ധ്യായം: ജ്യാനയനപ്രകാരം		**൧൪൩—൨൯൦**
	വൃത്താന്തർഗ്ഗതഷഡശ്രബാഹുവ്യാസാർദ്ധതുല്യമെന്നന്യായം	൧൪൩
	ജ്യാശരവർഗ്ഗയോഗമൂലംകൊണ്ടു ജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം	൧൪൭
	സാങ്കേതികസംജ്ഞകളും നിർവ്വചനങ്ങളും	൧൫൦
	പഠിതജ്യാക്കളെ സൂക്ഷ്മമായിട്ടു വരുത്തുംപ്രകാരം	൧൬൦
	ജ്യാനയനപ്രകാരം	
	ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലെ ജ്യാനയനപ്രകാരം	൧൬൫
	ഖണ്ഡങ്ങളേയും ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളേയും വരുത്തുംപ്രകാരം	൧൭൩
	ഖണ്ഡാന്തരയോഗവും ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതാദിയും ഇഷ്ടജ്യാശരവും	൧൭൬
	ഖണ്ഡജ്യായോഗംകൊണ്ടു ഇഷ്ടജ്യാനയനം	൧൮൧
	പ്രായികപരിധിയെ സൂക്ഷ്മമാക്കുംപ്രകാരം	൧൯൮
	ജ്യാവർഗ്ഗാനയനം	൨൦൩
	"ജീവേ പരസ്പര"ന്യായവും തദ്വാരാ ജ്യാക്കളെ വരുത്തുംപ്രകാരവും	൨൦൬
	വ്യാസാർദ്ധംകൂടാതെ ജ്യാക്കളെവരുത്തുംപ്രകാരം	
	ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രന്യായം	൨൨൨
	ചതുരശ്രക്ഷേത്രന്യായം	൨൨൪
	വൃത്താന്തർഗ്ഗതചതുരശ്രക്ഷേത്രകർണ്ണാനയനം	൨൨൮
	"ജീവേ പരസ്പര"ന്യായത്തിന്റെ ഉപപത്തി	൨൩൭
	ജീവാനയനം	൨൪൦

അദ്ധ്യായം	വിഷയം	പുറം
	ലംബാനയനത്തിന്റെ ഉപപത്തി	൨൮൩
	വൃത്താന്തൎഗ്ഗതചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലാനയനം	൨൮൧
	ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവൎഗ്ഗാനയനം	൨൯൮
	ശരാനയനം	൨൧൨
	ഛായാനയനം	൨൧൬
	ഗോളപൃഷ്ഠക്ഷേത്രഫലാനയനം	൨൧൭
	ഗോളഘനക്ഷേത്രഫലാനയനം	൨൭൨

അനുബന്ധം (കുട്ടാകാരക്രിയ)

നിരഗ്രകുട്ടാകാരം	i
സാഗ്രകുട്ടാകാരം	xvii
കുട്ടാകാരങ്ങളുടെ ഉപയോഗങ്ങൾ	xxvi
Kuttakaram-its bearing on the Rule of Three, Indeterminate equations and continued fractions	xLi
ചില "സിദ്ധന്യായങ്ങൾ"	Lxiii
സാങ്കേതിക പദങ്ങളുടെ പട്ടിക	

ശുദ്ധിപത്രം

പുറം (ഭാഗം)	വരി	അശുദ്ധം	ശുദ്ധം
൯	൨൧	ഗുണിപ്പതാകിൽ	ഗുണിച്ചതാകിൽ
൧൧	൭	എന്നു	എന്നും
൧൪	൧൮	സധതനി	സധയനി
,,	൨൩	ഗുണങ്ങൾ ഗുണ്യതമ്മിൽ	ഗുണഗുണ്യങ്ങൾ തങ്ങളിൽ
൧൫	൧൪	ളഞ്ഞു്	ളഞ്ഞു
൧൭	൧൦	ക്രബാദേവവർഗ്ഗഃ	ക്രമാദേവവർഗ്ഗഃ
,,	൨൦	സംഖ്യയെയാണാ	സംഖ്യയെയാണോ
൨൦	൨	കൂട്ടു	കൂട്ടി
൨൫	൧൭	ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗം ഒന്നു്	ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗം ഒന്നിൽനിന്നു ശൂന്യവർഗ്ഗമായ ശൂന്യത്തെ കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ഒന്നു്
൨൮	൨൨	വാങ്ങുക. അവിടെ	വാങ്ങുക അവിടെ
൩൩	൧൨	ത്യ	ത്യ
൩൬	൭	സംദ്ദ	സദ്ദ
,,	൧൨	താൽ	താൻ
൩൭	൩൨	വണ്ണമൊത്തിരിക്കും. ആകയാൽ	വണ്ണമൊത്തിരിക്കും. ആകയാൽ യോഗാന്തരങ്ങൾക്ക യോഗ്യങ്ങളായിട്ടുവരും. ആകയാൽ
൪൦	൨൦	തയോരച്ഛേദ	തദ്യോരച്ഛേദ
൪൪	൬	സമച്ഛേദ	സച്ഛേദ
,,	൧൧	സമച്ഛേദ	സച്ഛേദ
൪൮	൨൬	ധീമതാ	ധീമതാ
൫൭	൧൨	ജ്ജു്	ഭഗണത്തിങ്കൽ ജ്ജു്.
൭൮	൩൨	$\frac{OY.YA}{OY+YA}$	$\frac{OY.YA}{OY+OA}$
൮൧	൩൦	AB_2	$AB_2{}^2$
൮൯	൨൯	$\therefore$ സന $=\frac{\text{കിര.ഠകി}}{\text{ക}_2}$	$\therefore$ സന $=\frac{\text{സര.ഠകി}}{\text{ക}_2}$
൯൨	൨൧	ഹരിച്ചട്ടിക്കു	ഹരിച്ചുകൂട്ടി
,,	൨൭	നടേത്തേതാകുന്ന	നടേത്തേതാകുന്നതു
൯൭	൨൫	$\frac{\text{ഖ.ഖ}_3}{\text{ക}_1{}^2}$	$\frac{\text{ഖ.വ}^2}{\text{ക}_1{}^2}$
൯൯	൧	$\frac{1}{\text{വ}^4}(1^4+2^6+\ldots$	$\frac{1}{\text{വ}^4}(1^4+2^4+\ldots\ldots$
,,	൫	$1^6+2^6+2^6+\ldots\ldots$	$1^6+2^6+3^6+\ldots\ldots$
൧൧൦	൧൦	$1^2.\text{വ}+3^2.\text{വ}+3^2\ldots\ldots$	$1^2,\ \text{വ}+2^2,\ \text{വ}+3^2\ldots$

ശുദ്ധിപത്രം

പുറം (ഭാഗം)	വരി	അബദ്ധം	സുബദ്ധം
൯	൨൧	ഗുണിപ്പതാകിൽ	ഗുണിച്ചതാകിൽ
൧൧	൭	എന്നു	എന്നും
൧൪	൧൫	സധതനി	സധയനി
,,	൨൩	ഗുണങ്ങൾ ഗുണ്യതമ്മിൽ	ഗുണഗുണ്യങ്ങൾ തങ്ങളിൽ
൧൮	൧൪	ളഞ്ഞു്	ളഞ്ഞു
൧൭	൧൦	ക്രമാദേവവമ്മൂഹഃ	ക്രമാദേവമ്മൂഹഃ
,,	൨൦	സംഖ്യയെയാണം	സംഖ്യയെയാണൊ
൨൦	൨	കൂട്ടു	കൂട്ടി
൨൮	൧൭	ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗം ഒന്നു്	ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗം ഒന്നിൽനിന്നു ശൂന്യവർഗ്ഗമായ ശൂന്യത്തെ കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ഒന്നു്
൨൫	൨൨	വാങ്ങുക. അവിടെ	വാങ്ങുക അവിടെ
൩൩	൧൨	ത്യ	ത്യ
൩൬	൭	സംഉ	സഉ
,,	൧൨	താൽ	താൻ
൩൭	൩൨	വണ്ണമൊത്തിരിക്കും. ആകയാൽ	വണ്ണമൊത്തിരിക്കും. ആകയാൽ യോഗാന്തരങ്ങൾക്കു യോഗ്യങ്ങളായിട്ടുവരും. ആകയാൽ
൪൦	൨൦	തയോശ്ച്ഛേദ	തയോശ്ഛേദ
൪൪	൬	സമച്ഛേദ	സച്ഛേദ
,,	൧൧	സമച്ഛേദ	സച്ഛേദ
൪൫	൨൬	ധികതാ	ധീമതാ
൮൭	൧൨	ജ്ഞു്	മഗണത്തിങ്കൽ ജ്ഞു്.
൭൫	൩൨	$\frac{OY.YA}{OY+YA}$	$\frac{OY.YA}{OY+OA}$
൫൧	൩൦	AB_2	$AB_2{}^2$
൫൯	൨൯	$\therefore$ സന $=\frac{\text{കിര.ഠകി}}{\text{ക}_2}$	$\therefore$ സന $=\frac{\text{സര.ഠകി}}{\text{ക}_2}$
൯൨	൨൧	ഛരിച്ചട്ടിക്കു	ഛരിച്ചുകൂട്ടി
,,	൨൭	നടേത്തേതാകുന്ന	നടേത്തേതാകുന്നതു
൯൬	൨൮	$\frac{\text{ഖ.ഖ}_2}{\text{ക}_1{}^2}$	$\frac{\text{ഖ.വ}^2}{\text{ക}_1{}^2}$
൯൯	൧	$\frac{1}{\text{വ}^4}(1^4+2^6+\ldots$	$\frac{1}{\text{വ}^4}(1^4+2^4+\ldots\ldots$
,,	൮	$1^6+2^6+2^6+\ldots\ldots$	$1^6+2^6+3^6+\ldots\ldots$
൧൧൦	൧൦	$1^2.\text{വ}+3^2.\text{വ}+3^2\ldots\ldots$	$1^2.\ \text{വ}+2^2.\ \text{വ}+3^2\ldots$

പുറം (ഭാഗം)	വരി	അശുദ്ധം	ശുദ്ധം
൧൧൪	൨൪,൨൫	For arc tan $t \leq$	For arc $t \leq$
൧൨൩	൨൦	എണ്ണിങ്ങനെ	എന്നിങ്ങനെ
൧൨൪	൧൪	$\lvert 2^{\circ} \rvert 2^{\circ} \rvert$	$\lvert 2 \rvert 2^{\circ} \rvert$
൧൨൫	൩	ഒരവ്യക്തിരാശി	ഒരവ്യക്തരാശി
൧൨൬	൨൧	നടേത്തെ സംസ്കാര	നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകത്തിങ്കലെ അംശം പിന്നെ വിഷമസംഖ്യയും രണ്ടാംസംസ്കാര
൧൨൯	൨൫	സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലാംശത്തേക്കാൾ	സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലാംശയോഗത്തേക്കാൾ
൧൩൫	൨൪	ഇരട്ടിച്ചതനെ സംസ്കാരഹരകം	ഇരട്ടിച്ചതിനെ സംസ്കാരഹാരകം
൧൩൬	൧	ഭുാദി	ഭ്യാദി
൧൩൮	൫	ഇവിടെ എല്ലാം	ഇവിടെ ആദ്യത്തേതിൽ എല്ലാം

<table>
<tr><td>൧൩൯</td><td>൨</td><td>$\dfrac{1}{(2൦+2)+\left(\dfrac{2}{1+൦^2+2൦+5}\right)}$</td><td>$\dfrac{1}{(2൦+2)\times\left(1+\dfrac{1}{൦^2+2൦+5}\right)}$</td></tr>
<tr><td>൧൪൪</td><td>൩൩</td><td>നിയമം</td><td>നിയതം</td></tr>
<tr><td>൧൪൬</td><td>൧൩</td><td>വൃത്തഷൾ ഭാഗമെല്ലാം</td><td>വൃത്തഷൾഭാഗമാണെല്ലോ</td></tr>
<tr><td>൧൫൨</td><td>൨൩</td><td>യോഗത്തോളമുള്ളവ. ചാപഖ.</td><td>യോഗത്തോളമുള്ളവ ചാപഖണ്ഡാ</td></tr>
<tr><td>൧൫൪</td><td>൧൦</td><td>രാവും</td><td>മാവും</td></tr>
<tr><td>൧൫൮</td><td>൧൦</td><td>ശരഖണ്ഡങ്ങൾ മബ്ബ$_5$</td><td>ശരഖണ്ഡങ്ങൾ. മബ്ബ$_5$</td></tr>
<tr><td>൧൫൯</td><td>൨൬</td><td>ഭുജാകോടി ഖണ്ഡത്തളെ</td><td>ഭുജാകോടി ഖണ്ഡങ്ങളെ</td></tr>
<tr><td>൧൬൨</td><td>൨൦</td><td>സംസ്കരിപ്പ</td><td>സംസ്കരിപ്പൂ</td></tr>
<tr><td>,,</td><td>൩൨</td><td>ആദ്യഭുജയുടെ</td><td>അല്പ ചാപഭുജയുടെ</td></tr>
<tr><td>൧൬൯</td><td>൨൨</td><td>$\dfrac{13571}{2ച}$</td><td>$\dfrac{13751}{2ച}$</td></tr>
<tr><td>൧൭൨</td><td>൫</td><td>"നിത"</td><td>"നീത"</td></tr>
<tr><td>൧൭൭</td><td>൧൮</td><td>ആദ്യപിണ്ഡ</td><td>ആദ്യഖണ്ഡ</td></tr>
<tr><td>൧൮൧</td><td>൯</td><td>പിണ്ഡജ്യായോഗ</td><td>ഖണ്ഡജ്യായോഗ</td></tr>
<tr><td>,,</td><td>൧൦</td><td>പിണ്ഡജ്യായോഗ</td><td>ഖണ്ഡജ്യായോഗ</td></tr>
<tr><td>,,</td><td>൧൮</td><td>സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം</td><td>ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം</td></tr>
<tr><td>,,</td><td>൨൧</td><td>പിണ്ഡജ്യായോഗത്തെ</td><td>ഖണ്ഡജ്യായോഗത്തെ</td></tr>
<tr><td>൧൮൩</td><td>൧൨</td><td>ജ്യാക്കൾ എന്നു കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ പിന്നെ ഇസ്സംഖ്യകളുടെ</td><td>ജ്യാക്കൾ എന്നു കല്പിപ്പൂ. ഇവിടെയും പിന്നെ ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കൽ എത്ര ഇലി ഉള്ള അത്ര ചാപഖണ്ഡമുള്ള എന്നു കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ പിന്നെ ഇസ്സംഖ്യകളുടെ</td></tr>
<tr><td>൧൮൩</td><td>൧൫</td><td>ഇത ഇലി</td><td>ഒരു ഇലി</td></tr>
</table>

പുറം ഭാഗം	വരി	അബദ്ധം	സുബദ്ധം
൧൮൪	൨൩, ൨൪, ൨൫	$\int_0^x x$	$\int_0^x xdx$
,,	൨൪	Second samkalitam of $x=\int_0^x\int x=\int_0^x\frac{x}{1\times 2}$	Second samkalitam of $x=\int_0^x\frac{x^2dx}{1\times 2}$
൧൮൫	൧	ഹരിക്കേണ്ടു. എന്നിട്ടു	ഹരിക്കേവേണ്ടു. എന്നാൽ ഫലം സൂക്ഷ്മമായിട്ടിരിക്കും. എന്നിട്ടു
൧൯൨	൭	ബ$_1$, ബ, ബ$_3$	ബ$_1$, ബ$_2$, ബ$_3$
,,	൧൨	∴ ബ — 1ബ$_{ച}$	∴ ബ$_1$ — ബ$_{ച}$
൧൯൩	൨൬	വന്നു	വരും
൨൦൦	൨൦	പകരം ഇഷ്ടവ്യാസ	പകരം ഇഷ്ടവ്യാസവർഗ്ഗത്തെ ഉപയോഗിക്കണമെന്നിവിടെ വിശേഷമാകുന്നു. ഇഷ്ടവ്യാസ
൨൦൮	൬	വിസ്തൃതി	വിസ്തൃതി
,,	൩൦	$^{\circ}m\pm n$	$^{\circ}m\mp n$
൨൦൯	൧	രണ്ടിനേയും ത്രിജ്യകൊണ്ടു	രണ്ടിനേയും വെവ്വേറെ ത്രിജ്യകൊണ്ടു
൨൧൫	൮	ഖബ	ലബ
൨൧൬	൧൨	എണിട്ടു	എന്നിട്ടു
൨൨൮	൨൨	ഇൗ രണ്ടു	ഇൗരണ്ടു
,,	൨൮	വ്യാസാൎദ്ധരേഖയുടെ	വ്യാസരേഖയുടെ
൨൩൦	൫	വ്യാസരേഖയിങ്കന്നി	വ്യാസരേഖയിങ്കന്നു
,,	൩൧	ളുണ്	ളുണി
൨൩൧	൧	ഭുയാമ്യഗ്രത്തോടു	ഭുയാമ്യാഗ്രത്തോടു
൨൩൭	൧൨	ദ്വിതീയജാഗ്രത്തിങ്കൽ	ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ
൨൩൮	൧	മുപിൽ	മുമ്പിൽ
൨൪൦	൧൭	$\therefore oA_2\times T_3M_2=A_2M_2\times oT_3\times oM_2$	$\therefore oA_2\times T_3M_2=A_2M_2\times oT_3+A_2T_3\times oM_2$
൨൪൩	൧൬	ഇതിങ്കലുടെ	ഇതിങ്കലു
൨൫൨	൧൦	സ്ഥൂത്യാജ്യാ	സ്പഷ്ടജ്യാ
൨൫൫	൧൩	ംർഗ്ഗ	വർഗ്ഗ
,,	൧൪	ബുഹുഘാതാൎദ്ധത്തിൽ	ബാഹുഘാതാൎദ്ധത്തിൽ
൨൬൧	൫	ബ$_1$ + ബ$_3$^{2}	ബ$_1$^{2} + ബ$_3$^{2}
൨൬൪	൮	സർവ്വദേ	സർവ്വദാ
൨൬൬	൧൮	ഇവിദെ	ഇവിടെ

പുറം ഭാഗം	വരി	അബദ്ധം	സുബദ്ധം
൧൭൦	൨൧	$\left(\frac{ബ_I}{2}\right)^I$	$\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2$
൧൭൦	൨൩	[ല^2×{	[ല^2+{
൧൭൪	൨൩	ത്ര്യശ്രത്തികൽ	ത്ര്യശ്രത്തിങ്കൽ
൧൭൭	൨൯	(ഗത—ഗര)^2	(ഗത—ഗര)^2
൧൭൮	൧—൩	ഈ വരികളുടെ ഇടയിൽ 'ഗോളപൃഷ്ഠക്ഷേത്രഫലാനയനം' എന്ന തലക്കെട്ടു ചേൎക്കണം.	
,,	൩൦	$\sqrt{\{1+\sqrt{\frac{4p^2}{(x-y)^2-(b-c)^2}}\}}$	$\sqrt{\{1+\frac{4p^2}{(x-y)^2-(b-c)^2}\}}$
൧൮൨	൨൭	എന്നതിനെ ഥട മാറ്റേണ്ണ	എന്നതിനെ ഥധ മാറ്റേണ്ണ
൧൮൩	പരിലേഖം 59	$rd\epsilon$	$rd\theta$
,,	,,	B	θ
൧൮൫	൨	തുല്യങ്ങ	തുല്യഖണ്ഡങ്ങ
൧൮൮	൪	ഈ രണ്ടു	ഈരണ്ടു
൧൯൦	൫	വ്യാസം—വ്യാസം—3)=3	വ്യാസം—(വ്യാസം—3)=3

അനുബന്ധം

iii	21, 25,	സോപാൎശ്വത്തെ	സോപാൎശ്വപത്തെ
vi	23	ചാപശരം	ചാപശോരി
x	3	അല്പശേഷം 2ഹാരകമാകുന്ന	അല്പശേഷം 2ഹാരകശേഷമാകുന്ന
xi	29	ഗുഘകാരം=23	ഗുണകാരം=23
xv	2	ഫലം 60−16=44	ഫലം=60—16=44
	3	മദ്ധ്യത്തിങ്കലെ	മദ്ധ്യമത്തിങ്കലെ

ക്രിയചെയ്തിട്ടുള്ള ഫലങ്ങൾ:

xxx		6-ാംകോഷ്ഠം തലക്കെട്ടിൽ: ശേഷംകൊണ്ടുകിട്ടിയ അന്തരകലി	ശേഷംകൊണ്ടുകിട്ടിയ അന്തരകല
xxxiv	36	സൂക്ഷ്മമദ്ധ്യമം=(2−12−57−55)—(18−3—24—31)	സൂക്ഷ്മമദ്ധ്യമം=(2−12−57−58)—(8—3—24—31)
xxxvi		4-ാംകോഷ്ഠം തലക്കെട്ടിൽ. വി. ഇ. വി. ത.	തി. ഇ. വി. ത.
,,		5-ാംകോഷ്ഠം ഒടുവിലത്തെ വരി. 2—25—46—15—40—13	2—25—46—15—40—31
,,		8-ാംകോഷ്ഠം 9-ാംവരി. 0—0—22—35	0—0—29—35
xxxvii	29	ചഗുണിതസൂൎയ്യരാഹുഭോഗേണ	ചിഗുണിതസൂൎയ്യരാഹുഭോഗേണ
xxxix	13	ഭജയേയും	ഭുജയേയും
,,	37	(6−9−33−27)×(4−6−59—13)	(6−9−33−27)+(4−6−59−13)
xl	32	ഉണ്ടാക്കാം	ഊഹിക്കാം.

യുക്തിഭാഷാ

യുക്തിഭാഷാ

ഒന്നാമദ്ധ്യായം

പരികർമ്മാഷ്ടകം

|| ഹരിഃ ശ്രീ ഗണപതയേ നമഃ അവിഘ്നമസ്തു ||

പ്രത്യൂഹവ്യൂഹവിഹതികാരകം പരമം മഹഃ |
അന്തഃകരണശുദ്ധിം മേ വിദധാതു സനാതനം ||

ഗുരുപാദാംബുജം നത്വാ നമസ്കാര്യതമം മയാ |
ലിഖ്യതേ ഗണിതം കൃത്സ്നം ഗ്രഹഗത്യുപയോഗി യൽ * ||

സംഖ്യാസ്വരൂപം

അവിടെ നടേ തന്ത്രസംഗ്രഹത്തെ അനുസരിച്ചുനിന്നു ഗ്രഹഗതിയിങ്കൽ ഉപയോഗമുള്ള ഗണിതങ്ങളെ മുഴുവനേ ചൊല്ലുവാൻ തുടങ്ങുന്നേടത്തു നടേ സാമാന്യഗണിതങ്ങളായിരിക്കുന്ന സങ്കലിതാദിപരികർമ്മങ്ങളെച്ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ ഗണിതമാകുന്നതു ചില സംഖ്യേയങ്ങളിലെ സംഖ്യാവിഷയമായിട്ടിരിപ്പോരു പരാമർശവിശേഷം†. സം

---

* ഗ്രന്ഥാരംഭത്തിൽ വിഘ്നശാന്തിക്കായിക്കൊണ്ട് അഭീഷ്ടദേവതാനമസ്കാരത്തെ ചെയ്യുകയും ഗ്രന്ഥോദ്ദേശത്തെ പറയുകയും ചെയ്യുന്നു.

"ഗുരുപാദാംബുജദ്വന്ദ്വം നമസ്കാര്യതമം മയാ |
നത്വാ വിലിഖ്യതേ കൃത്സ്നഗണിതന്യായസംഗ്രഹഃ" ||

എന്നു രണ്ടാമത്തെ ശ്ലോകത്തിന്നൊരു പാഠഭേദവുമുണ്ട്.

† സംഖ്യേയങ്ങൾ എന്ന പദത്തിന്നു സംഖ്യാനം ചെയ്യുവാൻ യോഗ്യങ്ങളായവ—എണ്ണുവാൻ സാദ്ധ്യമായിട്ടുള്ളവ—എന്നർത്ഥം. സംഖ്യേയങ്ങളിലുള്ളതായിട്ടു ശാസ്ത്രകാരന്മാർ സ്വീകരിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ധർമ്മം അല്ലെങ്കിൽ ഒരു വസ്തുവാണ് സംഖ്യ. പരാമർശവിശേഷം എന്നതിന്ന് ഒരു പ്രത്യേകതരത്തിൽ ചർച്ചചെയ്യൽ എന്നർത്ഥം. ചില സംഖ്യേയങ്ങളിലെ ധർമ്മമായ സംഖ്യകളെ വിഷയീകരിച്ചുള്ള ഒരുതരം ചർച്ചചെയ്യുന്നതാണ് ഗണിതം.

ചില സംഖ്യാവിശേഷങ്ങൾ ഗണിതത്തിന്നു സാധനമാകുന്നു. ഈ സംഖ്യാവിശേഷങ്ങൾക്കു ചില സ്ഥാനവിശേഷങ്ങളെ കല്പിച്ചാൽ മാത്രമേ വ്യവഹാരക്ഷമത്വമുണ്ടാവൂ.

"ഏകപങ്ക്തിശതാദീനാം ദശഘ്നാനാം യഥോത്തരം |
സ്ഥാനാനി ദക്ഷിണാദീനി ന്യസ്യേൽ സവ്യാവധീനി ച" ||

എന്നു സ്ഥാനകല്പനത്തെയും ശാസ്ത്രകാരന്മാർ വ്യവഹാരാർത്ഥമായി കല്പിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഖ്യകൾ പിന്നെ ഒന്നുതുടങ്ങി പത്തോളമുള്ളവ പ്രകൃതികൾ‖ എന്നപോലെ ഇരിക്കും. ഇവറ്റെ പ്രത്യേകം പത്തിൽ പെരുക്കി നൂറോളമുള്ളവ. ഇവറ്റിന്റെ വികൃതികൾ എന്നപോലെ ഇരിക്കും. ഒന്നുതുടങ്ങിയുള്ളവറ്റിന്റെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്ന് ഒരു സ്ഥാനം കേറീട്ടിരിപ്പൂതും ചെയ്യും ഇവറ്റെ പത്തിൽ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്നവറ്റിന്റെ സ്ഥാനം. പിന്നെ ഇവ§ പ്രകൃതികൾ എന്നപോലെയിരുന്നിട്ട് ഇവറ്റിന്റെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്ന് ഒരു സ്ഥാനം കേറിയിരിക്കും ഇവറ്റെ പത്തിൽ പെരുക്കിയവ ആയിരത്തോളമുള്ള സംഖ്യകൾ. ഇങ്ങനെ അതാതിനെ പത്തിൽ പത്തിൽ ഗുണിച്ചവ പിന്നെ പിന്നത്തെ സംഖ്യകളാകുന്നവ. അവറ്റിന് ഒരോരോ സ്ഥാനംകൊണ്ട് ഉൽകർഷവുമുണ്ട്. ഇങ്ങനെയിരിക്കുന്നവ പതിനെട്ടു സ്ഥാനത്തിങ്കലേവറ്റിന്നുള്ള സംജ്ഞകൾ ഇവ.

"ഏകദശശതസഹസ്രായുതലക്ഷപ്രയുതകോടയഃ ക്രമശഃ |
അർബ്ബുദമബ്ജം* ഖർവ്വനിഖർവ്വമഹാപത്മശംകവസ്തസ്മാൽ ‖
ജലധിശ്ചാന്ത്യം മദ്ധ്യം പരാർദ്ധമിതി ദശഗുണോത്തരാസ്സംജ്ഞാഃ |
സംഖ്യായാ സ്ഥാനാനാം വ്യവഹാരാർത്ഥം കൃതാഃ പൂർവ്വൈഃ" ‖ ഇതി.

ഇങ്ങനെ സംഖ്യയ്ക്കു ഗുണനവും സ്ഥാനഭേദവും കല്പിയായ്കിൽ സംഖ്യേടേപക്ക് അവസാനമില്ലായ്കയാൽ സംഖ്യകൾ തങ്ങളേയും അവറ്റിന്റെ ക്രമത്തേയും അറിഞ്ഞുകൂടാ. എന്നിട്ടു വ്യവഹാരത്തിന്നായിക്കൊണ്ട് ഇവ്വണ്ണം കല്പിപ്പൂ. അവിടെ ഒന്നുതുടങ്ങി ഒമ്പതോളമുള്ള സംഖ്യ

‖ പ്രകൃതി വികൃതി—പാൽ തൈരിന്റെ പ്രകൃതിയാണ്. തൈരു മോരിന്റെ പ്രകൃതിയാണ്. തൈരു പാലിന്റെ വികൃതിയും, മോരു തൈരിന്റെ വികൃതിയുമാണ്. അതായതു് ഒരു വസ്തു അതിന്റെ സ്വതയുള്ള രൂപത്തെ ഉപേക്ഷിച്ച (താർക്കികന്മാർ ഇതിനു നാശമെന്നു പറയുന്നു) മറ്റൊരു രൂപത്തെ സ്വീകരിക്കുന്നേടത്തു് ആദ്യത്തെ രൂപത്തോടുകൂടിയതിനെ പ്രകൃതിയെന്നും രണ്ടാമത്തെ രൂപത്തോടുകൂടിയതിനെ ആദ്യത്തേതിന്റെ വികൃതിയെന്നും പറയുന്നു. എന്നാൽ ഒരു പൂമാലയിൽ പൂവു് അതിന്റെ രൂപത്തെ തീരെ ഉപേക്ഷിക്കുന്നില്ലെങ്കിലും പൂവിനെ പ്രകൃതി എന്നും മാലയെ അതിന്റെ വികൃതിയെന്നും സാധാരണയായിട്ടു പറയാറുണ്ടു്. ഇതുപോലെ തന്നെ ഒന്നുമുതൽ പത്തുവരെയുള്ള സംഖ്യകൾ അവിടുന്നു നൂറുവരെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ അവയുടെ രൂപത്തെ തീരെ ഉപേക്ഷിക്കുന്നില്ലെങ്കിലും, ഒന്നുമുതൽ പത്തുവരെയുള്ള സംഖ്യകളെ പ്രകൃതികളെന്നു കല്പിച്ചാൽ പത്തുമുതൽ നൂറുവരെയുള്ള സംഖ്യകളെ അവയുടെ വികൃതികളെന്നു പറയാം. ശാസ്ത്രകാരന്മാർ ഇതു സമ്മതിക്കുന്നതല്ല. അതുകൊണ്ടാണു് "പ്രകൃതികൾ എന്നപോലെ ഇരിക്കും" "വികൃതികൾ എന്നപോലെ ഇരിക്കും" എന്നെല്ലാം ഗ്രന്ഥകർത്താവു പ്രയോഗിച്ചിരിക്കുന്നതു്.

§ പത്തുമുതൽ നൂറുവരെയുള്ളവ.

* 'അബ്ജമർബ്ബുദം' എന്നു പാഠഭേദം.

കൾക്ക സ്ഥാനം നടേത്തേത്. പിന്നെ ഇവററെ എല്ലാററെയും പത്തിൽ ഗുണിച്ചവററിന്റെ സ്ഥാനം രണ്ടാമത്. അത് ഇടത്തു കല്പിക്കുന്നു. ഏകസ്ഥാനം, ദശസ്ഥാനം എന്നിങ്ങനെ തുടങ്ങി ഇവററിന്റെ പേര്. ഇങ്ങനെ സംഖ്യാസ്വരൂപം.

അനന്തരം ഇവററെക്കൊണ്ടുള്ള ഗണിതഭേദങ്ങളെ കാട്ടുന്നു. അവിടെ രണ്ടുപ്രകാരമുള്ളൂ ഗണിതം — വൃദ്ധിസ്വരൂപമായിട്ടും ക്ഷയസ്വരൂപമായിട്ടും. അവിടെ വൃദ്ധിക്കു സ്ഥാനമാകുന്ന ഗണിതം, **യോഗം, ഗുണനം, വർഗ്ഗം, ഘനം,** എന്നിവ പിന്നെ ക്ഷയത്തിന്നു സ്ഥാനമാകുന്നതു **വിയോഗം, ഹരണം, വർഗ്ഗമൂലം, ഘനമൂലം** എന്നിവ. ഇവിടെ യോഗത്തിന്നു ഗുണനത്തിങ്കലുപയോഗമുണ്ട്; ഗുണനത്തിന്നു വർഗ്ഗത്തിങ്കൽ, വർഗ്ഗത്തിന്നു ഘനത്തിങ്കൽ. ഇവ്വണ്ണമേ വിയോഗത്തിന്നു ഹരണത്തിങ്കലുപയോഗമുണ്ട്; ഹരണത്തിന്നു വർഗ്ഗമൂലത്തിങ്കൽ, വർഗ്ഗമൂലത്തിന്നു ഘനമൂലത്തിങ്കൽ. ഇങ്ങനെ മുമ്പിലേവ പിന്നേത്തവററിലുപയോഗിക്കും.

സംകലിതവ്യവകലിതങ്ങൾ

അനന്തരം ഈ ഉപയോഗപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു. അവിടെ ഒരു സംഖ്യയിൽ രൂപം ക്രമേണ കൂട്ടിയാൽ അതിങ്കന്നുതുടങ്ങി നിരന്തരേണ ഉള്ള മേലെ മേലെ സംഖ്യകളായിട്ടു വരുമവ. പിന്നെ ഒരേറിയ സംഖ്യയിങ്കന്ന് ഓരോന്നിനെ ക്രമേണ കളയുക എന്നിരിക്കുമ്പോൾ അതിങ്കന്നു തുടങ്ങി നിരന്തരേണ കീഴെ കീഴെ സംഖ്യകളായിട്ടു വരും. എന്നിങ്ങനെ എല്ലാസ്സംഖ്യകൾ തങ്ങളുടെ സ്വരൂപം ഇരിക്കുന്നു. അവിടെ ഒരിഷ്ടസംഖ്യയിങ്കന്നു ക്രമേണ മേലെ മേലെ സംഖ്യകളെ ഓക്കുമ്പോൾ ക്രമേണ ഓരോ സംഖ്യകളുടെ യോഗരൂപമായിട്ടിരിക്കും അത്. പിന്നെ ഇഷ്ടത്തിങ്കന്നു തന്നെ ക്രമേണ കീഴെ കീഴെ സംഖ്യകളെ ഓക്കുമ്പോൾ ക്രമേണ ഓരോരൊ സംഖ്യേടെ വിയോഗരൂപമായിട്ടിരിക്കുംസ്സംഖ്യകൾ. എന്നാൽ സംഖ്യാസ്വരൂപത്തെ ക്രമേണ മേല്പോട്ടും കീഴ്പോട്ടും ഓക്കുമ്പോൾ തന്നെ ഓരോരൊ സംഖ്യേടെ യോഗവിയോഗങ്ങൾ സിദ്ധിക്കും. പിന്നെ ആയിഷ്ടസംഖ്യയിൽ ഒന്നിനെ എത്ര ആവൃത്തി കൂട്ടുവാൻ നിനച്ചു അത്ര ഒന്നിനെ വേറെ ഒരേടത്തു കൂട്ടി അതിനെ ഒരിക്കാലെ ഇഷ്ടസംഖ്യയിൽ കൂട്ടൂ. എന്നാലും വെവ്വേറെ കൂട്ടിയപോലെ സംഖ്യതന്നെ വരും. എന്നിത്തും ഓക്കുമ്പോൾ അറിയായിട്ടിരിക്കും. അവ്വണ്ണം എത്ര ആവൃത്തി ഒന്നിനെ കളവാൻ നിനച്ചു അവററെ ഒക്ക ഒരിക്കാലെ കളകിലും ഇഷ്ടത്തിങ്കന്ന്

അത്ര കീഴെ സംഖ്യ വരും എന്നും അറിയാം. ആകയാൽ മേല്പോട്ടും കീഴ്പോട്ടുമുള്ള എണ്ണം അറിയപ്പോകുമെങ്കിൽ യോഗവിയോഗങ്ങൾ സിദ്ധിക്കും. ഈ യോഗവിയോഗങ്ങളെ **സംകലിതവ്യവകലിത**ങ്ങൾ എന്നു ചൊല്ലുന്നു. ഒന്നിനെ **രൂപ**മെന്നും **വ്യക്തി**യെന്നും ചൊല്ലുന്നു. ഇങ്ങനെ സംകലിതവ്യവകലിതങ്ങൾ.*

സാമാന്യഗുണനം

അനന്തരം ഗുണനം:—അതാകുന്നതു സംകലിതംതന്നെയത്രെ ആകുമ്പോൾ||. അവിടെ ഒന്നിനെ ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ യാതൊന്നിനെ ഗുണിക്കുന്നു അതിന്നു **ഗുണ്യ**മെന്നു പേർ; യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നു അതിന്നു **ഗുണകാര**മെന്നു പേർ. അവിടെ ഗുണ്യത്തിൽ കൂട്ടുന്നു, ഗുണ്യത്തെത്തന്നെ കൂട്ടുന്നതും. എന്നു വിശേഷമാകുന്നതു്. അവിടെ ഗുണകാരത്തിങ്കൽ എത്ര സംഖ്യാവ്യക്തികളുള്ളു അത്ര ആവൃത്തി ഗുണ്യത്തെ കൂട്ടുന്നതും. എന്നീ നിയമത്തോടുകൂടിയുള്ള യോഗം ഗുണനമാകുന്നതു്. ഇതിനെ കാട്ടുന്നു.

ഇവിടെ ഗുണ്യത്തിന്റെ ഒടുക്കത്തെ സ്ഥാനത്തെ ഗുണകാരംകൊണ്ടു നടേ ഗുണിക്കേണ്ടൂ. എന്നാൽ ഗുണിച്ച സംഖ്യകളും ഗുണിയാത്ത സംഖ്യകളും തങ്ങളിൽ കൂടുകയില്ല എന്നൊരെളുപ്പമുണ്ടു്. അവിടെ ഗുണ്യത്തിന്റെ ഒടുക്കത്തെ സ്ഥാനത്തു് ഒരു സംഖ്യ$ ഉണ്ടു് എന്നിരിപ്പൂ. അതിനെ നൂറുകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ടൂ എന്നും കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ ആ ഒന്നിനെ നൂററിൽ ആവൎത്തിക്കേണം. അവിടെ അതിനെ പത്തിൽ ആവൎത്തിക്കുമ്പോൾ ദശസ്ഥാനത്തു് ഒന്നു കരേറും മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു്. പിന്നെയും ഒരിക്കൽ ആ ഒന്നിനെ പത്തിൽ ആവൎത്തിക്കുമ്പോൾ ദശസ്ഥാനത്തു രണ്ടുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ നൂറുവട്ടം ആവൎത്തിക്കുമ്പോൾ ശതസ്ഥാനത്തു് ഒന്നുണ്ടാകും. ആകയാൽ ഗുണകാരത്തിങ്കൽ ശതസ്ഥാനത്തു് ഒരു സംഖ്യയുണ്ടായ്കിൽ ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ അവിടുന്നു ശതസ്ഥാനത്തുവെയ്പ്പൂ. എന്നാൽ അതിനെ നൂററിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടുവരും. അ

---

* ആദ്യസ്ഥാനാൽ സമാരഭ്യ കൎയ്യാൽ യോഗാന്തരേ ക്രമാൽ ।
രാശേരല്പതരസ്യാന്ത്യസ്ഥാനാദ്വൽക്രമതോഽപി വാ ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

|| ഗുണ്യം=8, ഗുണകാരം=5 എന്നു കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, ഗുണ്യമാകുന്ന 8-നെ തന്നെ ഗുണകാരമാകുന്ന അഞ്ചാവൃത്തി കൂട്ടിയാൽ, 8+8+8+8+8=40 എന്നു വരും. അപ്പോൾ യോഗത്തിന്റെ പ്രകാരാന്തരം തന്നെ ഗുണനമെന്നു വന്നു.

$ 'ഒരു സംഖ്യ' എന്നതിന്നു് ഒന്നു് അല്ലെങ്കിൽ രൂപമെന്നൎത്ഥം.

പ്പോൾ ഗുണ്യത്തിങ്കൽ കീഴ ചില സംഖ്യയുണ്ടെന്നു കല്പിക്കേണ്ടാ. ആ ന്നേരത്തു് അവറെറക്കൊണ്ടുപയോഗമില്ല, എന്നിട്ടു്. അവ്വണ്ണമാകു മ്പോൾ ഗുണ്യത്തിൻെറ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിനു നേരെ ആദ്യസ്ഥാനം വരുമാറു ഗുണകാരത്തെ വെയ്പ്പൂ. പിന്നെ ഗുണ്യത്തിൻെറ അന്ത്യ സ്ഥാനത്തെ ഗുണകാരത്തിൻെറ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്നുനേരെ വെ യ്പ്പൂ, ഗുണകാരാന്ത്യസ്ഥാനത്തിങ്കൽ ഒന്നു സംഖ്യ എന്നുകിൽ. അ വിടെ സംഖ്യ രണ്ടെങ്കിൽ ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ രണ്ടിൽ ആവൎത്തി ച്ചിട്ടു വെയ്പ്പൂ. അപ്പോൾ ഗുണകാരത്തിൻെറ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചൂതായി. പിന്നെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തു് അടുത്തു കീഴേ തിന്നു് ഉപാന്ത്യമെന്നു പേർ. ഇങ്ങനെ ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തിങ്കൽ എ ത്ര ഗുണകാരത്തിന്നു സംഖ്യ ഉള്ളൂ ആ സ്ഥാനത്തു് അത്രയിലാവൎത്തി ച്ചിട്ടു വെയ്പ്പൂ ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ. എന്നാലതിനെക്കൊണ്ടു ഗു ണിച്ചൂതായി. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരത്തിൻെറ ആദ്യസ്ഥാനത്തോളമുള്ള വറെറക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു് അതതിൻെറ സ്ഥാനത്തു നേരെ വെയ്പ്പൂ ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനസംഖ്യയെ. എന്നാൽ ഗുണ്യത്തിൻെറ അന്ത്യസ്ഥാ നത്തെ ഗുണകാരസ്ഥാനങ്ങൾ എല്ലാംകൊണ്ടും ഗുണിച്ചൂതായിട്ടു വ രും. അവിടെ ഗുണകാരത്തിൻെറ യാതൊരു സ്ഥാനത്തു സംഖ്യയില്ലാ യ്കയാൽ അവിടം ശൂന്യസ്ഥാനമാകുന്നു, അതിന്നുനേരെ ശൂന്യത്തെ വെയ്ക്കേണ്ടൂ. മറേറ സ്ഥാനങ്ങളിലെ സംഖ്യകൾ കരേറി ഉണ്ടാകുമ ത്രെ അവിടെ സംഖ്യ. പിന്നെ ഗുണ്യത്തിൻെറ ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തി ന്നുനേരെ ഏകസ്ഥാനം വരുമാറു വെയ്പ്പൂ ഗുണകാരത്തെ. അതിനേ യും ഇവ്വണ്ണം ഗുണിപ്പൂ. ഇവ്വണ്ണം ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനത്തോളവും. അ പ്പോൾ ഗുണ്യത്തെ മുഴുവനും ഗുണിച്ചൂതായി.*

പിന്നെ ഇവ്വണ്ണമാകിലുമാം ഗുണനപ്രകാരം. ഗുണ്യത്തിൻെറ ഓരോ സ്ഥാനങ്ങളിലെ സംഖ്യയെ വേറെ എടുത്തുകൊണ്ടു ഗുണകാ രത്തെ ഇവ്വണ്ണം ഗുണിച്ചു് അതതു സ്ഥാനമാദിയായിട്ടു കൂട്ടി ഒരുമി ച്ചുകൊള്ളൂ എന്നാകിലുമാം. അവിടെ അന്ത്യസ്ഥാനം തുടങ്ങൂ എന്നു

---

* ഗുണ്യാന്തിമപദോൽപസ്ഥം ഗുണകാദ്യം യഥാ തഥാ ।
ന്യസ്യാഥ ഗുണകാരസ്യ യാ യാ സംഖ്യാ പദേ പദേ ॥

ഗുണ്യാന്ത്യാംകം തയാവൃത്താം ന്യസേത്തത്തൽ പദാദധഃ ।
അപസാൎയ്യ ഗുണം തദുപാന്ത്യാദീംശ്ച താഡയേൽ ॥ (തന്ത്രസംഗ്രവ്യാ.)

ഈ ക്രിയ സ്ഥാനനിയമത്തെ അനുസരിച്ചു കവടികൊണ്ടു ചെയ്യാവുന്നതു ന്നെ. ഇവിടെ ഗുണ്യം=647; ഗുണകാരം=234.

ള്ള നിയമം വേണ്ടാ. സംഖ്യകൾ കലരുകയില്ല അപ്പോൾ, എന്നിട്ട്. ഗുണ്യത്തെ എന്നവണ്ണം ഗുണകാരത്തെ ഖണ്ഡിച്ചു ഗുണിക്കിലുമാം. അവിടെ ഗുണകാരത്തിന്നു മൂന്നുസ്ഥാനം എന്നിരിപ്പൂ. ഇരുനൂററിമുപ്പത്തിനാല് എന്നിരിപ്പൂ സംഖ്യ. അതിനെ ഖണ്ഡിപ്പൂ മൂന്നായിട്ട്. അവിടെ ഒന്നു് ഇരുനൂറ്, ഒന്നു മുപ്പത്, ഒന്നു നാല് ഇങ്ങനെ മൂന്നു ഗുണകാരം എന്നു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഗുണ്യത്തെ മുഴുവനേ മൂന്നേടത്തു വെച്ച് ഇവ ഓരോന്നിറെക്കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ സ്ഥാനം പകരാതെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. ഇതും മുമ്പിലെപ്പോലെ ഗുണിച്ചതായി വരും. അവിടെ ഇരുനൂററിൽ ആവർത്തിച്ചതു് ഒന്നു്, മുപ്പതിൽ ആവർത്തിച്ചതു വേറെ ഒന്നു്, നാലിലാവർത്തിച്ചതു വേറെ ഒന്നു്. പിന്നെ ഇവ ഒക്ക കൂട്ടുമ്പോൾ ഇരുനൂററിമുപ്പത്തിനാലിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടുവരും.

അനന്തരം സ്ഥാനനിയമംകൂടാതെ മറെറാരുപ്രകാരം സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു പെരുക്കിലുമാം. അവിടെ ഒന്നു നൂറെറാരുപത്, ഒന്നു നൂററിരുപത്തിനാല് ഇങ്ങനെ താൻ ഖണ്ഡിപ്പൂ. ഇവ്വണ്ണം ഗുണ്യ

234	ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിനു മീതെ ഗുണകാരത്തിന്റെ
647	ആദ്യസ്ഥാനം വരുമാറു വെയ്ക്കുന്നു
12	ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനം × ഗുണകാരാന്ത്യസ്ഥാനം
18	ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനം × ഗുണകാരോപാന്ത്യസ്ഥാനം
138	ഇവയുടെ യോഗം
24	ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനം × ഗുണകാരാദ്യസ്ഥാനം
1404	ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യത്തെ ഗുണകാരം മുഴുവൻകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു്
234	ഗുണകാരത്തെ ഒരു സ്ഥാനം ഇറക്കിവെച്ചു
47	അന്ത്യംകളഞ്ഞ ഗുണ്യം
1404	ഗുണ്യാന്ത്യം × ഗുണകാരം
8	ഗുണ്യോപാന്ത്യം × ഗുണകാരാന്ത്യം
1484	ഗുണ്യാന്ത്യം × ഗുണകാരം + ഗുണ്യോപാന്ത്യം × ഗുണകാരാന്ത്യം
12	ഗുണ്യോപാന്ത്യം × ഗുണകാരോപാന്ത്യം
1496	ഗുണ്യാന്ത്യം × ഗുണകാരം + ഗുണ്യോപാന്ത്യം × (ഗുണകാരാന്ത്യം [+ ഗുണകാരോപാന്ത്യം)
16	ഗുണ്യോപാന്ത്യം × ഗുണകാരാദ്യം
14976	(ഗുണ്യാന്ത്യം + ഗുണ്യോപാന്ത്യം) × ഗുണകാരം
234	ഗുണകാരത്തെ ഒരു സ്ഥാനംകൂടി ഇറക്കി
7	ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യോപാന്ത്യങ്ങളെ കളഞ്ഞതു്
14976	(ഗുണ്യാന്ത്യം + ഗുണ്യോപാന്ത്യം) × ഗുണകാരം
14	ഗുണ്യാദ്യം × ഗുണകാരാന്ത്യം
15116	(ഗുണ്യാന്ത്യം + ഗുണ്യോപാന്ത്യം) × ഗുണകാരം + ഗുണ്യാദ്യം × ഗുണ[കാരാന്ത്യം
21	ഗുണ്യാദ്യം × ഗുണകാരോപാന്ത്യം
15137	(ഗുണ്യാന്ത്യം + ഗുണ്യോപാന്ത്യം) × ഗുണകാരം + ഗുണ്യാദ്യം (ഗുണ[കാരാന്ത്യം + ഗുണകാരോപാന്ത്യം)
28	ഗുണ്യാദ്യം × ഗുണകാരാദ്യം
151398	ഗുണ്യം × ഗുണകാരം

ത്തെ ആകിലുമാം. ഇങ്ങനെ രൂപവിഭാഗവും സ്ഥാനവിഭാഗവും എന്നു രണ്ടുപ്രകാരം ഖണ്ഡിക്കാം. ഇങ്ങനെ ഗുണനപ്രകാരംകൊണ്ടുതന്നെ ഖണ്ഡഗുണനപ്രകാരവുമുണ്ടാകും.¶

പിന്നെ ഇങ്ങനെ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന സംഖ്യയെ ക്ഷേത്രമായിട്ടും കല്പിക്കാം.$ എന്നാലുണ്ടു ചില എളുപ്പം. അവിടെ ക്ഷേത്രമെന്നതു സമതലമായി ചതുരശ്രമായിരിപ്പോരു പ്രദേശം. അതു നീണ്ടിട്ടിരിക്കിലുമാം സമചതുരശ്രമായിട്ടാകിലുമാം. അവിടെ ഗുണ്യം വലുതു് ഗു

¶ ഖണ്ഡയിത്വാഥവാ ഗുണ്യം ഖണ്ഡാനേതാൻ പൃഥക് പൃഥക് ।
ഗുണകേന ഹതാൻ യുഞ്ജ്യാൽ .... ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

സ്ഥാനനിയമംകൂടാതെ പ്രകാരാന്തരേണ ഗുണനത്തെ പറയുന്നു.

സ്ഥാനവിഭാഗത്തെ അനുസരിച്ചു്:

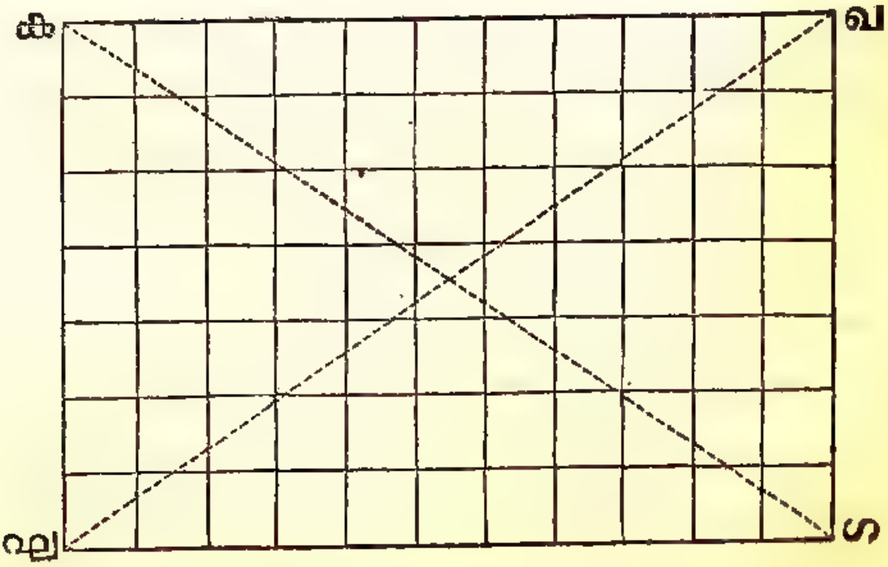
ഇവിടെ ഗുണ്യം $=647$; ഗുണകാരം $=234$.

$647\times200=129400$
$647\times\ \ 30=\ \ 19410$
$647\times\ \ \ 4=\ \ \ 2588$
$647\times234=151398$

രൂപവിഭാഗത്തെ അനുസരിച്ചു്:

$647\times110=\ \ 71170$
$647\times124=\ \ 80228$
$647\times234=151398$

$ ഗുണ്യഗുണകാരങ്ങൾ അതുല്യങ്ങളെങ്കിൽ ക്ഷേത്രം ഒരു ഘാതക്ഷേത്രമായിരിക്കും. അതു ഗുണ്യസംഖ്യയോളം നീളവും ഗുണകാരസംഖ്യയോളം ഇടവുമുള്ളതായിരിക്കും.



പരിലേഖം 1

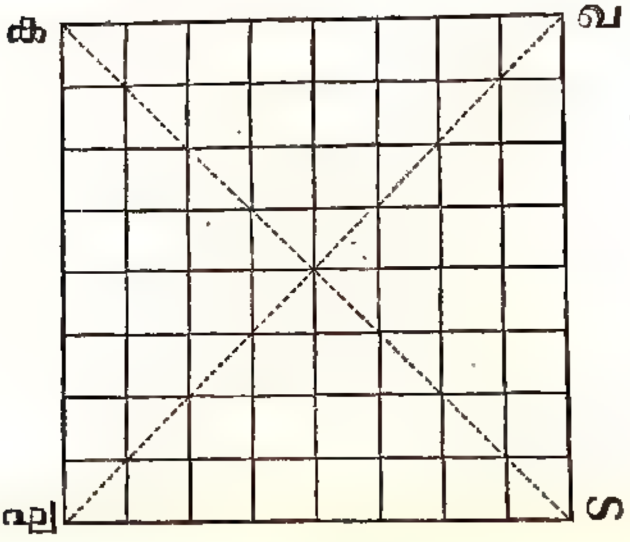
ണകാരം ചെറുത് എന്നിരിക്കുമ്പോൾ കോൽ വിരൽ എന്നിവററിലേതാനും ഒരു മാനംകൊണ്ടു ഗുണ്യസംഖ്യയോളം നീളമായി ഗുണകാരസംഖ്യയോളം ഇടമായി ഇരുന്നൊന്ന് ഈ ക്ഷേത്രമാകുന്നത് എന്നു കല്പിക്കേണ്ടുവത്. പിന്നെ ഇതിങ്കൽ കോൽമാനമാകുന്നത് എങ്കിൽ ഒരിക്കോലൊരിക്കോൽ അകലത്തിൽ നീളവും വിലങ്ങും ചില രേഖകളെ ഉണ്ടാക്കൂ. അപ്പോൾ ഒരിക്കോൽ പോന്നോ ചിലവ സമചതുരശ്രങ്ങളെക്കൊണ്ടു നിറയപ്പെട്ടിരിക്കും ഈ ക്ഷേത്രം. ഈ ഖണ്ഡങ്ങൾ പങ്ക്തികളായിട്ട് ഇരിപ്പൂതും ചെയ്യും. അവിടെ നീളത്തിലുള്ള ഓരോവരിയിൽ ഗുണ്യത്തിന്റെ സംഖ്യയോളം ഖണ്ഡങ്ങളുള്ളവ, ഗുണകാരസംഖ്യയോളം വരിയുമുള്ളവ. പിന്നെ വിലങ്ങത്തിൽ വരിയാകുന്നു എന്നു കല്പിക്കുന്നുതാകിൽ വരിയിലോരോന്നിൽ ഗുണകാരത്തോളം ഖണ്ഡങ്ങൾ ഗുണ്യസംഖ്യയോളം വരികൾ എന്നാകിലുമാം. ഈ ഖണ്ഡങ്ങൾക്കു **ക്ഷേത്രഫലം** എന്നു പേർ. ഈവണ്ണം കല്പിക്കുമ്പോൾ ക്ഷേത്രത്തിന്റെ നീളവും ഇടവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലങ്ങളുണ്ടാം എന്നുവരും. പിന്നെ ഗുണ്യത്തെക്കൊണ്ട് ആവൎത്തിച്ചിരിക്കും ഗുണകാരമെന്നും ഗുണകാരത്തെക്കൊണ്ട് ആവൎത്തിച്ചിരിക്കും ഗുണ്യമെന്നും വ്യക്തമാകും. ഗുണിതഫലത്തിങ്കൽ ഇതു സമകൎണ്ണമായിരിപ്പൊന്നു ക്ഷേത്രം. ഇവിടെ പിന്നെ ചതു

പരിലേഖം (1)ൽ ഗുണ്യം $=11$, ഗുണകാരം $=7$.

ക്ഷേത്രഫലം $=$ ആകെയുള്ള ഖണ്ഡങ്ങൾ $=77$.

ഗുണിതഫലം $=11\times7=77$.

ഗുണ്യഗുണകാരങ്ങൾ തുല്യങ്ങളാകുമ്പോൾ, ക്ഷേത്രം സമചതുരശ്രമായിരിക്കും.



പരിലേഖം (2)ൽ

ഗുണ്യം $=$ ഗുണകാരം $=8$.

ക്ഷേത്രഫലം $=64$.

ഗുണിതഫലം $8\times8=8^2=\underline{64}$.

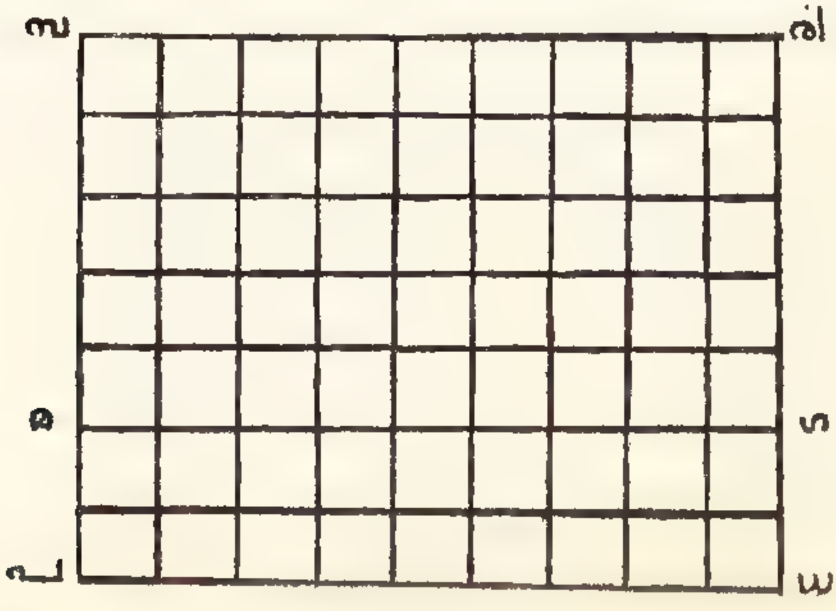
പരിലേഖം 2

രശ്രക്ഷേത്രത്തിന്റെ ഒരു കോണിൽനിന്നു തുടങ്ങി ക്ഷേത്രമദ്ധ്യേക്കൂടി മറെറ കോണിൽ സ്പൃശിക്കുന്ന സൂത്രം കണ്ണമാകുന്നതു്. ഇതിന്നു **ഘാതക്ഷേത്ര**മെന്നുപേർ. ഘാതമെന്നും സംവർഗ്ഗമെന്നും ഗുണനത്തിന്നുപേർ. പിന്നെ വർഗ്ഗത്തേയും ക്ഷേത്രരൂപേണ കല്പിക്കാം. അവിടെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രമെങ്കിൽ സമചതുരശ്രമായിട്ടേ ഇരിക്കുമത്രെ എന്നു നിയതം. ഇങ്ങനെ സാമാന്യഗുണനം.

ഗുണനത്തിങ്കൽ ചില വിശേഷങ്ങൾ

അനന്തരം ഗുണ്യത്തിങ്കത്താൻ ഗുണകാരത്തിങ്കത്താൻ ഒരിഷ്ടസംഖ്യകൂട്ടിത്താൻ കളഞ്ഞുതാൻ ഇരിക്കുന്നവററെ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചുവെങ്കിൽ കേവലങ്ങളാകുന്ന ഗുണഗുണ്യങ്ങളുടെ ഘാതത്തിങ്കന്നു് എത്ര ഏറിതാൻ കുറഞ്ഞുതാൻ ഇരിക്കുന്നു ഈ ഘാതം എന്നതിനെ അറിയുംപ്രകാരം. ഇവിടെ ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽവെച്ചു ചെറിയതിങ്കന്നു് ഒരിഷ്ടസംഖ്യയെ കളഞ്ഞിട്ടു ശേഷത്തെക്കൊണ്ടു വലിയതിനെ ഗുണിപ്പൂതാകിൽ ആ ക്ഷേത്രം അത്ര ഇടം കുറഞ്ഞിരിക്കും. ഇഷ്ടം എത്ര സംഖ്യ അത്ര വരി കുറഞ്ഞിരിക്കും. ആകയാൽ ആ ഇഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച വലിയതിനെ കൂട്ടേണം. എന്നാൽ തികയും വരി. ഇഷ്ടസംഖ്യ കൂട്ടീട്ടു് എങ്കിൽ അത്ര വരി ഏറി. എന്നിട്ടു് ഇഷ്ടംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച വലിയതിനെ കളയേണം. എന്നാൽ തികയും വരി. ഇഷ്ടസംഖ്യയെ കൂട്ടീട്ടു് എങ്കിൽ അത്ര വരി ഏറി എന്നിട്ടു്. ഈവണ്ണം വലിയതിങ്കന്നു് ഒരിഷ്ടസംഖ്യയേ കളകതാൻ കൂട്ടുകതാൻ ചെയ്തിട്ടു് ഗുണിപ്പൂതാകിൽ ഇഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ചെറിയതിനെ ഗുണിച്ചിട്ടു കൂട്ടുകതാൻ കളകതാൻ ചെയ്യേണം എന്നതു വിശേഷമല്ല. *

* യദ്വേഷ്ടോനഗുണഘ്നേത്ര ഗുണ്യമിഷ്ടാഹതം ക്ഷിപേൽ।
ഇഷ്ടാഢ്യഗുണനിഘ്നാപോ ഗുണ്യമിഷ്ടാഹതം ത്യജേൽ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)



പരിലേഖം 8.

അനന്തരം ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ ചെറിയതിൽ വലിയൊരിഷ്ടം കൂട്ടൂ; വലിയതിങ്കന്നു ചെറിയൊരിഷ്ടം കളയൂ. പിന്നെ ഇവ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചുവെങ്കിൽ അവിടെയെത്രകൂട്ടി അത്ര വരി ഏറിപ്പോയി. എത്രയുണ്ടു മറ്റേതിങ്കന്നു കളഞ്ഞതു് അത്രച്ച വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യയും കുറഞ്ഞുംപോയി. ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പൊന്നു് അക്ഷേത്രം. അവിടെ വലിയ ഗുണ്യത്തിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊരു സംഖ്യ കളഞ്ഞതു്, ചെറിയ ഗുണകാരത്തിങ്കൽ ഏറിയസംഖ്യ കൂട്ടിയതു് എന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ഇഷ്ടം പോയഗുണ്യത്തോളന്നീളമുള്ള വരികൾ ഏറിയതു്. അവിടെ പിന്നേയും ഗുണകാരത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടത്തോളം വരികൾ ഏറി. എന്നിട്ടു ഗുണകാരത്തിങ്കൽ കൂട്ടിയ ഇഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ഇഷ്ടം പോയഗുണ്യത്തെ ഗുണിച്ചിട്ടുള്ളതു് ഈ ക്ഷേത്രത്തിങ്കന്നു കളയേണം. പിന്നെ ഗുണ്യത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടത്തോളം വിലങ്ങുള്ള വരികൾ കൂട്ടേണ്ടുവതു്. ആകയാൽ കേവലഗുണകാരത്തെ ഗുണ്യത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കൂട്ടേണ്ടൂ. എന്നിങ്ങനെ സ്ഥിതമിതു്. ഈവണ്ണം ഗുണഗുണ്യ

ഗുണ്യം $=9$.

ഗുണകാരം $=5$.

ഇഷ്ടസംഖ്യ $=2$.

9×5 എന്നതിൻെറ ക്ഷേത്രം $=$ സരിഗമ. (പരിലേഖം 3)

$9\times(5+2)$ എന്നതിൻെറ ക്ഷേത്രം $=$ സരിധപ.

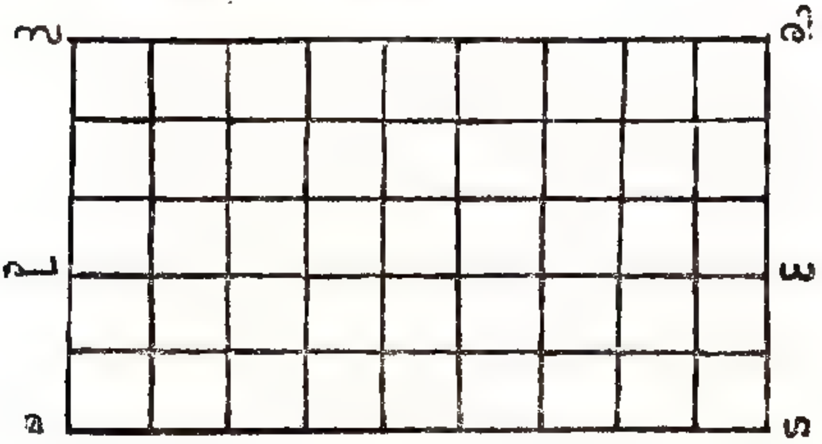
സരിഗമ $=$ സരിധപ $-$ മഗധപ.

$$9\times 5=9\times(5+2)-9\times 2.$$

ഇഷ്ടസംഖ്യയെ ഗുണകാരത്തിങ്കന്നു കളയുന്നപക്ഷം:

9×5 എന്നതിൻെറ ക്ഷേത്രം $=$ സരിഗമ. (പരിലേഖം 4)

$9\times(5-2)$ എന്നതിൻെറ ക്ഷേത്രം $=$ സരിധപ.



പരിലേഖം 4.

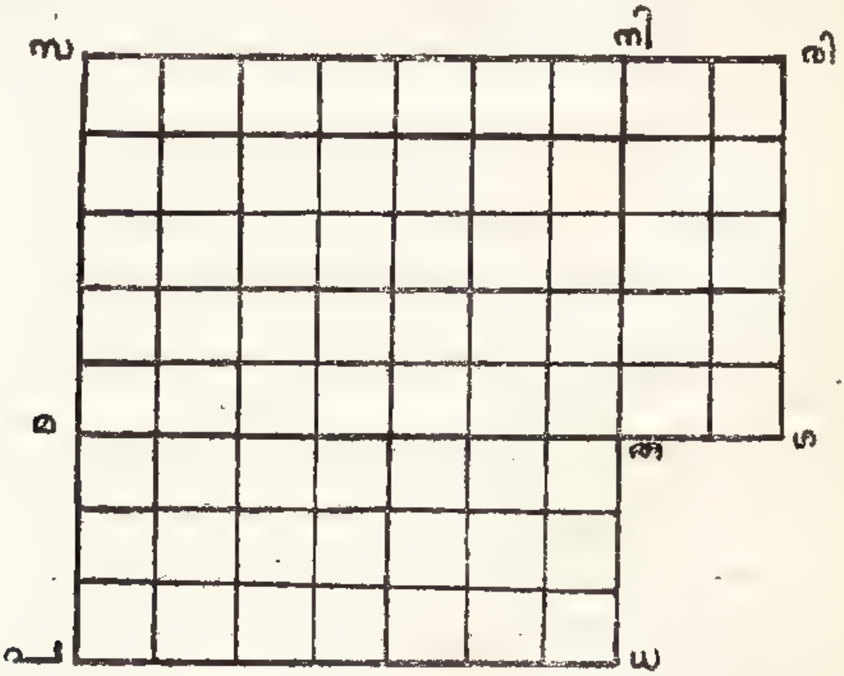
സരിഗമ $=$ സരിധപ $+$ മഗധപ.

$$9\times 5=9.(5-2)+9\times 2.$$

ങ്ങളിൽ രണ്ടിങ്കലും ഇഷ്ടത്തെ കൂട്ടുകതാൻ കളകതാൻ ചെയ്യുന്നേടത്തും ഊഹിച്ചുകൊള്ളൂ. $

അനന്തരം ഗുണകാരത്തെ ഏതാനും ഒരിഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ തന്നിൽ തന്നെ കൂട്ടി പിന്നെ അതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണ്യത്തെ ഗുണിപ്പൂ എങ്കിൽ അതിങ്കന്ന് എത്ര കളയേണ്ടു എന്ന്. അവിടെ ഗുണകാരസംഖ്യ പന്ത്രണ്ട് എന്നു കല്പിപ്പൂ. പന്ത്രണ്ടിൽ തന്നെ ഹരിച്ച ഫലം ഒന്നും കൂട്ടിയതു് എന്നു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഇതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിപ്പു ഗുണ്യത്തെ. എന്നാൽ ഗുണ്യത്തോളന്നീളമുള്ള പതിമ്മൂന്നുവരികൾ ഉണ്ടാകും. അവിടുന്ന് ഒരു വരി പോവാനായിക്കൊണ്ടു പതിമ്മൂന്നിൽ ഹരിച്ച ഫലം കളയേണ്ടുവതു്, പന്ത്രണ്ടിൽ ഹരിച്ച ഫലമല്ല. കേവലത്തിൻെറ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നു യാതൊന്ന് ഈ അംശത്തോടുകൂടിയതിങ്കന്നു പതിമ്മൂന്നാലൊന്നായിരിക്കും ഈ ഫലം. എന്നീവണ്ണം വ്യക്തമാകയാൽ യാതൊരു ഹാരകംകൊണ്ടു നടേ ഹരിച്ചു അതിൽ ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടിയതു പിന്നേയ്ക്കു ഹാരകമാകുന്നതു്. പതിമ്മൂന്നു വരിയുള്ള അംശകക്ഷേത്രത്തിങ്കന്ന് ഒരു വരി കളയേണ്ടുമ്പോൾ അതു പതിമ്മൂന്നാലൊന്നായിരിക്കും. നടേ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നുകൂട്ടീട്ടു പതിമ്മൂന്നായി. പിന്നെ പതിമ്മൂന്നാലൊന്നുകള

$ ഗുണ്യം=9; ഗുണകാരം=5; ഗുണ്യത്തിൽ കളഞ്ഞ ഇഷ്ടം=2; ഗുണകാരത്തിൽ കൂട്ടിയ ഇഷ്ടം=3.



പരിലേഖം 5.

9×5=സരിഗമ;

$(9-2) \times 5$=സനിതമ.

$(9-2) \times (5+3)$=സനിധപ.

സരിഗമ=സനിധപ+നിരിഗത−മതധപ

$9 \times 5 = (9-2)(5+3) + 2 \times 5 - 3 \times (9-2)$

ഞ്ഞാൽ പന്ത്രണ്ടു വരുന്നു, എന്നിട്ട്. പിന്നെ ഇവ്വണ്ണം പന്ത്രണ്ടാലൊന്നുകളക ചെയ്തതു പന്ത്രണ്ടിങ്കന്ന് എങ്കിൽ, പിന്നെ ശേഷത്തിങ്കന്നുള്ള പതിനൊന്നാലൊന്നു കൂട്ടിയാൽ പന്ത്രണ്ടാകുന്നു. ആകയാൽ യാതൊരു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഗുണകാരത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞുവോ, ഗുണിച്ച ഫലത്തിങ്കന്ന് അതിലൊന്നു കുറഞ്ഞ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം കൂട്ടേണം. എന്നാൽ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലം വരും. ഇങ്ങനെ ഗുണിച്ച ഫലത്തിങ്കന്നു ചൊല്ലിയ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ കൂട്ടുകതാൻ കളകതാൻ ചെയ്യാം, ഔചിത്യത്തിന്നു തക്കവണ്ണം. ഗുണിക്കുന്നതിനു മുമ്പിലെ ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ ഒന്നിങ്കന്ന് ഈയംശത്തെ ഉണ്ടാക്കി തന്നിൽതന്നെ കളയുകതാൻ കൂട്ടുകതാൻ ചെയ്കിലുമാം. എന്നാലും ഫലമൊക്കും. അവിടയ്ക്കു ഹാരകം മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയതു തന്നെ. ഒന്നു കളകതാൻ കൂട്ടുകതാൻ ചെയ്തതു മുമ്പിലെ ഹാരകത്തിൽ, അതു പിന്നെയ്ക്കു ഹാരകമാകുന്നത് എന്നു ചൊല്ലപ്പെട്ടത്. അവിടെ യാതൊരുപ്രകാരം ഗുണകാരത്തിങ്കൽ കൂട്ടിയ അംശത്തെ അതിങ്കന്നുതന്നെ കളഞ്ഞാൽ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലംവരുന്നു, അവ്വണ്ണം ഗുണ്യത്തിന്റെ ആയംശത്തെ അതിങ്കന്നു കളഞ്ഞാലും ഫലം തുല്യം. ഗുണകാരത്തിങ്കന്നുതന്നെ കളയുമ്പോൾ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന വരികൾ ഉണ്ടാവും എന്നു വരുന്നത്. ഗുണ്യത്തിങ്കന്നു കളയുന്നതാകിൽ വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യ കുറക ചെയ്യുന്നത് എന്നേ വിശേഷമുള്ളു. വാസ്തവക്ഷേത്രത്തേക്കാൾ ഇടമേറി നീളംകുറഞ്ഞു എന്നു വരുന്നതേ ഉള്ളൂ. ക്ഷേത്രഫലം തുല്യം.

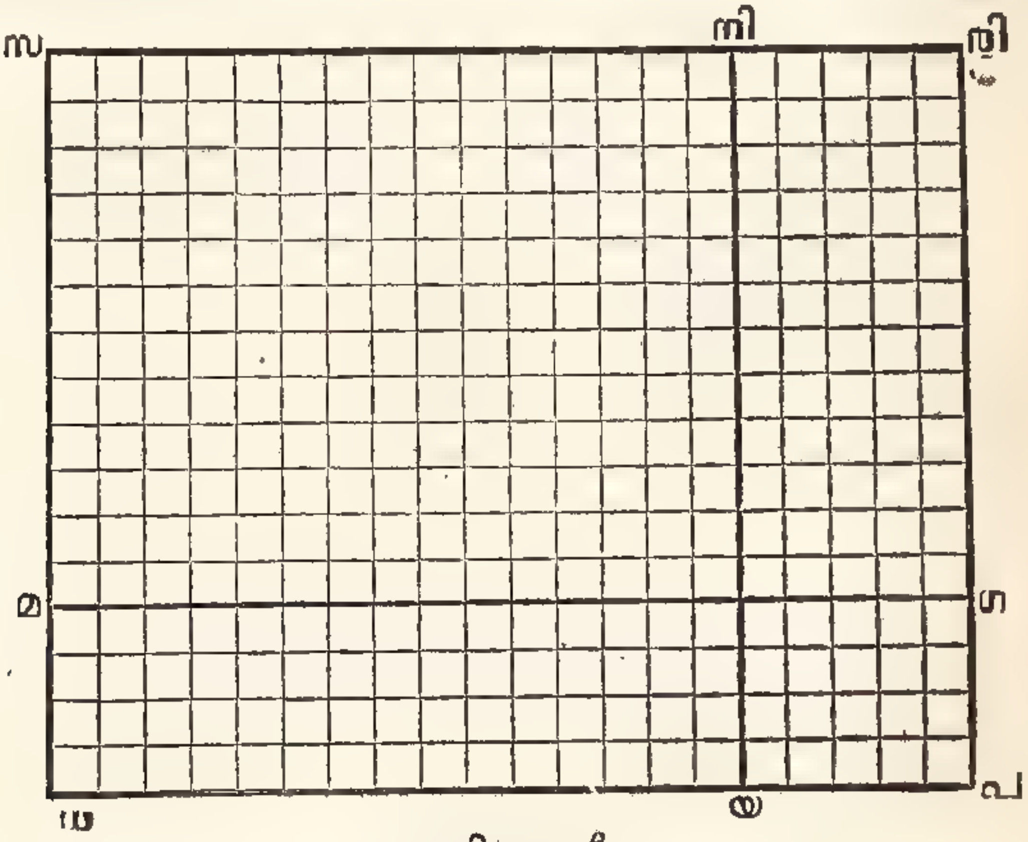
അനന്തരം ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽവെച്ചു ഗുണകാരം പന്ത്രണ്ട് എന്നു കല്പിച്ചേടത്ത് അതിനെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഹരിക്കുന്നു എന്നിരിക്കുന്ന ഫലത്തെ പിന്നെ ഏതാനുമൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു പന്ത്രണ്ടിൽകൂട്ടി എന്നിരിക്കുന്നതാകിൽ അവിടെ വിശേഷം. ഇവിടെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഹരിച്ച ഫലത്തെ അഞ്ചിൽ ഗുണിച്ചിട്ടു ഗുണകാരമാകുന്ന പന്ത്രണ്ടിൽകൂട്ടി എന്നു കല്പിക്കുന്നു. അവിടെ അഗ്ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഫലക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ പതിനേഴവരിയുണ്ടാവും. അവിടെ ഒരു വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യ ഉണ്ടാവാൻ ക്ഷേത്രഫലത്തെ പതിനേഴിൽ ഹരിക്കേണ്ടു. പിന്നെ ആ സംഖ്യയെ അഞ്ചിൽ ഗുണിച്ചിട്ട് ഉണ്ടായതിനെ മുമ്പിൽ ഉണ്ടായ ക്ഷേത്രഫലത്തിങ്കന്നു കളകവേണം, വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാവാൻ. അവിടെ നടേത്തെ ഹാരകത്തിന്റെ ഫലത്തെയെത്രകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു അഗ്ഗുണകാരത്തെ കൂട്ടിയ ഹാരകം പിന്നെയ്ക്കു ഹാരകമാകുന്നത് എന്നു വരും.

ഈവണ്ണം ഫലത്തെ കളയുന്നതാകിൽ അവിടെ ക്ഷേത്രഫലം ഏഴ് വരിയായിരിക്കും. അവിടെ ഏഴിൽ ഹരിച്ചിട്ടു വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യ ഉണ്ടാക്കേണ്ടു. ആകയാൽ അവിടെ ഫലഗുണകാരമാകുന്ന അഞ്ചിനെ കളകവേണ്ടതു പന്ത്രണ്ടിങ്കന്ന്. അതു പിന്നെയ്ക്കു ഹാരമാകുന്നതെന്നും വരും. ഗുണകാരം ഫലത്തിന്റേതു നടേത്തെ അഞ്ചു തന്നെയത്രെതാനും രണ്ടേടത്തും. എന്നിങ്ങനെ ഇപ്രകാരങ്ങളെല്ലാറേറയും അറിയുന്ന ഈ ഘാതത്തെ ക്ഷേത്രഫലമാക്കീട്ടു നിരൂപിക്കുമ്പോൾ അറിയുന്നേടത്തേയ്ക്കു എളുപ്പമുണ്ട്. *

* പരിലേഖം (6)ൽ സരി=ഗുണ്യം=20; സമ=ഗുണകാരം=12.

ക്ഷേത്രഫലം $=20\times 12=240$.

ഇവിടെ ഗുണകാരത്തിൽ അതിൽ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നിനെ നാലിൽ ഗുണിച്ചതു് (അതായതു 4) കൂട്ടുന്നു.



പരിലേഖം 6.

അപ്പോൾ സധപരി എന്ന ക്ഷേത്രം വരുന്നു.

അതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $=20\times(12+4)=320$.

സരിഗമ=സധപരി−മധപഗ.

$=320-20\times 4=240$.

നാല് പതിനാറിന്റെ എത്ര അംശമാണോ പതിനാറിന്റെ ആ അംശത്തെ പതിനാറിൽനിന്നു കളഞ്ഞു ഗുണ്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലും ഇരുപതിന്റെ ആ അംശത്തെ ഗുണ്യത്തിങ്കൽനിന്നു കളഞ്ഞു ഗുണകാരത്തെ ഗുണിച്ചാലും ഫലം തുല്യമായിരിക്കും.

$4=\frac{1}{4}\times 16.$

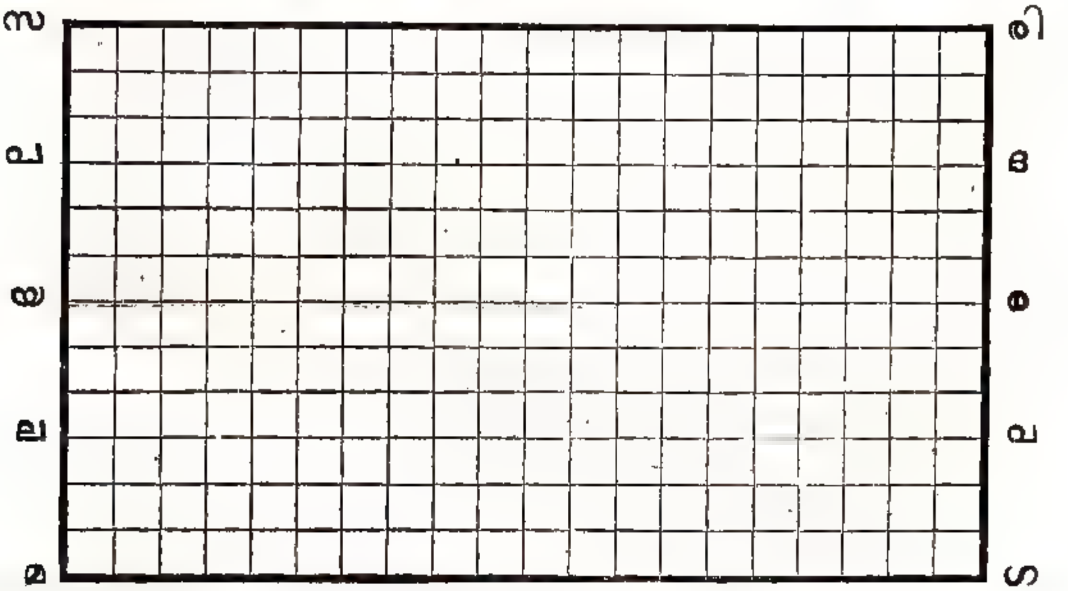
$20\times(16-\frac{1}{4}\times 16)=240=(20-\frac{1}{4}\times 20)\times 16.$

പിന്നെ പന്ത്രണ്ടു ഗുണകാരമാകുന്നേടത്ത് അപ്പന്ത്രണ്ടിനെ നാലിൽ ഹരിച്ചാൽ അപ്ഫലം മൂന്ന്. ആ മൂന്നിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ ഗുണ്യത്തെ. പിന്നെ അഗ്ഗുണിച്ചിരിക്കുന്നതിനെ തന്നെ നാലാകുന്ന ഹാരകംകൊണ്ടും ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ അതു പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടു വരും. അവിടെ നടേ ഗുണ്യത്തെ മൂന്നിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഗുണ്യം മൂന്നുവരിയായിട്ടുണ്ടാവും. പിന്നെ അതിനെ നാലിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ മുമ്മൂന്നുവരിയായിട്ടുണ്ടാകും, നാലേടത്ത്. അപ്പോൾ പന്ത്രണ്ടുവരി ഉണ്ടാകും. ആകയാൽ ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽവെച്ച് ഒന്നിനെ ഏതാനും ഒരു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മുടിയുമെങ്കിൽ ഈ ഹാരകംകൊണ്ടു ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ മറ്റേതിനെ ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ ഗുണിച്ചതിനെതന്നെ ഹരിച്ച ഫലത്തെക്കൊണ്ടും ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഇഷ്ടഗുണഗുണ്യങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടു വരും. ഇങ്ങനെ പലപ്രകാരത്തിലുള്ള ഗുണനത്തെ ചൊല്ലീതായി. *

("യാതൊരുപ്രകാരം ഗുണകാരത്തിങ്കൽ കൂട്ടിയ അംശത്തെ അതിങ്കന്നുതന്നെ കളഞ്ഞാൽ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലം വരുന്നു, അവ്വണ്ണം ഗുണ്യത്തിന്റെ ആയംശത്തെ അതിങ്കന്നുതന്നെ കളഞ്ഞാലും ഫലം തുല്യം" എന്ന വാക്യത്തിന്റെ അർത്ഥമാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.)

അതായതു ക്ഷേത്രം സരിഗമ = ക്ഷേത്രം സധതനി.

* ....യദ്വാ യേന ഹൃതോ ഗുണഃ।
ശുദ്ധ്യേത്തേന ഹതം ഗുണ്യം പുനർഹന്യാൽ ഫലേന ച॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)



പരിലേഖം 7.

ഗുണകാരത്തെ യാതൊരു സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മുടിയുന്നു അസ്സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണ്യത്തെ ഗുണിക്ക. ഇങ്ങനെ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്നതിനെ ഗുണകാരത്തെ ഹരിച്ചു കിട്ടിയ ഫലംകൊണ്ടും ഗുണിക്ക. എന്നാൽ ഗുണങ്ങൾ ഗുണ്യതമ്മിൽ ഗുണിച്ചതായി.

ഹരണം

അനന്തരം ഹരണം. അവിടെ യാതൊന്നിനെ ഹരിക്കുന്നു അതിന്നു ഹാര്യമെന്നു പേർ. യാതൊന്നിനെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നു അതിന്നു ഹാരകമെന്നു പേർ. അവിടെ ഹാര്യത്തെ ഒരു ഘാതക്ഷേത്രമെന്നു കല്പിച്ച് ഇതിന്റെ ഒരു പാശ്വത്തിന്റെ നീളം ഒരു ഹാരകസംഖ്യയോളമെന്നു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഈ ഹാരകത്തെ എത്ര ആവൃത്തികളയാം ഹാര്യത്തിങ്കൽനിന്ന് അത്രവരേ ഉണ്ട് ആ ഘാതക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ ഹാരകത്തോളം വരിയിൽ ഓരോന്നിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യ. ഇങ്ങനെ ഫലവും ഹാരകവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചിരിപ്പോരു ഘാതക്ഷേത്രം ഈ ഹാര്യമാകുന്നതു്. അവിടെ ഹാരകത്തെ ഹാര്യത്തിന്റെ ശതസ്ഥാനമാദിയായിട്ടുവെച്ചിട്ടു വാങ്ങാമെങ്കിൽ നൂറ് ആവൃത്തികളഞ്ഞതായിട്ടുവരും ഹാരകം. അവിടെ ഫലം നൂറുണ്ടായിട്ടുവരും. ശതസ്ഥാനത്ത് ഒന്നുവെക്കുമ്പോൾ അതു നൂറായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ യാതൊരിടമാദിയായിട്ടു ഹാര്യത്തിങ്കന്നു ഹാരകത്തെ കളഞ്ഞ് ആ സ്ഥാനത്തു ഫലത്തെ വെക്കേണ്ടൂ. എത്ര ആവൃത്തി അവിടന്നു കളഞ്ഞു അത്ര ഫലം ആ സ്ഥാനത്തുള്ളൂതും. ഇങ്ങനെ ആദ്യസ്ഥാനത്തോളം ഫലം ഉണ്ടാക്കൂ. എന്നിങ്ങനെ ഹരണപ്രകാരം *

വർഗ്ഗം

അനന്തരം വർഗ്ഗം. അവിടെ വർഗ്ഗമാകുന്നതു ഗുണനംതന്നെയത്രെ. ഗുണ്യവും ഗുണകാരവും സംഖ്യകൊണ്ടു തുല്യമെന്നു വിശേഷമാകുന്നതു്. ആകയാൽ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം സമചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ രണ്ടു വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യകളും തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും, ഇവിടെ. മുമ്പിൽ ഗുണനത്തെ ചൊല്ലിയേടത്തു ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ ആദ്യസ്ഥാനം വരുമാറു ഗുണകാരത്തെവെച്ചു ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഗുണകാരത്തിന്റെ അതതു സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അതതു സ്ഥാനത്തിന്റെ നേരെ വെപ്പൂ എന്നല്ലൊ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയതു്. അവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ ഗുണഗുണ്യങ്ങളുടെ സ്ഥാനയോഗത്തിങ്കന്ന് ഒന്നുപോയ സ്ഥാനസംഖ്യയിങ്കൽ ഗുണിച്ചതിനെ വെക്കേണ്ടൂ എന്നു വന്നിരിക്കും. ഇവിടെ

---

* ഹാര്യാന്ത്യസ്ഥാനതുല്യാന്ത്യം ഹാരമൂർദ്ധ്വമധോപി വാ।
ന്യസ്യ യദ്ഗുണിതോ ഹാരശ്ശുദ്ധ്യേത്തത്തദ്ഗുണം ത്യജേൽ॥
ഹാര്യതോഥ ഹരാവൃത്തിസമം ന്യസ്യേൽ ഫലം പൃഥക്।
ഹാര്യം തമപസാര്യാഥ ഹരേദേവമുദാഹൃതം॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

പിന്നെ ഗുണഗുണ്യങ്ങൾക്കു സ്ഥാനം തുല്യമാകയാൽ വൎഗ്ഗ്യസ്ഥാനത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിൽ ഒന്നു കുറഞ്ഞതു് ഒരു ഓജസ്ഥാനമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ അന്ത്യത്തെ അന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു് ഒരു ഓജസ്ഥാനത്തു വരും. അന്ത്യത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു് അതിനടുത്തു കീഴെ യുഗ്മസ്ഥാനത്തിങ്കൽ, ഉപാന്ത്യത്തെ അന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും ആ സ്ഥാനത്തുതന്നെ വരും. പിന്നെ ഉപാന്ത്യത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു് അതിനു കീഴെ ഓജസ്ഥാനത്തിങ്കൽ. ഇങ്ങനെ തുല്യസ്ഥാനങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിന്നു് ഓജസ്ഥാനമാകുന്നതു്. അതുല്യസ്ഥാനങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിന്നു യുഗ്മം. ആകയാൽ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിൻെറ വൎഗ്ഗത്തെ നേരെ ഒരിടത്തു വെയ്പൂ. **പിന്നെ വൎഗ്ഗത്തിങ്കൽ വൎഗ്ഗ്യത്തിൻെറ എല്ലാസ്ഥാനത്തേയും എല്ലാസ്ഥാനംകൊണ്ടും ഗുണിക്കേണ്ടുകയാൽ തുല്യസ്ഥാനഘാതത്തിന്നു വൎഗ്ഗമെന്നും അതുല്യസ്ഥാനങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിന്നു ഘാതമെന്നും പേർ.** എണ്ണിട്ടുപറയുന്നു ഒററപ്പെട്ടതിന്നു് ഓജമെന്നും ഇരട്ടപ്പെട്ടതിന്നു യുഗ്മമെന്നും പേർ. ഒട്ടുസംഖ്യ കൂട്ടിയതിന്നു രാശിഎന്നും പേർ. അവിടെ അന്ത്യവൎഗ്ഗംവെച്ചു് അനന്തരം ഗുണ്യത്തിൻെറ അന്ത്യവും ഗുണകാരത്തിൻെറ ഉപാന്ത്യവും പിന്നെ ഗുണ്യത്തിൻെറ ഉപാന്ത്യവും ഗുണകാരത്തിൻെറ അന്ത്യവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ സ്ഥാനവും സംഖ്യയും ഒന്നു് ആകയാൽ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഇരട്ടിച്ചു് ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഗുണിച്ചു് ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ വെയ്പൂ. അന്ത്യസ്ഥാനത്തിൻെറ വൎഗ്ഗത്തെ വെച്ചതിനടുത്തു കീഴെയിരിക്കുമതു്. പിന്നെ ഈവണ്ണംതന്നെ ഇരട്ടിച്ച അന്ത്യത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഉപാന്ത്യത്തിന്നു കീഴെസ്സംഖ്യകൾ എല്ലാറേറയും അതതിനു നേരെ കീഴെ വെയ്പൂ. പിന്നെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ കളയാം. ഗുണ്യാന്ത്യംകൊണ്ടും ഗുണകാരാന്ത്യംകൊണ്ടും ഗുണിക്കേണ്ടുവതു് ഒക്ക കഴിഞ്ഞു, എന്നിട്ടു്. പിന്നെ ഉപാന്ത്യാദിസ്ഥാനങ്ങളെ ഒക്ക ഒരു സ്ഥാനം കിഴിച്ചിട്ടു വെയ്പൂ. അപ്പോൾ മുമ്പിൽ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിൻെറ വൎഗ്ഗത്തെ യാതൊരിടത്തുവെച്ചു അതിങ്കന്നു് അടുത്തു കീഴേതിന്നു നേരെ കീഴെ ഇരിക്കും. അവിടെത്തന്നെ ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തിൻെറ വൎഗ്ഗത്തെ കൂട്ടൂ. പിന്നെ ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു് അതിനു കീഴെസ്ഥാനങ്ങളെ ഗുണിച്ചു് അതതിന്നു നേരെ കൂട്ടൂ. പിന്നെ ഉപാന്ത്യത്തെ കളവൂ. പിന്നെ ഒരു സ്ഥാനം കിഴിച്ചു് ഉപാന്ത്യത്തിന്നു കീഴെ സ്ഥാനത്തിൻെറ വൎഗ്ഗം കൂട്ടൂ. പിന്നെ ഇതിനെ ഇ

രട്ടിച്ച് അതിന്നു കീഴെ സ്ഥാനങ്ങളെ ഗുണിച്ചിട്ട് അന്നേരത്തിരിക്കുന്ന സ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ കൂട്ടൂ. പിന്നെ കിഴിച്ചിട്ടു വർഗ്ഗം. ഇങ്ങനെ സ്ഥാനമൊട്ടുങ്ങുവോളം ഇച്ചൊല്ലിയ ക്രിയയെ ചെയ്ക. ഇങ്ങനെ വർഗ്ഗമാകുന്നതു ഗുണനം തന്നെ. ഗുണനമാകുന്നതു സംകലിതംതന്നെയത്രെ എന്നോ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയല്ലൊ. എന്നാലിതും സംകലിതവിശേഷമത്രെ. ഇങ്ങനെ ഒരു പ്രകാരം വർഗ്ഗത്തെ ചൊല്ലീതായി. *

---

* സമയോസ്തു ദ്വയോരാശ്യോർഘാതോവർഗ്ഗ ഇതി സ്മൃതഃ।
അന്ത്യാംകവർഗ്ഗം ദ്വിഘ്നാന്ത്യതാഡിതാനിതരാനപി॥
സ്വസ്വോപരി ക്രമാന്ന്യസ്യേ ദന്ത്യംഹീനമധോഗതം।
ദക്ഷിണേന സമാനീയ ക്രമാദേവമ്മുഹുഃ ക്രിയാ।
ആദിമാദ്വാ സമാരഭ്യ കർത്തവ്യം സ്യാദയം വിധിഃ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഗുണ്യവും ഗുണകാരവും സമമാകുന്നിടത്തു ഫലത്തിന്നു വർഗ്ഗമെന്നു പേർ. വർഗ്ഗക്ഷേത്രം അതുകൊണ്ടു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രമായിരിക്കും.

ഒരു സ്ഥാനം മാത്രമുള്ള സംഖ്യയെ വർഗ്ഗിച്ചാൽ വർഗ്ഗത്തിൽ ഒന്നോ രണ്ടോ സ്ഥാനങ്ങളുണ്ടായിരിക്കും. $2\times 2=4$; $5\times 5=25$. രണ്ടു സ്ഥാനമുള്ള സംഖ്യയെ വർഗ്ഗിച്ചാൽ ഫലത്തിങ്കൽ മൂന്നോ നാലോ സ്ഥാനങ്ങളുണ്ടായിരിക്കും. $12\times 12=144$; $75\times 75=5625$. ഇങ്ങനെ മേല്പോട്ടു കണ്ടുകൊൾക. ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തിൽ ആദ്യസ്ഥാനമെല്ലായ്പോഴും ഫലത്തിങ്കൽ ഓരോജസ്ഥാനത്തായിട്ടിരിക്കും. അതുകൊണ്ടാണ് ഓജസ്ഥാനത്തെ വർഗ്ഗസ്ഥാനമെന്നും യുഗ്മസ്ഥാനത്തെ അവർഗ്ഗസ്ഥാനമെന്നും പറയുന്നതു്. മൂലത്തിങ്കലെ എത്രാം സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യയെയാണാ വർഗ്ഗിക്കുന്നതു് ആ സ്ഥാനസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതിൽ ഒന്നുപോയ സ്ഥാനത്തായിരിക്കും ഫലത്തിൽ ആ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തിന്റെ ആദ്യസ്ഥാനം.

$1\times 1=$	1—	വർഗ്ഗാദ്യസംഖ്യയുടെ സ്ഥാനം	$2\times 1-1=1$
$10\times 10=$	100—	... ...	$2\times 2-1=3$
$100\times 100=$	10000—	... ...	$2\times 3-1=5$

ക്രിയയുടെ യുക്തി:—മൂലത്തിലെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ സംഖ്യ ക എന്നും, ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തേതു ഖ എന്നും ആദ്യസ്ഥാനത്തേതു ഗ എന്നും കല്പിക്കുക.

അപ്പോൾ, മൂലസംഖ്യ $=100\times$ ക $+10\times$ ഖ $+$ ഗ.

വർഗ്ഗം $=$(ക $\times 100+$ ഖ $\times 10+$ ഗ) (ക $\times 100+$ ഖ $\times 10+$ ഗ)

(1) ക $\times 100\times$ ക $\times 100=$ ക$^2\times 10000$ — അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തു ക^2.
(2) ക $\times 100\times$ ഖ $\times 10$ $=$ ക.ഖ $\times 1000$ — നാലാംസ്ഥാനത്തു ക.ഖ.
(3) ക $\times 100\times$ ഗ $=$ ക.ഗ $\times 100$ — മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു ക.ഗ.
(4) ഖ $\times 10\times$ ക $\times 100$ $=$ ക.ഖ $\times 1000$ — നാലാംസ്ഥാനത്തു ക.ഖ.
(5) ഖ $\times 10\times$ ഖ $\times 10$ $=$ ഖ$^2\times 100$ — മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു ഖ^2.
(6) ഖ $\times 10\times$ ഗ $=$ ഖ.ഗ $\times 10$ — രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു ഖ.ഗ.
(7) ഗ $\times$ ക $\times 100$ $=$ ക.ഗ $\times 100$ — മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു ക.ഗ.
(8) ഗ $\times$ ഖ $\times 10$ $=$ ഖ.ഗ $\times 10$ — രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു ഖ.ഗ.
(9) ഗ $\times$ ഗ $=$ ഗ^2 — ആദ്യസ്ഥാനത്തു ഗ^2.

അനന്തരം ഇതിനെത്തന്നെ ക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ കാട്ടുന്നു. അവിടെ വർഗ്ഗമെന്നൊരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രം. ഇതിൻെറ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിൻെറ വർഗ്ഗത്തെ വെയ്ക്കുമ്പോൾ അത്രപോന്നൊരു സമചതുരശ്രമുണ്ടാകും. അതൊരുകോടിയിലുണ്ടാകും. അതും പിന്നെയിവിടെ വർഗ്ഗ്യരാശി ഖണ്ഡിച്ചിട്ടു വർഗ്ഗിക്കുമാറു കാട്ടുന്നു. അവിടെ അതിൻെറ അന്ത്യസ്ഥാനം ഒരു ഖണ്ഡം. കീഴെസ്ഥാനങ്ങൾ ഒക്ക കൂടിയതു് ഒരു ഖണ്ഡം. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരത്തേയും പിന്നെ ഗുണ്യത്തേയും ഖണ്ഡിപ്പൂ ഇവ്വണ്ണം തന്നെ. എന്നാൽ ഗുണകാരത്തിൻെറ അന്ത്യഖണ്ഡം കൊണ്ടു ഗുണ്യത്തിൻെറ അന്ത്യഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ചതു് ഒന്നു്. ഗുണ്യത്തിൻെറ ആദ്യഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ചതു രണ്ടാമതു്. പിന്നെ ഗുണകാരത്തിൻെറ ആദ്യഖണ്ഡത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണ്യത്തിൻെറ അന്ത്യഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ചതു മൂന്നാമതു്. ഇതിനെക്കൊണ്ടു് ആദ്യഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ചതു നാലാമതു്. ഇങ്ങനെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം നാലുഖണ്ഡമായിട്ടിരുന്നൊന്നു്. അവിടെ നടേത്തെ ഖണ്ഡവും നാലാമതും സമചതുരശ്രമായിട്ടിരുന്നൊന്നു്. എന്നിട്ടു് ഇവ രണ്ടും വർഗ്ഗക്ഷേത്രം. രണ്ടാമതും മൂന്നാമതും ഘാതക്ഷേത്രം. അവിടെ നൂററിഇരുപത്തിമൂന്നിൻെറ വർഗ്ഗം വേണ്ടുവതു് എന്നിരിക്കുമ്പോൾ, ശതസ്ഥാനത്തിങ്കലെ ഒന്നു് ഒരു ഖണ്ഡമാകുന്നതു്, കീഴെ സ്ഥാനങ്ങൾ രണ്ടുംകൂടി ഇരുപത്തിമൂന്നു മറേറ ഖണ്ഡമാകുന്നതു്. അവിടെ നടേ നൂററിൻെറ വർഗ്ഗം വെയ്ക്കുമ്പോൾ നൂറുവരിയും ഓരോ വരിയിൽ നൂറു നൂറു ഖണ്ഡങ്ങളുംകൂടിയിരിപ്പോരു സമചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ഇതു് ഈശകോണിൽ എന്നു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഘാതങ്ങൾ രണ്ടും ഇതിൻെറ തെക്കും പടിഞ്ഞാറും വെയ്പൂ.

ഈ ഖണ്ഡസംഖ്യകളുടേയും യോഗം വർഗ്ഗം.

വർഗ്ഗത്തിൽ അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തു ക^2; നാലാംസ്ഥാനത്തു $2\times$ക$\times$ഖ; മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു $2\times$ക$\times$ഗ, ഖ^2; രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു $2\times$ഖ$\times$ഗ; ആദ്യസ്ഥാനത്തു ഗ^2.

ക്രിയ:—(i) ക എന്നതിനെ വർഗ്ഗിച്ച അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തു വെക്കുക. (ii) $2\times$ക എന്നതുകൊണ്ടു ഖ, ഗ എന്നവറെറ ഗുണിച്ച നാലാംസ്ഥാനത്തിലും മൂന്നാംസ്ഥാനത്തിലും വെക്കുക. (iii) മൂലത്തിലെ ക എന്നതിനെ കളഞ്ഞു, ഖ, ഗ, എന്ന സംഖ്യകളെ ഒരു സ്ഥാനം കീഴ്പോട്ടിറക്കി വെക്കുക. അപ്പോൾ ഖ ഫലത്തിങ്കലെ മൂന്നാംസ്ഥാനത്തിൻേറയും ഗ രണ്ടാംസ്ഥാനത്തിൻേറയും നേരെ വരും. പിന്നെ ഖ എന്നതിനെ വർഗ്ഗിച്ച മൂന്നാംസ്ഥാനത്തിൽ കൂട്ടു. $2\times$ഖ എന്നതിനെക്കൊണ്ടു ഗ എന്നതിനെ ഗുണിച്ച ഫലത്തെ രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു വെക്ക. (iv) മൂലത്തിലെ ഖ എന്നതിനേയും കളഞ്ഞു ഗ എന്നതിനെ ഒരു സ്ഥാനം ഇറക്കിവെക്ക. അപ്പോൾ ഗ എന്നതു ഫലത്തിങ്കലെ ആദ്യസ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ വരും. ഗ എന്നതിനെ വർഗ്ഗിച്ചാദ്യസ്ഥാനത്തുവെക്ക. ഇങ്ങനെ വർഗ്ഗീകരണം.

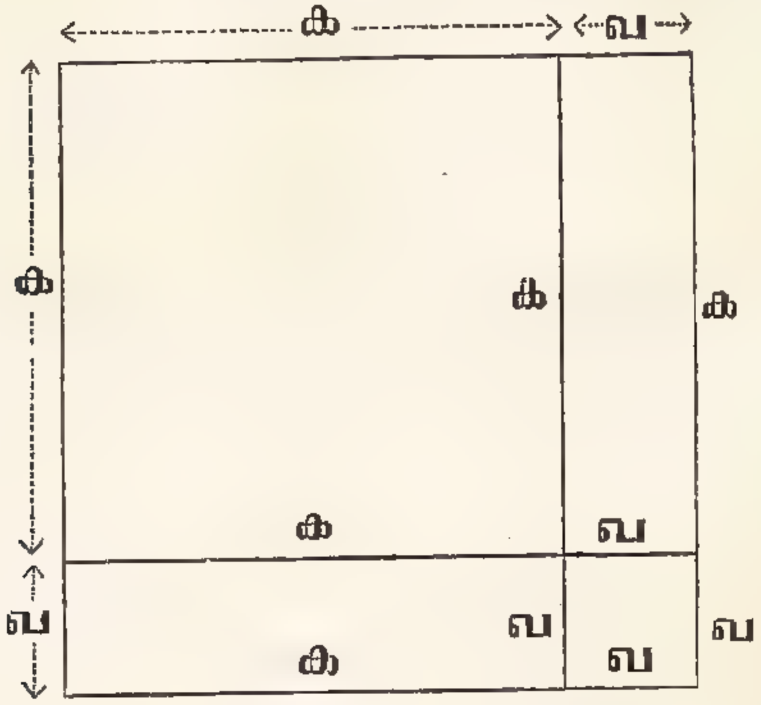
അവ രണ്ടും നൂറു നീളവും ഇരുപത്തിമൂന്ന് ഇടവും ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പോചില രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങൾ ഇവ. പിന്നെ ഇരുപത്തിമൂന്നിന്റെ വർഗ്ഗം നിരൃതികോണിൽ വരും. പിന്നെ ആ ക്ഷേത്രത്തിങ്കലും ഇരുപതും മൂന്നും ഇങ്ങനെ സ്ഥാനത്തെ ഖണ്ഡിച്ചു വർഗ്ഗിക്കാം. അവിടെ ഇരുപതിന്റെ വർഗ്ഗം അവിടത്തെ ഈശകോണിങ്കൽ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഇരുപതു നീളവും മൂന്നിടവും ഇങ്ങനെ രണ്ടു ഘാതക്ഷേത്രം തെക്കം പടിഞ്ഞാറും. പിന്നെ മൂന്നിന്റെ വർഗ്ഗം ഇതിന്റെ നിരൃതികോണിൽ. ഇങ്ങനെ സ്ഥാനമൊടുങ്ങുവോളം. ഇങ്ങനെ ഒരു വർഗ്ഗപ്രകാരം. ഇങ്ങനെ ഒരു രാശിയെ വർഗ്ഗിക്കേണ്ടുമ്പോൾ അതിനെ രണ്ടായി ഖണ്ഡിച്ചു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചിരട്ടിച്ചു രണ്ടു ഖണ്ഡത്തിന്റേയും വർഗ്ഗവും കൂട്ടിയാൽ ഖണ്ഡയോഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും എന്നു ചൊല്ലീ. *

---

* വർഗ്ഗിക്കേണ്ടുന്ന സംഖ്യയെ ക, ഖ എന്നു രണ്ടു സംഖ്യകളായിട്ടു ഖണ്ഡിക്കുക.

പരിലേഖം (8)ൽ വലിയ ക്ഷേത്രം = ഒരു സമചതുരശ്രം

$= (\text{ക} + \text{ഖ})^2$.



പരിലേഖം 8.

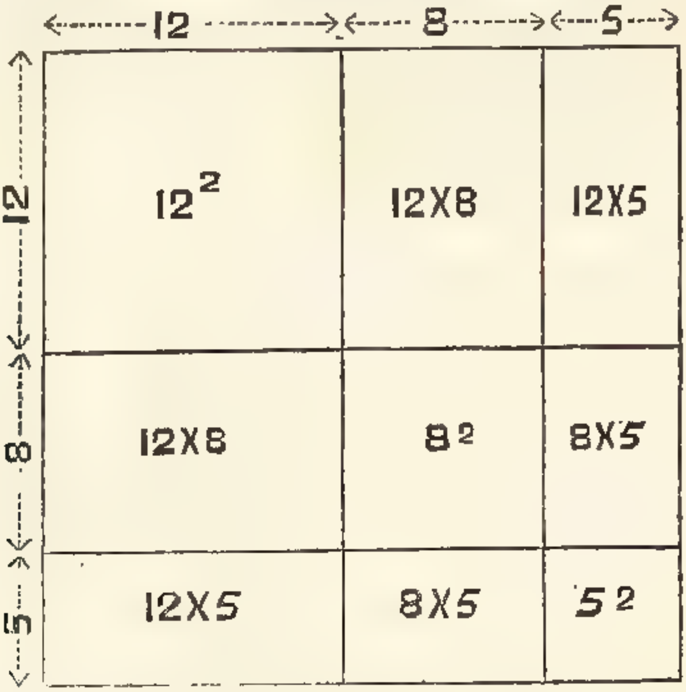
ഇതിൽ നാലു ഖണ്ഡങ്ങളുണ്ട്. അതിലൊന്നു ക^2, രണ്ടാമത്തു ഖ^2, മൂന്നാമത്തും നാലാമത്തും ഘാതക്ഷേത്രങ്ങൾ. ഈ ഘാതക്ഷേത്രങ്ങളോരോന്നും $\text{ക} \times \text{ഖ}$ എന്നതിനോടു തുല്യം.

അപ്പോൾ $(\text{ക} + \text{ഖ})^2 = \text{ക}^2 + \text{ഖ}^2 + 2\text{ക} \times \text{ഖ}$.

ഇവിടെ ഖണ്ഡിക്കുന്നതു സ്ഥാനക്രമേണയും സംഖ്യാക്രമേണയുമാവാം. 25-നെ 20, 5 എന്നും 15, 10 എന്നും രണ്ടു വിധത്തിൽ ഖണ്ഡിക്കാം.

ഖണ്ഡയോർവ്വർഗ്ഗയോഗേ വാ ദ്വിഘ്നീം ഖണ്ഡാഹതിം ക്ഷിപേൽ ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

അനന്തരം ഖണ്ഡഘാതത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചിട്ട് അതിൽ ഖണ്ഡാന്തരവർഗ്ഗവും കൂട്ടൂ. എന്നാലും ഈ വർഗ്ഗമുണ്ടാകും. ഇതിൻപ്രകാരം. ഇവിടെ ഘാതക്ഷേത്രമാകുന്നതു വലിയ ഖണ്ഡത്തോളം നീളവും ചെറിയ ഖണ്ഡത്തോളമിടവും ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇതിങ്കൽ ഒരു കൎണ്ണരേഖയും വരപ്പൂ. ഇങ്ങനെ നാലുള്ള ഇവററെക്കൊണ്ടു വർഗ്ഗക്ഷേത്രമുണ്ടാക്കും പ്രകാരം. ഈ ഘാതക്ഷേത്രത്തിൽ ഒന്നിനെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിന്റെ ഈശകോണിൽനിന്നു തുടങ്ങി തെക്കോട്ടു വെയ്പൂ. പിന്നെ ഒന്നിനെ ഇതിന്റെ അഗ്നികോണിൽനിന്നു പടിഞ്ഞാറോട്ട്. പിന്നെ നിരൃതികോണിങ്കന്നു വടക്കോട്ട്. പിന്നെ വായുകോണിങ്കന്നു കിഴക്കോട്ട്. ഇങ്ങനെവെച്ചാൽ ക്ഷേത്രമദ്ധ്യത്തിൽ ഖണ്ഡാന്തരവർഗ്ഗത്തോളം പോരാതെയിരിക്കും. അതും കൂട്ടിയാൽ തികയും. ചെറിയ ഖണ്ഡത്തോളം ഇരുപുറവുമുണ്ടാകുമ്പോൾ നടുവിൽ അന്തരത്തോളം ശേഷിക്കും, എന്നിട്ട്. ആകയാൽ നാലുഘാതവും അന്തരവർഗ്ഗവും കൂട്ടിയാലും ഖണ്ഡയോഗവർഗ്ഗം ഉണ്ടാകും. പിന്നെ ഇച്ചൊല്ലിയതുകൊണ്ടുതന്നെ, ഖണ്ഡങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗം ഘാതത്തെ ഇരട്ടിച്ചതും അന്തരവർഗ്ഗവും കൂടിയായിരിക്കും എന്നു വരും. ഇതിൽ ഖ



പരിലേഖം 9.

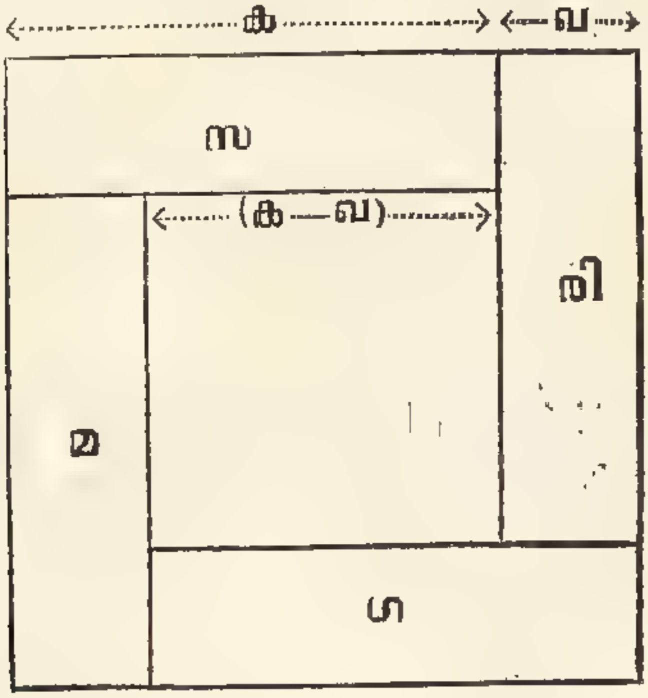
ഇവിടെ 123നെ സ്ഥാനക്രമേണ 100, 20, 3 ഇങ്ങനെ മൂന്നായിട്ടു ഖണ്ഡിച്ചിട്ടാണുദാഹരിച്ചിരിക്കുന്നത്. എന്നാൽ പരിലേഖം 9ൽ എളുപ്പത്തിന്നുവേണ്ടി 25നെ 12, 8, 5 എന്നിങ്ങനെ സംഖ്യാക്രമേണ മൂന്നായിട്ടു ഖണ്ഡിച്ചിട്ടാണുദാഹരിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇവിടെ വലിയ ക്ഷേത്രം 25ന്റെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം. ഇതിൽ ഒമ്പതു ഖണ്ഡങ്ങളുണ്ട്. അവ 12ന്റെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം, 8ന്റെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം, 5ന്റെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം, 12×8, 12×5, 8×5 ഈ ഘാതങ്ങളുടെ ഈരണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങൾ.

$$25^2=(12+8+5)^2=12^2+2\times12\times8+2\times12\times5+8^2+2\times8\times5+5^2.$$

ണ്ഡഘാതത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിനെ കൂട്ടീട്ടല്ലൊ മുമ്പിൽ വർഗ്ഗത്തെ ഉണ്ടാക്കി, എന്നിട്ട്. *

ഇവിടെ പിന്നെ ഖണ്ഡവർഗ്ഗയോഗത്തെ ഒരു ക്ഷേത്രമെന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ഘാതക്ഷേത്രത്തിൻെറ കർണ്ണം സമചതുരശ്രബാഹുവായിട്ടിരിപ്പോരു വർഗ്ഗക്ഷേത്രമതു് എന്നുവരും. ഇതിൻപ്രകാരം. അവിടെ നാലുഘാതക്ഷേത്രത്തെ വെച്ച് അവററിന്ന് ഓരോ കർണ്ണരേഖകൾ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയവററിൻെറ അഗ്രം സമചതുരശ്രകോണിൽ അല്ലാ വേണ്ടൂ, മററെ കോടികളെ സ്പർശിക്കുമാറു് ഇരിക്കേണ്ടൂ. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്തു് ആ കർണ്ണരേഖാമാർഗ്ഗേണ പെളിച്ചു പുറ

* ഖണ്ഡങ്ങളെ ക, ഖ എന്നു കല്പിക്കുക.



പരിലേഖം 10

ക എന്നതിനോളം നീളത്തിലും ഖ എന്നതിനോളം ഇടമായിട്ടും സ, രി, ഗ, മ എന്ന നാലു ഘാതക്ഷേത്രങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുക. യോഗവർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിൽ [(ക + ഖ)² എന്നതിൻെറ ക്ഷേത്രം] ഇവയെ പരിലേഖം 10ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന മാതിരി വെക്കുക. അപ്പോൾ നടുവിൽ ഒരു വർഗ്ഗക്ഷേത്രം ശേഷിക്കും. അതിൻെറ ബാഹു = ക + ഖ — 2 × ഖ = ക — ഖ.

അപ്പോൾ (ക + ഖ)² = 4ക.ഖ + (ക — ഖ)² എന്നു വന്നു.

(ക + ഖ)² = ക² + ഖ² + 2ക.ഖ = 4ക.ഖ + (ക — ഖ)²

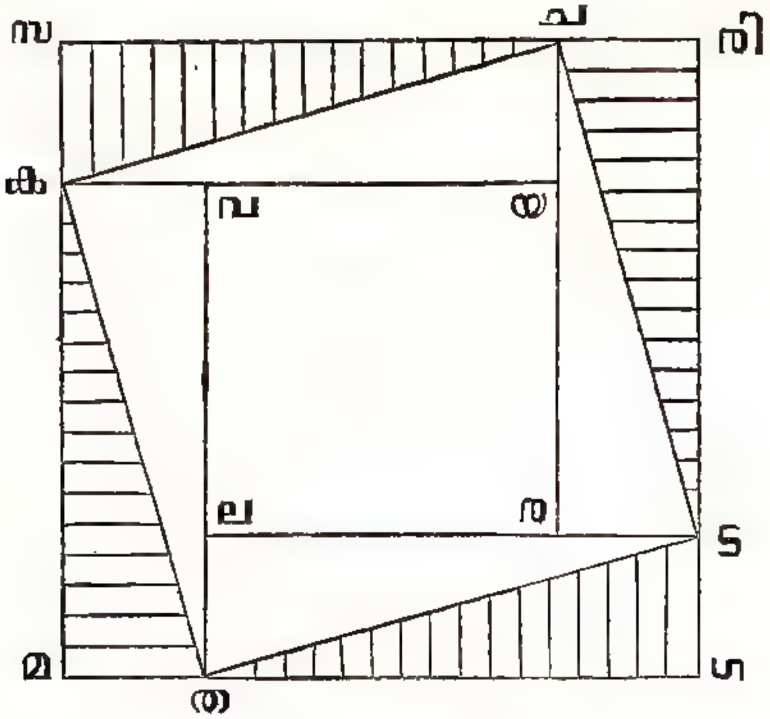
∴ ക² + ഖ² = 2ക.ഖ + (ക — ഖ)².

മൂലത്തിൽ ഘാതക്ഷേത്രത്തിന്നൊരു കർണ്ണരേഖ വരയ്ക്കുവാൻ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടു്. അതു മേലിൽ പറയുവാൻ പോകുന്നേടത്തേയ്ക്കു് ഉദ്ദേശിക്കപ്പെട്ടതാകകൊണ്ടു പരിലേഖം (10)ൽ വരച്ചിട്ടില്ല.

ത്തു ഖണ്ഡങ്ങൾ ഓരോന്നു നാലിങ്കന്നും കളയു. അപ്പോൾ അതിന്നകം അക്കർണ്ണരേഖകൾ ചതുരശ്രബാഹുക്കൾ നാലുമായിട്ടിരിപ്പോരു സമചതുരശ്രം ശേഷിക്കും. പിന്നെ കളഞ്ഞ ഖണ്ഡങ്ങൾ നാലിൽ ഈരണ്ടു തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാൽ രണ്ടു ഘാതക്ഷേത്രങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. ഈ വണ്ണമാകുമ്പോൾ വർഗ്ഗയോഗം കർണ്ണവർഗ്ഗമെന്നും വർഗ്ഗയോഗത്തിങ്കൽ ഇരട്ടിയിങ്കന്നു യോഗവർഗ്ഗം അന്തരവർഗ്ഗംകൊണ്ടു കുറഞ്ഞിരിക്കുമെന്നും വരും. ആകയാൽ ഇവിടെ വർഗ്ഗയോഗത്തിങ്കന്നു ഘാതത്തിലിരട്ടി കളഞ്ഞാലും യോഗവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ഘാതത്തിൽ നാന്മടങ്ങു പോയാലും വർഗ്ഗയോഗത്തിൽ ഇരട്ടിയിങ്കന്നു യോഗവർഗ്ഗംപോയാലും മൂന്നിങ്കലും അന്തരവർഗ്ഗം ശേഷിക്കും എന്നും വരും. *

---

* പരിലേഖം 10ലെപ്പോലെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിൽ നാലു ഘാതക്ഷേത്രങ്ങളേയും വെക്കു. നാലിനും ഓരോ കർണ്ണരേഖയേയും വരയ്ക്കു. ഈ കർണ്ണങ്ങൾ വർഗ്ഗക്ഷേത്രകോണുകളിൽക്കൂടിയല്ലാത്തവയായിരിക്കണം. (പരിലേഖം 11 നോക്കുക). ഇവിടെ യോഗവർഗ്ഗക്ഷേത്രം സരിഗമ, സകയച, ചരടരി, ലടഗത, കമതവ ഇങ്ങനെ നാലു ഘാതക്ഷേത്രങ്ങൾ. അപ്പോൾ വലരയ അന്തരവർഗ്ഗക്ഷേത്രമാകുന്നു. കച, ചട, ടത, തക എന്ന കർണ്ണങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുക. അപ്പോൾ ത്ര്യശ്രം സകച=ത്ര്യശ്രം ചടരി=ത്ര്യശ്രം ടതഗ=ത്ര്യശ്രം തകമ=ഘാതക്ഷേത്രാർദ്ധം.



പരിലേഖം 11.

∴ നാലു ത്ര്യശ്രങ്ങളുംകൂടി ഇരട്ടിച്ച ഘാതക്ഷേത്രത്തിനോടു തുല്യം.

ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ നാലിനേയും കർണ്ണരേഖാമാർഗ്ഗേണ മുറിച്ചു കളയു. അപ്പോൾ യോഗവർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിൽ കചടത എന്ന ക്ഷേത്രം ശേഷിക്കും. ഇതു കർണ്ണം ബാഹുവായിട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു സമചതുരശ്രം.

അനന്തരം വൎഗ്ഗിക്കേണ്ടുന്ന രാശിയെ രണ്ടേടത്തുവെച്ച് ഒന്നു ഗുണകാരമെന്നും ഒന്നു ഗുണ്യമെന്നും കല്പിച്ച് ഇതിൽ ഒന്നിങ്കന്ന് ഒരിഷ്ടസംഖ്യയെ കളവൂ. അതിനെത്തന്നെ മറേറതിൽ കൂട്ടൂ. പിന്നെ തങ്ങളിൽ ഗുണിപ്പൂ. ആ ക്ഷേത്രം ഇഷ്ടോനത്തോളം ഇടവും ഇഷ്ടാധികത്തോളം നീളവുമായിട്ടിരിക്കും. അവിടെ നീളം ഏറിയതിനെ മുറിച്ച് ഇടം പോരാത്തേടത്തു വെയ്പൂ. അപ്പോൾ ഒരു കോണിൽ ഇഷ്ടവൎഗ്ഗത്തോളം പോരാതെയിരിക്കും. അതും കൂട്ടിയാൽ വൎഗ്ഗക്ഷേത്രം മുമ്പിലത്തേതുതന്നെ. *

അനന്തരം ഈ ഖണ്ഡവൎഗ്ഗന്യായം ചൊല്ലിയതിനെക്കൊണ്ടു തന്നെ ഒരിഷ്ടരാശിയെ വൎഗ്ഗിച്ചതിനെ രണ്ടേടത്തുവെച്ചു രണ്ടാമ

കതടച = കൎണ്ണവൎഗ്ഗക്ഷേത്രം.
= യോഗവൎഗ്ഗക്ഷേത്രം — 2 × ഘാതക്ഷേത്രം.
∴ കൎണ്ണവൎഗ്ഗം = യോഗവൎഗ്ഗം − 2 × ഘാതം.
= വൎഗ്ഗയോഗം.

കൎണ്ണവൎഗ്ഗക്ഷേത്രം = കതടച
= വലരയ + ത്ര്യശ്രം കയച + ത്ര്യശ്രം ചരട + ത്ര്യശ്രം ടലത + ത്ര്യശ്രം കതവ.

ഇവിടെയും ത്ര്യശ്രം കയച = ത്ര്യശ്രം ചരട = ത്ര്യശ്രം ടലത = ത്ര്യശ്രം തകവ
= ഘാതക്ഷേത്രാൎദ്ധം.

നാലുക്ഷേത്രങ്ങളുംകൂടി ഇരട്ടിച്ച ഘാതക്ഷേത്രത്തിനോടു തുല്യം.

∴ കൎണ്ണവൎഗ്ഗക്ഷേത്രം = അന്തരവൎഗ്ഗക്ഷേത്രം + 2 × ഘാതക്ഷേത്രം.
കൎണ്ണവൎഗ്ഗം = അന്തരവൎഗ്ഗം + 2 × ഘാതം.
കൎണ്ണവൎഗ്ഗം = യോഗവൎഗ്ഗം − 2 × ഘാതം.
∴ 2 × കൎണ്ണവൎഗ്ഗം = 2 വൎഗ്ഗയോഗം = അന്തരവൎഗ്ഗം + യോഗവൎഗ്ഗം.
അതായതു യോഗവൎഗ്ഗം = 2 × വൎഗ്ഗയോഗം − അന്തരവൎഗ്ഗം.

അപ്പോൾ അന്തരവൎഗ്ഗം = { വൎഗ്ഗയോഗം − 2 × ഘാതം
യോഗവൎഗ്ഗം − 4 × ഘാതം
2 × വൎഗ്ഗയോഗം − യോഗവൎഗ്ഗം

എന്നെല്ലാം വന്നുകൂടി.

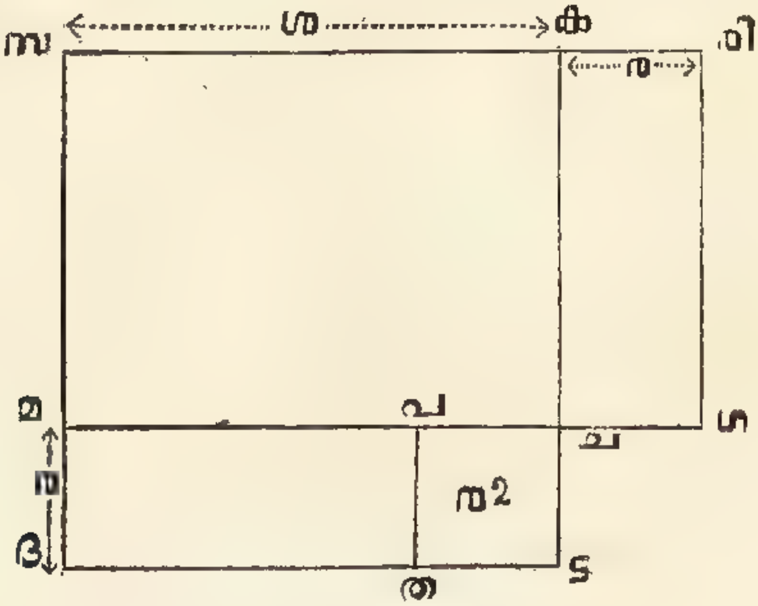
* ഇഷ്ടോനേഷ്ടാഢ്യയോരാശ്യോൎഘാതേ വേഷ്ടകൃതിം ക്ഷിപേൽ ॥

(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

വൎഗ്ഗിക്കേണ്ടും രാശിയെ രണ്ടേടത്തുവെച്ച് ഒന്നിനെ ഗുണ്യമെന്നും മറേറതിനെ ഗുണകാരമെന്നും കല്പിക്ക. പരിലേഖം (12)ൽ ഈ വൎഗ്ഗക്ഷേത്രം സകടമ എന്ന്. ഇവിടെ സക ഗുണകാരം, സമ ഗുണ്യം. ഗുണകാരത്തിൽ ഒരിഷ്ടസംഖ്യയെ കൂട്ടൂ, ഗുണ്യത്തിൽനിന്ന് ആ ഇഷ്ടസംഖ്യയെത്തന്നെ കളയൂ. ഇങ്ങനെയിരിക്കുന്ന ഗുണഗുണ്യങ്ങളുടെ ഘാതക്ഷേത്രം സരിഗമ. ഗുണകാരത്തിലേറിയതുകൊണ്ടു ക്ഷേത്രത്തിലേറിയ ഭാഗം കചഗരി. ഈ ഭാഗത്തെ മുറിച്ചു മപതമ എന്ന സ്ഥാനത്തുവെ...

തൊരു ഇഷ്ടസംഖ്യയെ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ പ്രഥമദ്വിതീയേഷ്ടങ്ങളുടെ ഘാതത്തെ ഇരട്ടിച്ച് അതിനെ ഒന്നിൽ കൂട്ടൂ, ഒന്നിൽ കളയൂ. പിന്നെ ദ്വിതീയേഷ്ടവർഗ്ഗം രണ്ടിലും കൂട്ടൂ. അപ്പോൾ പ്രഥമേഷ്ടത്തിൽ ദ്വിതീയേഷ്ടം കൂട്ടിയതിന്റെയും കളഞ്ഞതിന്റെയും വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കുമവരണ്ടും. പിന്നെ അവറ്റെ മൂലിച്ചാൽ ഒരു യോഗവർഗ്ഗമൂലവും ഒരന്തരവർഗ്ഗമൂലവുമായിട്ടിരിക്കുമവ. *

ഇവിടെ യാതൊന്നു മുമ്പിൽ ഖണ്ഡവർഗ്ഗക്ഷേത്രം ചൊല്ലപ്പെട്ടതു് — ഈശകോണിൽ വലിയ ഖണ്ഡത്തിന്റെ വർഗ്ഗം, നിരൃതികോണിൽ ചെറിയതിന്റെ വർഗ്ഗം, മറ്റേകോണുകളിൽ ഖണ്ഡദ്വയഘാതക്ഷേത്രങ്ങളും — ഈ നാലു ക്ഷേത്രവും കൂടിയതു് അഖണ്ഡയോ



പരിലേഖം 12

അപ്പോൾ സരിഗമ = സമചക + മദതപ

= സദടക — പതടച.

ഇവിടെ സദടക ആദ്യത്തെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രവും പതടച ഇഷ്ടവർഗ്ഗക്ഷേത്രവുമാകുന്നു.

അപ്പോൾ സരിഗമ = ആദ്യവർഗ്ഗക്ഷേത്രം — ഇഷ്ടവർഗ്ഗക്ഷേത്രം.

വർഗ്ഗിക്കേണ്ടും സംഖ്യയെ അ എന്നും ഇഷ്ടസംഖ്യയെ ഇ എന്നും കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ,

$(\text{അ} + \text{ഇ})(\text{അ} - \text{ഇ}) = \text{അ}^2 - \text{ഇ}^2$. എന്നുവന്നു.

$\text{അ}^2 = (\text{അ} + \text{ഇ})(\text{അ} - \text{ഇ}) + \text{ഇ}^2$.

* ക, ഖ എന്നു രണ്ടിഷ്ടരാശികൾ.

$\text{ക}^2 + 2\text{ക}.\text{ഖ} + \text{ഖ}^2 = (\text{ക} + \text{ഖ})^2 \rightarrow$ യോഗവർഗ്ഗം.

$\text{ക}^2 - 2\text{ക}.\text{ഖ} + \text{ഖ}^2 = (\text{ക} - \text{ഖ})^2 \rightarrow$ അന്തരവർഗ്ഗം.

$\sqrt{\text{ക}^2 + 2\text{ക}.\text{ഖ} + \text{ഖ}^2}$ = യോഗവർഗ്ഗമൂലം.

$\sqrt{\text{ക}^2 - 2\text{ക}.\text{ഖ} + \text{ഖ}^2}$ = അന്തരവർഗ്ഗമൂലം.

ഗവൎഗ്ഗക്ഷേത്രമാകുന്നതു്. എന്നിങ്ങനെ ചൊല്ലിയേടത്തു് ആ നിരൃതി കോണിലെ ഖണ്ഡക്ഷേത്രം ഒരിഷ്ടവൎഗ്ഗക്ഷേത്രം; പിന്നെ ഈശകോണിലേതു മറെറാരു ഇഷ്ടവൎഗ്ഗക്ഷേത്രം. ഇവിടെ ഈശകോണിലെ വൎഗ്ഗക്ഷേത്രത്തെക്കാട്ടിൽ മറെറ മൂന്നു ക്ഷേത്രങ്ങളും കൂടിയതു് അഖണ്ഡമായിരിക്കുന്ന വലിയ രാശിയുടെ വൎഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിൽ ഏറിയ ഭാഗമാകുന്നതു്. ആകയാൽ ആ ക്ഷേത്രങ്ങൾ മൂന്നും കൂടിയതു വൎഗ്ഗാന്തരമാകുന്നതു്. ഈ വൎഗ്ഗാന്തരക്ഷേത്രമാകുന്നതിനെ വരുത്തുംപ്രകാരം പിന്നെ. ഇവിടെ ഈശകോണിലെ വൎഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിൻെറ തെക്കെ പുറത്തും പടിഞ്ഞാറെപുറത്തും ഓരോ ഘാതക്ഷേത്രമുള്ളവ ഇവിടെയ്ക്കുചെറിയ രാശിയെ രാശ്യന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കുമവ. പിന്നെ നിരൃതികോണിലേതു് അന്തരവൎഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ചെറിയ രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിനേയും രാശികൾ രണ്ടിൻേറയും അന്തരത്തേയും അന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണം. ആകയാൽ ചെറിയ രാശിയും വലിയ രാശിയും കൂടിയുള്ള യോഗത്തെ രാശ്യന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചിട്ടുള്ളതായിട്ടിരിക്കും. ചെറിയ രാശിയും അന്തരവുമുള്ള യോഗം വലിയ രാശിയായിട്ടിരിക്കും, എന്നിട്ടു്. യോഗാന്തരാഹതിവൎഗ്ഗാന്തരമെന്നും വരും. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ ഒന്നിൻെറ വൎഗ്ഗം ഒന്നു്. ഒന്നും രണ്ടും ഉള്ള യോഗം ആകുന്ന മൂന്നിനെ അന്തരമാകുന്ന ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ സംഖ്യാഭേദമില്ലായ്കയാൽ മൂന്നുതന്നെ യോഗാന്തരാഹതിയാകുന്നതു്. ആകയാൽ ഒന്നും രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള വൎഗ്ഗാന്തരം മൂന്നു്. ഈ മൂന്നിനെ ഒന്നിൻെറ വൎഗ്ഗമാകുന്ന ഒന്നിൽ കൂട്ടിയാൽ നാലു രണ്ടിൻെറ വൎഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഈവണ്ണം രണ്ടും മൂന്നും കൂടിയ അഞ്ചു രണ്ടിൻേറയും മൂന്നിൻേറയും വൎഗ്ഗാന്തരമാകുന്നതു്. പിന്നെ മൂന്നിൻേറയും നാലിൻേറയും വൎഗ്ഗാന്തരം ഏഴു്. നാലുമഞ്ചുമുള്ള വൎഗ്ഗാന്തരം ഒമ്പതു്. ഇങ്ങനെ ഒന്നു തുടങ്ങി ഈരണ്ടീരണ്ടു സംഖ്യ നിരന്തരേണ ഏറി ഏറിയിരിക്കും ഒന്നു തുടങ്ങിയുള്ള നിരന്തരസംഖ്യകളുടെ വൎഗ്ഗാന്തരം. ആകയാൽ ഒന്നു തുടങ്ങി ഈരണ്ടീരണ്ടേറി ഇരിപ്പോരു ശ്രേഢീക്ഷേത്രമായിരിക്കുമതു്. ഏകാദിക്രമേണയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വൎഗ്ഗക്ഷേത്രമായിട്ടിരിക്കുമതു്. ഇങ്ങനെ ആകുമ്പോൾ ഏകാദിദ്വിചയശ്രേഢീക്ഷേത്രമായിട്ടും കല്പിക്കാം വൎഗ്ഗക്ഷേത്രത്തെ. അവിടെ ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ സംഖ്യയോളം വരി; നടേത്തെ വരിയിൽ ഒരു ഖണ്ഡം, പിന്നത്തേതിൽ മൂന്നു ഖണ്ഡം, പിന്നത്തെ വരിയിൽ അഞ്ചു്, ഇങ്ങനെ വരിയിൽ ഖണ്ഡസംഖ്യകൾ ഈരണ്ടീരണ്ടേറീട്ടി

രുന്നോ ചിലവ. ഇപ്രകാരം ശ്രേഢീക്ഷേത്രസ്വഭാവം. ഇതിനെ മേലിൽ വിസ്തരിക്കുന്നു ജ്യാപ്രകരണത്തിങ്കൽ. ഇങ്ങനെ ചൊല്ലീതായി വർഗ്ഗപരികർമ്മം*.

---

* ഒരു യോഗവർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിൽ രണ്ടു ഖണ്ഡവർഗ്ഗക്ഷേത്രങ്ങളും രണ്ടു ഘാതക്ഷേത്രങ്ങളുമുണ്ടെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞുവല്ലോ. അതായതു ക, ഖ എന്നു രണ്ടു രാശികളെ കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ,

$$(\text{ക}+\text{ഖ})^2=\text{ക}^2+\text{ഖ}^2+2\text{ക}.\text{ഖ}.$$

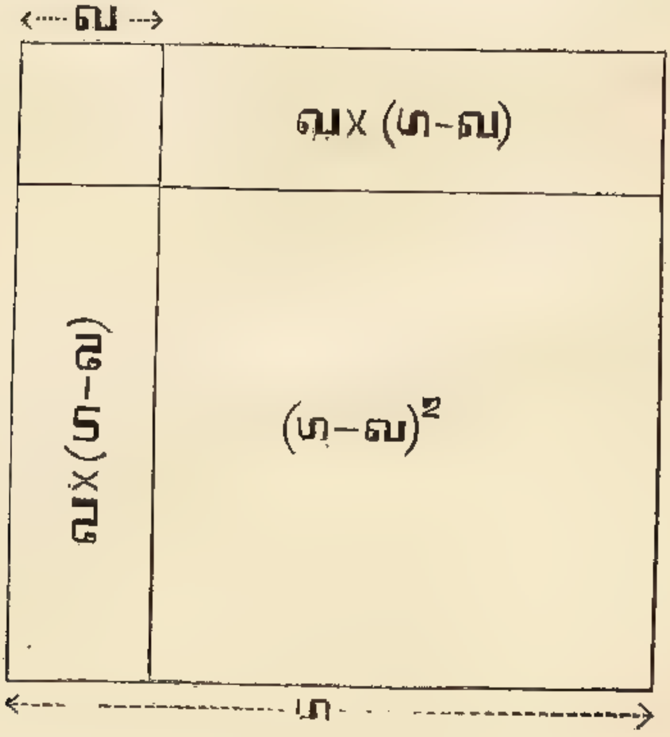
$$\therefore (\text{ക}+\text{ഖ})^2-\text{ക}^2=\text{ഖ}^2+2\text{ക}.\text{ഖ}.$$

ഇങ്ങനെ $\text{ഖ}^2+2\text{ക}.\text{ഖ}$ എന്നതു് ഒരു വർഗ്ഗാന്തരമാകുന്നു. ഈ ബന്ധത്തെ പ്രകാരാന്തരേണ കല്പിക്കാം.

ക + ഖ എന്ന യോഗത്തെ ഗ എന്നു കല്പിക്കുക.

അപ്പോൾ $\text{ക}+\text{ഖ}=\text{ഗ}$.

$\therefore \text{ക}=\text{ഗ}-\text{ഖ}$.



പരിലേഖം 13

അപ്പോൾ പരിലേഖം (13)ൽ ഈശകോണിലെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തെ ഖ എന്നതിന്റെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രമെന്നും വലിയ വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തെ ഗ എന്നതിന്റെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രമെന്നും കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, നിരൃതികോണിലെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം ഒരു അന്തരവർഗ്ഗക്ഷേത്രമാകുന്നു—$(\text{ഗ}-\text{ഖ})^2$. ഒരോ ഘാതക്ഷേത്രത്തിന്റെ ഫലം $=\text{ഖ}\times(\text{ഗ}-\text{ഖ})$

അപ്പോൾ $(\text{ക}+\text{ഖ})^2-\text{ഖ}^2=\text{ക}^2+2\text{ക}.\text{ഖ}$.

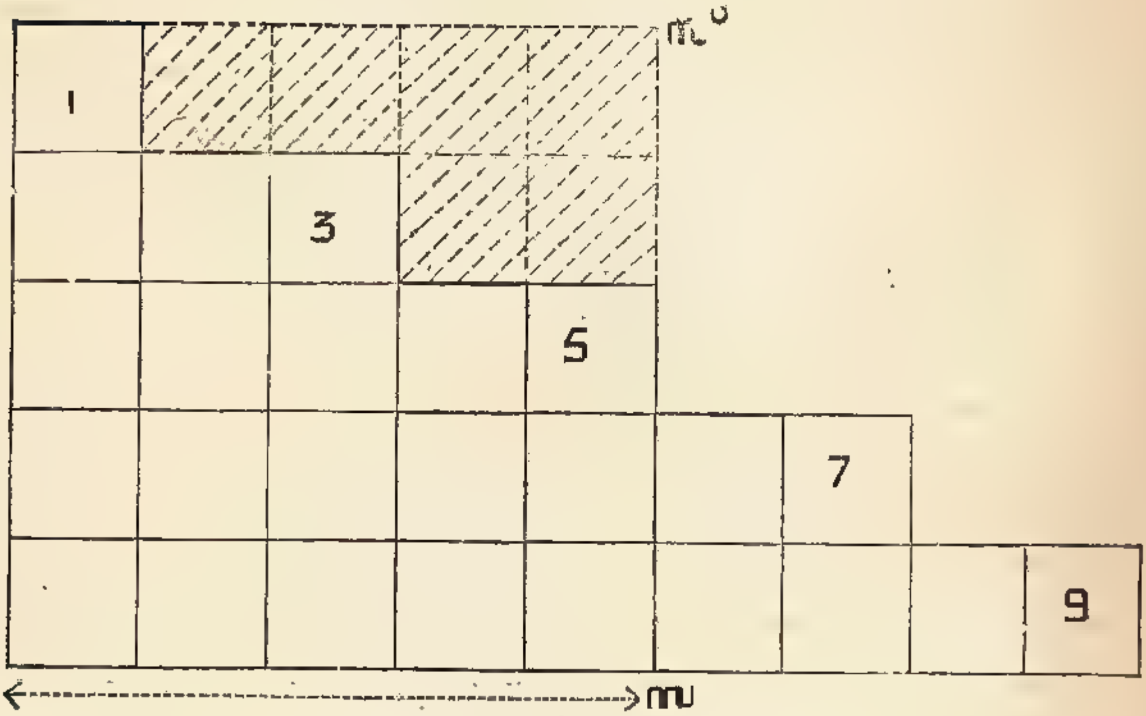
$$ഗ^2-ഖ^2=(ഗ-ഖ)^2+2(ഗ-ഖ).ഖ.$$
$$=(ഗ-ഖ)(ഗ-ഖ+2ഖ)$$
$$=(ഗ-ഖ)(ഗ+ഖ).$$

ഇങ്ങനെ യോഗാന്തരാഘതിവ്വർഗ്ഗാന്തരം എന്നു പ്രകാരാന്തരേണ കാണിച്ചു.

$$\therefore\ 1^2-0^2=(1+0)(1-0)=1.$$
$$2^2-1^2=(2+1)(2-1)=3.$$
$$3^2-2^2=(3+2)(3-2)=5.$$
$$4^2-3^2=(4+3)(4-3)=7.$$
$$5^2-4^2=(5+4)(5-4)=9.$$

ഇവയെല്ലാം ഒരുമിച്ചു കൂട്ടുയോഗം,

$5^2-0^2=5^2=1+3+5+7+9.$ എന്നുവരും.



പരിലേഖം 14.

1+3+5+7+9 എന്നതിനെ പരിലേഖനം 14-ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന മാതിരി ഒരു ശ്രേഢീക്ഷേത്രമായിട്ടു കല്പിക്കാം. അതുകൊണ്ടു് ഏകാദിക്രമേണയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളേയും ഇങ്ങനെയുള്ള ശ്രേഢീക്ഷേത്രങ്ങളായിട്ടു കല്പിക്കാം. ഈ ശ്രേഢീക്ഷേത്രത്തിൽ മൂലസംഖ്യയോളം വരി ഉണ്ടായിരിക്കും. ആദ്യത്തെ വരിയിലൊരു ഖണ്ഡം, രണ്ടാമത്തേതിൽ മൂന്നു്, മൂന്നാമത്തേതിൽ അഞ്ചു്, ഇങ്ങനെ മേല്പോട്ടു മേല്പോട്ടു ഈരണ്ടീരണ്ടു ഖണ്ഡങ്ങളേറിയിരിക്കും.

1+3+5+7+9 എന്നതിനെ ശ്രേഢീക്ഷേത്രമായിട്ടു പരിലേഖം 14ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ക്ഷേത്രത്തെ സസ് എന്ന രേഖാമാർഗ്ഗേണ പൊളിച്ചു പരിലേഖത്തിൽ കാണിച്ചപ്രകാരം കൂട്ടിച്ചേർക്കുകയാണെങ്കിൽ അഞ്ചിന്റെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രമായൊരു സമചതുരശ്രമുണ്ടാകും.

$\therefore 5^2=1+3+5+7+9.$

വർഗ്ഗമൂലം

അനന്തരം മൂലം. അതു വർഗ്ഗത്തിൻെറ വിപരീതക്രിയയായിരുന്നൊന്ന്. അവിടേയുമാദ്യസ്ഥാനത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി അന്ത്യസ്ഥാനമൊടുക്കമായിട്ടുള്ള വർഗ്ഗക്രിയയിങ്കന്നു വിപരീതമായിരുന്നൊന്നു മൂലക്രിയ. അവിടെ നൂററിരുപത്തിമൂന്നിനെ ആദ്യസ്ഥാനത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി വർഗ്ഗിക്കുംപ്രകാരം. ആദ്യസ്ഥാനത്തെ മൂന്നിൻെറ വർഗ്ഗം ഒമ്പതിനെ ആദ്യസ്ഥാനത്തിനു നേരെ വെയ്പൂ. അതു നടേത്തെ ക്രിയയാകുന്നതു്. പിന്നെ ഈ മൂന്നിനെ ഇരട്ടിച്ച ആറുകൊണ്ടു രണ്ടാംസ്ഥാനത്തെ രണ്ടിനേയും മൂന്നാംസ്ഥാനത്തെ ഒന്നിനേയും ഗുണിച്ച് അതതിനുനേരെ നടേ വർഗ്ഗം വെച്ചതിൻെറ വരിയിൽവെയ്പൂ. ഇതു രണ്ടാംക്രിയ. പിന്നെ ദ്വിതീയസ്ഥാനത്തെ രണ്ടിനേയും തൃതീയസ്ഥാനത്തെ ഒന്നിനേയും ഓരോ സ്ഥാനം മേല്പോട്ടു നീക്കി രണ്ടിൻെറ വർഗ്ഗം നാലിനെ ശതസ്ഥാനത്തു വെയ്പൂ എന്നു മൂന്നാംക്രിയ. പിന്നെ രണ്ടിനെ ഇരട്ടിച്ച നാലിനെക്കൊണ്ടു മൂന്നാംസ്ഥാനത്തെ ഒന്നിനെ നീക്കി നാലാംസ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ ഇരിക്കുന്നതിനെ ഗുണിച്ച നാലിനെ സഹസ്രസ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ വെയ്പൂ. ഇതു നാലാംക്രിയ. പിന്നെ മൂന്നാംസ്ഥാനത്തിരുന്ന ഒന്നിനെ നീക്കി നാലാംസ്ഥാനത്താക്കിവെച്ചതു യാതൊന്ന്, പിന്നേയുമതിനെ നീക്കി അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തിങ്കൽ ഇതിൻെറ വർഗ്ഗമൊന്നു വെയ്പൂ. ഇതു അഞ്ചാംക്രിയ. ഇങ്ങിനെ മൂന്നുസ്ഥാനമുള്ളതിൻെറ ക്രിയ. ഇതിൻെറ മൂലം ഇച്ചൊല്ലിയ വർഗ്ഗക്രിയയിങ്കന്നു വിപരീതമായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്. ഇവിടെ എല്ലായിലും ഒടുക്കത്തെ ക്രിയയാകുന്നതു് അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തിങ്കൽ ഒന്നിൻെറ വർഗ്ഗം വെക്ക. അവിടുന്ന് ഒന്നിൻെറ വർഗ്ഗം വാങ്ങുക. അവിടെ നടേത്തെ ക്രിയ ആകുന്നതു്. പിന്നെ കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്ന് ഇതിനെ ഇരട്ടിച്ച് ഹരിക്കുക. മുമ്പിൽ നാലാമതു ഗുണിച്ച വെക്കുക. പിന്നെ ഫലത്തിൻെറ വർഗ്ഗം അതിന്നു കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു വാങ്ങുക. പിന്നെയീ സ്ഥാനങ്ങൾ രണ്ടുംകൂടി കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു ഹരിക്ക. പിന്നെ ഫലത്തിൻെറ വർഗ്ഗം അതിന്നു കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു വാങ്ങുക. ഇങ്ങനെ വിപരീതക്രിയയുടെ പ്രകാരം. ഒടുക്കത്തെ ക്രിയ നടേത്തെ ക്രിയ, നടേത്തെ ക്രിയ ഒടുക്കത്തെ ക്രിയ. കൂട്ടുന്നേടത്തു കളയുക, കളയുന്നേടത്തു കൂട്ടുക. സ്ഥാനം കരേറുന്നേടത്തു കി

ഴിക്കും. ഇങ്ങനെ മൂലീകരണമാകുന്നതു വൎഗ്ഗക്രിയയുടെ വിപരീത ക്രിയ*.

വൎഗ്ഗയോഗമൂലവും വൎഗ്ഗാന്തരമൂലവും

പിന്നെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ രണ്ടു വൎഗ്ഗങ്ങളെ കൂട്ടി മൂലിച്ചു മൂലമുണ്ടാക്കണമെങ്കിൽ ചെറിയ രാശിയുടെ വൎഗ്ഗത്തിങ്കന്നു വലിയ രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. പിന്നെ ഫലത്തിന്റെ വൎഗ്ഗം വാങ്ങൂ. ഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ചു ഹാരകത്തിൽ കൂട്ടൂ. പിന്നേയുമിങ്ങനെ. ഇവിടെ ഹാൎയ്യത്തിന്റെ എത്രാം സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു ഹരിച്ചു, ഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിനെ ഹാരകത്തിന്റെ അത്രാംസ്ഥാനത്തു കൂട്ടേണ്ടൂ എന്നു നിയമം. പിന്നെ ഒടുക്കത്തെ ഹാരാൎദ്ധം യോഗമൂലമാകുന്നതു്. അവിടെ ഹരിച്ചാൽ എത്ര ഫലമുണ്ടാകുമെന്നു് ഊഹിച്ചിട്ടു് ആ ഫലത്തെ ഇരട്ടിയാതെ ഹാരകത്തിൽ കൂട്ടീട്ടാവു ഹരിപ്പതു് എങ്കിൽ പിന്നെ ഫലത്തിന്റെ വൎഗ്ഗത്തെ വേറെ വാങ്ങേണ്ടാ. അതു കൂടി പോയിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഹരിച്ചാലും ഫലത്തെ ഹാരകത്തിൽ കൂട്ടൂ. അപ്പോൾ ഇരട്ടിച്ചു കൂട്ടിയതായിരിക്കും. പിന്നെ കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു ഹരിക്കുമ്പോൾ എത്ര ഫലമുണ്ടാകുമെന്നതിനെക്കണ്ടു് അതിനെ ഹാരകത്തിന്റെ കീഴെ സ്ഥാനത്തു കൂട്ടീട്ടു ഹരിപ്പൂ. പിന്നേയും ഫലത്തെ കൂട്ടൂ. ഇങ്ങനെ ഹാൎയ്യമൊടുങ്ങുവോളം ക്രിയ ചെയ്പൂ.

---

* വൎഗ്ഗീകരണം: 123 × 123

(1) 3ന്റെ വൎഗ്ഗം വെക്ക					9
(2) 3×2×120 കൂട്ടുന്നു			7	2	..
(3) 20×20 കൂട്ടുന്നു (സ്ഥാനം കരേറുന്നു)			4	..	..
(4) 2×20×100 കൂട്ടുന്നു		4	..	..	..
(5) 100×100 കൂട്ടുക (സ്ഥാനം കരേറുന്നു)	1	..	..	..	..
വൎഗ്ഗം	1	5	1	2	9

ഫലം. 123

മൂലീകരണം 15129

(1) 100ന്റെ വൎഗ്ഗം കളയുന്നു 1

51

(2) ഫലം 1നെ ഇരട്ടിച്ച 2, 5ൽ രണ്ടാവൃത്തിപോവും. ഇങ്ങനെ നാലു കളയുന്നു 4

11

(3) ഫലവൎഗ്ഗം കളയുന്നു (ഫലത്തെ ഇറക്കുന്നു.) 4

729

(4) ഫലം 12ന്റെ ഇരട്ടി 24, 72ൽ മൂന്നാവൃത്തിപോവുന്നു. അതിനെ കളയുന്നു. 72

9

(5) ഒടുക്കത്തെ ഫലവൎഗ്ഗം 9 കളയുന്നു (സ്ഥാനം ഇറക്കുന്നു) 9

ഇങ്ങനെ മൂലീകരണം വൎഗ്ഗീകരണത്തിന്റെ വിപരീതക്രിയയാകുന്നു.

ഹാരകാൎദ്ധം യോഗവൎഗ്ഗമൂലം. ഇവിടെ വൎഗ്ഗയോഗത്തിങ്കന്നു വലിയ രാശിടെ വൎഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു മൂലത്തെ ഇരട്ടിച്ചുവെച്ചിരിക്കുന്നതു ഹാരകമാകുന്നതു് എന്നു കല്പിക്കുന്നതു്. സ്ഥാനവിഭാഗത്തിന്നു തക്കവണ്ണമല്ല നടേത്തെ വൎഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു, സംഖ്യാവിഭാഗത്തിന്നു തക്കവണ്ണമത്രെ എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ മൂലീകരണക്രിയയിങ്കന്നു വിശേഷമാകുന്നതു്. ഇങ്ങനെ വൎഗ്ഗയോഗമൂലീകരണം. പിന്നെ വൎഗ്ഗാന്തരമൂലമറിയേണ്ടിവരികിൽ ഇപ്രകാരംതന്നെ ഹാൎയ്യത്തേയും ഹാരകത്തേയുംവെച്ചു ഹരിക്കുന്നേടത്തു ഹാരകത്തിങ്കന്നു ഫലത്തെ കളഞ്ഞിട്ടു ഹരിക്കേണം. ഹരിച്ചനന്തരം ഫലത്തെ കളവൂതും ചെയ്വൂ. പിന്നെ സ്ഥാനം കിഴിച്ചിട്ടു ഹരിക്കുന്നേടത്തുണ്ടാകുന്ന ഫലത്തെ ഊഹിച്ചിട്ടു മുമ്പേ ഹാരകത്തിങ്കന്നു് അത്രാം സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞ ശേഷത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഹരിച്ചനന്തരം ഫലത്തെ കളവൂ. ഇങ്ങനെ ഹാൎയ്യാന്തം ക്രിയാ. ഒടുക്കത്തെ ഹാരകത്തെ അൎദ്ധിച്ചതു വൎഗ്ഗാന്തരമൂലമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ വൎഗ്ഗാന്തരമൂലം*.

---

* ഇവിടേയും മൂലീകരണപ്രകാരം മുമ്പിൽ പറഞ്ഞതുപോലെതന്നെ. മുമ്പിൽ സ്ഥാനവിഭാഗത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ക്രിയചെയ്തു. ഇവിടെ സംഖ്യാവിഭാഗത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ക്രിയ ചെയ്യേണം.

$12^2 + 9^2$ എന്നതിന്റെ മൂലം വരുത്തേണം.

ആദ്യത്തെ ക്രിയ 12ന്റെ വൎഗ്ഗം കളയുക. ശേഷം 81. ആദ്യഫലമായ 12നെ ഇരട്ടിച്ചതു 24 ഒരു ഹാരകം. 81 ഹാൎയ്യം. ഹാൎയ്യത്തിൽ ഹാരകം മൂന്നു് ആവൃത്തി പോവും. ശേഷം 9. രണ്ടാംഫലം 3. ഈ മൂന്നിന്റെ വൎഗ്ഗത്തെ 9ൽനിന്നു കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ശൂന്യം. രണ്ടാംഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ചതു് ആറു്. ദ്വിഗുണഫലയോഗം= $24+6=30$. ഇതിന്റെ അൎദ്ധം 15. അതു വൎഗ്ഗയോഗമൂലം. ഇങ്ങനെ രണ്ടു ക്രിയകളും തുല്യങ്ങൾ.

രണ്ടാംഫലത്തെ ദ്വിഗുണാദ്യഫലത്തിൽകൂട്ടി അതു ഹാരകമായിട്ടു ക്രിയ ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ, 27 എന്നു ഹാരകം കിട്ടും. ഇതുകൊണ്ടു ഹാൎയ്യത്തെ ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ 3 ഫലം കിട്ടും. ഇവിടെ ഫലവൎഗ്ഗം കളയേണ്ട. ഈ മൂന്നിനെ 27ൽകൂട്ടി അൎദ്ധിച്ചാൽ വൎഗ്ഗയോഗമൂലം വരും.

$$24\times3+3\times3=(24+3)\times3=81.$$

അന്തരമൂലീകരണത്തിൽ രണ്ടാംഫലത്തെ ആദ്യഫലത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു ഹാൎയ്യത്തെ ഹരിക്കേണം. രണ്ടാംഫലത്തെ കളഞ്ഞ ആദ്യഫലത്തിങ്കന്നു് ഇവിടെ കിട്ടിയ ഫലത്തേയും കളയേണം.

The following algebraical formulae have been proved in this chapter.

	Page.	*Line.*
$ab=a(b+x)-ax$	10	21
$ab=a(b-y)+by$	10	27
$ab=(a-x)(b+y)+bx-(a-x)y$	11	27
$ab=a\left(b+\frac{b}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\times a\left(b+\frac{b}{n}\right)$	12	1
$ab=a\left(b-\frac{b}{n}\right)+\frac{1}{n-1}\times a\left(b-\frac{b}{n}\right)$	12	6
$ab=a\left(b+\frac{mb}{n}\right)-\frac{m}{m+n}\times a\left(b+\frac{mb}{n}\right)$	12	32
$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$	19	20
$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$	21	18
$2(a^2+b^2)-(a+b)^2=(a-b)^2$	23	26
$a^2=(a+x)(a-x)+x^2$	24	19
$a^2-x^2=(a+x)(a-x)$	27	3
$1+3+5+\ldots\ldots$ to r terms$=r^2$.	27	23

(കവടിവെച്ചു വൎഗ്ഗിക്കുംപ്രകാരം:—

347-ന്റെ വൎഗ്ഗം. [പേജ് 18. ഫുട്ട്നോട്ട്]

(1)		9	...	...	...	...	അന്ത്യവൎഗ്ഗം
		2	4	...	...	...	2 × അന്ത്യം × ഉപാന്ത്യം
			4	2	...	...	2 × അന്ത്യം × ആദ്യം
(2)	1	1	8	2	...	...	യോഗം
			1	6	...	...	അന്ത്യത്തെക്കളഞ്ഞു് ഒരു സ്ഥാനം ഇറക്കിയ ഉപാന്ത്യവൎഗ്ഗം
				5	6	...	അപ്രകാരം തന്നെയുള്ള ഉപാന്ത്യത്തെ ഇരട്ടിച്ചതുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ആദ്യം
(3)	1	2	0	3	6	...	യോഗം
					4	9	ഉപാന്ത്യത്തെയും കളഞ്ഞു പിന്നെയും ഒരു സ്ഥാനം ഇറക്കിയ ആദ്യവൎഗ്ഗം
	1	2	0	4	0	9	സംഖ്യയുടെ വൎഗ്ഗം
(3)←	...	...	...	...	...	7	ഉപാന്ത്യത്തെ കളഞ്ഞു പിന്നേയും ഒരു സ്ഥാനം ഇറക്കിയതു
(2)←	...	...	...	4	7	...	അന്ത്യത്തെ കളഞ്ഞു ഒരു സ്ഥാനം ഇറക്കിയതു
(1)←	...	3	4	7	...	...	സംഖ്യ

$$(a+b+c+\ldots)^2=a^2+2a(b+c+\ldots)+b^2+2b(c+\ldots)+c^2+\ldots$$

രണ്ടാമദ്ധ്യായം

ദശപ്രശ്നോത്തരം

അനന്തരം രണ്ടു രാശികളുടെ യോഗം, അന്തരം, ഘാതം, വൎഗ്ഗയോഗം, വൎഗ്ഗാന്തരം എന്നീ അഞ്ചുവസ്തുക്കളിൽ ഈരണ്ടു വസ്തുക്കളെ അറിഞ്ഞാൽ അവ സാധനമായിട്ടു രണ്ടു രാശികളേയും വേറെ അറിയുംപ്രകാരം*. ഇവിടെ രണ്ടു രാശിയുടെ യോഗത്തിൽ അവററിന്റെ അന്തരത്തെ കൂട്ടിയാൽ വലിയ രാശിയുടെ ഇരട്ടിയായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ആ യോഗത്തിങ്കന്നുതന്നെ ആയന്തരത്തെ കളഞ്ഞാൽ ചെറിയ രാശിയുടെ ഇരട്ടിയായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ രണ്ടിനേയും അൎദ്ധിച്ചാൽ രാശികൾ രണ്ടുമുളവാകും$. അനന്തരം യോഗവും ഘാതവും അറിഞ്ഞാൽ രാശികളെ അറിയുംപ്രകാരം. അവിടെ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം യോഗത്തിന്റെ വൎഗ്ഗത്തിങ്കന്നു നാലിൽ ഗുണിച്ച ഘാതത്തെ കളഞ്ഞ ശേഷത്തെ മൂലിച്ചതു രാശ്യന്തരം. പിന്നെ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞപോലെ വേർപ്പെടുത്തിക്കൊള്ളു രാ

---

* "രാശ്യോൎയ്യോഗോഭിദാഘാതോ വൎഗ്ഗയോഗസ്തദന്തരം।
ഏഷു ദ്വാഭ്യാം ദശവിധം രാശ്യോരാനയനം ഭവേൽ॥
യോഗോ ഭേദാദിസംയുക്തോ ഭേദോ ഘാതാദിനാ തഥാ।
സോഽന്തരോത്തരസംയുക്താശ്ചൈവം ഘാതാദയഃ പരേ" ॥(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

യോഗം, അന്തരം, ഘാതം, വൎഗ്ഗയോഗം, വൎഗ്ഗാന്തരം, ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു സാധനങ്ങളെക്കൊണ്ടു രാശികളെ വേറെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെയാണിവിടെ വിവരിക്കുന്നതു്. ഇങ്ങനെ പ്രശ്നങ്ങൾ പത്തുവിധമുണ്ടു്.

(i) യോഗം, അന്തരം
(ii) യോഗം, ഘാതം
(iii) യോഗം, വൎഗ്ഗയോഗം
(iv) യോഗം, വൎഗ്ഗാന്തരം.
(v) അന്തരം, ഘാതം
(vi) അന്തരം, വൎഗ്ഗയോഗം
(vii) അന്തരം, വൎഗ്ഗാന്തരം
(viii) ഘാതം, വൎഗ്ഗയോഗം
(ix) ഘാതം, വൎഗ്ഗാന്തരം
(x) വൎഗ്ഗയോഗം, വൎഗ്ഗാന്തരം

$ രാശികളെ ക, ഖ എന്നു കല്പിക്കുക.
(i) ക + ഖ, ക — ഖ എന്നു ജ്ഞാതങ്ങൾ.
"രാശിദ്വയം പൃഥക്കാൎയ്യം യഥാ തത്തു തഥോച്യതേ।
യോഗേ ഭേദയുതേ ദ്വിഘ്നോ മഹാനല്പസ്തു ഭിന്നിതേ॥
അൎദ്ധീകൃതൌ തു തൌ സ്യാതാം രാശീ ദ്വൌ മഹദല്പകൌ." ॥(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ശികൾ രണ്ടിനേയും*. പിന്നെ യോഗവും വർഗ്ഗയോഗവും. അവിടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിങ്കന്നു യോഗവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു മൂലിച്ചതു് അന്തരം†. പിന്നെ യോഗത്തെക്കൊണ്ടു വർഗ്ഗാന്തരത്തെ ഹരിച്ച ഫലം രാശ്യന്തരമായിട്ടുവരും, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു്||. അനന്തരം അന്തരവും ഘാതവും. അവിടെ ഘാതത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചതിൽ അന്തരവർഗ്ഗത്തെക്കൂട്ടി മൂലിച്ചതു രാശിയോഗമായിട്ടിരിക്കും‡. വർഗ്ഗയോഗത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിങ്കന്നു് അന്തരവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു മൂലിച്ചതു രാശിയോഗം§. പിന്നെ അന്തരത്തെക്കൊണ്ടു വർഗ്ഗാന്തരത്തെ

$$\text{യോഗാന്തരയോഗാർദ്ധം} = \frac{(\text{ക}+\text{ഖ})+(\text{ക}-\text{ഖ})}{2} = \text{ക}.$$

$$\text{യോഗാന്തരാന്തരാർദ്ധം} = \frac{(\text{ക}+\text{ഖ})-(\text{ക}-\text{ഖ})}{2} = \text{ഖ}.$$

* (ii) ക + ഖ, ക.ഖ.

രാശ്യോശ്ചതുർഗ്ഗുണേ ഘാതേ ത്യക്തേ യോഗസ്യ വർഗ്ഗതഃ ।
ശിഷ്യതേന്തരവർഗ്ഗസ്സ്യാന്മൂലയോഗാദിനാ തഥാ ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$(\text{ക}+\text{ഖ})^2 - 4\text{ക}.\text{ഖ} = (\text{ക}-\text{ഖ})^2$. പിന്നെ യോഗാന്തരങ്ങളെക്കൊണ്ടുള്ളതുപോലെ ക്രിയ.

† (iii) ക + ഖ, $\text{ക}^2+\text{ഖ}^2$.

യോഗവർഗ്ഗാദ്വർഗ്ഗയോഗേ ത്യക്തേ ദ്വിഘ്നസ്സയോർവ്വധഃ ।
തദൂനിതാദ്വർഗ്ഗയോഗമൂലം ഭേദസ്തതോപി തൌ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$$\left.\begin{array}{l}(\text{ക}+\text{ഖ})^2-(\text{ക}^2+\text{ഖ}^2)=2\text{ക}.\text{ഖ}.\\ (\text{ക}+\text{ഖ})^2-4.\text{ക}.\text{ഖ}=(\text{ക}-\text{ഖ})^2.\end{array}\right\}\therefore 2\text{ക}^2+2\text{ഖ}^2-(\text{ക}+\text{ഖ})^2=(\text{ക}-\text{ഖ})^2$$

പിന്നെ യോഗാന്തരങ്ങളെക്കൊണ്ടുള്ളതുപോലെ ക്രിയ.

|| (iv) ക + ഖ, $\text{ക}^2-\text{ഖ}^2$

വർഗ്ഗാന്തരാദ്യോഗഭക്താ ഭേദസ്തേനാപി പൂർവ്വവൽ । (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$$\frac{\text{ക}^2-\text{ഖ}^2}{\text{ക}+\text{ഖ}} = \text{ക}-\text{ഖ}.$$

പിന്നെ (i)ൽ കാണിച്ചപോലെ ക്രിയ.

‡ (v) ക − ഖ, ക.ഖ.

ഭേദകൃത്യാധികോ യോഗവർഗ്ഗോ ഘാതാച്ചതുർഗ്ഗുണാൽ ।
ഭേദവർഗ്ഗയുതാത്തസ്മാന്മൂലം രാശ്യോര്യുതിർഭവേൽ ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$4.\ \text{ക}.\text{ഖ}+(\text{ക}-\text{ഖ})^2=(\text{ക}+\text{ഖ})^2$

പിന്നെ (i)ൽ കാണിച്ചപോലെ ക്രിയ.

§ (vi) ക − ഖ, $\text{ക}^2+\text{ഖ}^2$

ഭേദകൃത്യാധികോ വർഗ്ഗയോഗോ ഘാതദ്വയാധിക ।
ഘാതസ്തതോ വർഗ്ഗയോഗാൽ ഭേദവർഗ്ഗോനിതാദ്ദളം ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഹരിച്ചതു യോഗം.* അനന്തരം ഘാതവും വർഗ്ഗയോഗവും. അവിടെ ഘാതത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിനെ വർഗ്ഗയോഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു ശേഷത്തിന്റെ മൂലം അന്തരം. നാലിൽ ഗുണിച്ച ഘാതത്തിൽ അന്തരവർഗ്ഗം കൂട്ടി മൂലിച്ചതു യോഗം†. പിന്നെ ഘാതവും വർഗ്ഗാന്തരവും. അവിടെ രാശികൾ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗങ്ങളുണ്ടാകുന്നതു്. അതിൻപ്രകാരം ഇവിടെ രാശികളെക്കൊണ്ടു ചെയ്യുന്ന ക്രിയകളെ വർഗ്ഗങ്ങളാകുന്ന രാശികളെക്കൊണ്ടു ചെയ്യാം. എന്നാൽ ഫലങ്ങളും വർഗ്ഗരൂപങ്ങളായിട്ടിരിക്കും എന്നേ വിശേഷമുള്ളൂ. അവിടെ ഘാതത്തെ വർഗ്ഗിച്ചാൽ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും, ഗുണനത്തിങ്കൽ ക്രമഭേദംകൊണ്ടു ഫലഭേദമില്ല. ആകയാൽ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ഘാതവും അന്തരവും അറിഞ്ഞതു് എന്നു കല്പിച്ചിട്ടു രാശ്യന്തരവും ഘാതവും അറിഞ്ഞിട്ടു രാശിയോഗത്തെ ഉണ്ടാക്കുംവണ്ണം വർഗ്ഗയോഗത്തെ ഉണ്ടാക്കാം. അവിടെ ഘാതവർഗ്ഗത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ച വർഗ്ഗാന്തരവർഗ്ഗവും കൂട്ടി മൂലിച്ചതു വർഗ്ഗയോഗമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഈ വർഗ്ഗയോഗത്തെ രണ്ടേടത്തു വെച്ചു് ഒന്നിൽ വർഗ്ഗാന്തരത്തെ കൂട്ടൂ, മറ്റേതിങ്കന്നു കളവൂ. പിന്നേ രണ്ടിനേയും അർദ്ധിപ്പൂ. അവ രാശികൾ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗമായിട്ടി

$\text{ക}^2+\text{ഖ}^2-(\text{ക}-\text{ഖ})^2=2\text{ക}.\text{ഖ}$

$\therefore 2\text{ക}^2+2\text{ഖ}^2-(\text{ക}-\text{ഖ})^2=(\text{ക}+\text{ഖ})^2$

പിന്നെ (i)ലെപ്പോലെ ക്രിയ.

* (vii) $\text{ക}-\text{ഖ}$, $\text{ക}^2-\text{ഖ}^2$.

വർഗ്ഗാന്തരാൽ ഭേദഭക്താ യോഗോ രാശീ ഇ പൂർവ്വവൽ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$\frac{\text{ക}^2-\text{ഖ}^2}{\text{ക}-\text{ഖ}}=\text{ക}+\text{ഖ}$.

പിന്നെ (i)ലെപ്പോലെ ക്രിയ.

† (viii) $\text{ക}\text{ഖ}$, $\text{ക}^2+\text{ഖ}^2$.

ദ്വിഘ്നഘാതയുതോ വർഗ്ഗയോഗോ യോഗകൃതിർഭവേൽ।
തദൂനിതോ വർഗ്ഗയോഗോ ഭേദവർഗ്ഗസ്തയോർമ്മതഃ॥
തന്മൂലാഭ്യാം പ്രസാധ്യേതാം രാശീ യോഗാദികർമ്മണാ. (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$\sqrt{\text{ക}^2+\text{ഖ}^2+2\text{ക}.\text{ഖ}}=\text{ക}+\text{ഖ}$.

$\sqrt{\text{ക}^2+\text{ഖ}^2-2\text{ക}.\text{ഖ}}=\text{ക}-\text{ഖ}$.

പിന്നെ (i)ലെപ്പോലെ ക്രിയ.

രിക്കം*. പിന്നെ വർഗ്ഗയോഗവും വർഗ്ഗാന്തരവും അറിഞ്ഞു പത്താമതു്. അതും ചൊല്ലീതായി$. ഇങ്ങനെ ദശപ്രശ്നങ്ങൾ. ഇവററിന്നു പലേടത്തും ഉപയോഗമുണ്ടു്, എന്നിട്ടു ചൊല്ലീ.

ഘനമൂലങ്ങൾക്കു ഗ്രഹഗണിതത്തിങ്കലെ ഉപയോഗമില്ല. എന്നിട്ടു് അവററെ ഇവിടെ ചൊല്ലുന്നീല. ഇങ്ങനെ ഒരു വഴി പരികർമ്മങ്ങൾ.

---

* $ (ix), (x):

(ix) കഖ, $ക^2-ഖ^2$, (x) $ക^2+ഖ^2$, $ക^2-ഖ^2$.

വർഗ്ഗാന്തരസ്യ വർഗ്ഗേണ ഘാതവർഗ്ഗശ്ചതുർഗ്ഗുണഃ।
യുക്തോ യോസ്യ പദം ദ്വിഷ്ഠം വർഗ്ഗാന്തരയുതോനിതം।
ദളിതം മൂലിതം രാശിദ്വയമന്തേപ്യയം വിധിഃ।
ഇതീരിതം ദശവിധം രാശ്യോരാനയനം വിധിഃ ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം).

(ix) $\sqrt{(ക^2-ഖ^2)^2+4ക^2.ഖ^2}=ക^2+ഖ^2.$

$$\sqrt{\frac{(ക^2+ഖ^2)+(ക^2-ഖ^2)}{2}}=ക.$$

$$\sqrt{\frac{(ക^2+ഖ^2)-(ക^2-ഖ^2)}{2}}=ഖ.$$

(x) $$\sqrt{\frac{(ക^2+ഖ^2)+(ക^2-ഖ^2)}{2}}=ക.$$

$$\sqrt{\frac{(ക^2+ഖ^2)-(ക^2-ഖ^2)}{2}}=ഖ.$$

മൂന്നാമദ്ധ്യായം

ഭിന്നഗണിതം

അനന്തരം നാനാപ്രകാരങ്ങളായി അവയവങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന രാശികളുടെ സംകലിതാദികളെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ തികഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഒന്നിനു രൂപമെന്നു പേർ*. ഇങ്ങനെ പൂർണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്ന ഒന്നിൻ പൂർണ്ണരൂപമായിട്ടേ ഇരിക്കുന്ന ഒന്നിനെ കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാകും. പിന്നേയുമതിൽ അവ്വണ്ണമിരിപ്പൊന്നു കൂട്ടിയാൽ മൂന്നാകും. പിന്നെ ഈ മൂന്നിങ്കന്നു പൂർണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്ന ഒന്നിനെ കളഞ്ഞാൽ രണ്ടുണ്ടാകും. ഇതിങ്കന്നു രൂപം പോയാൽ ഒന്നാകും. ഇങ്ങനെ സദൃശങ്ങളാകുന്നവററിൻെറ യോഗംകൊണ്ടു മീത്തെ മിത്തെ സംഖ്യ ആയിട്ടു വരും. അവ്വണ്ണമേ സദൃശങ്ങളുടെ വിയോഗംകൊണ്ടു കീഴെ കീഴെ സംഖ്യയും വരും. സദൃശങ്ങളല്ലാത്തവററിൻെറ യോഗമാകുന്നതു് ഒന്നിൽ അര താൻ കാൽ താൻ കൂട്ടുക. എന്നാൽ അതു രണ്ടെന്നു വരാ. രണ്ടിൽ അര താൻ കാൽ താൽ കുറഞ്ഞതു ഒന്നാകയുമില്ല. ആകയാൽ സദൃശങ്ങൾക്കേ യോഗവിയോഗങ്ങൾക്കു് ആഞ്ജസ്യമുള്ളൂ$. യോഗവിയോഗങ്ങൾകൊണ്ടു സംഖ്യ ഏറുകയും കുറയുകയും ചെയ്യേണം. അ

---

* $4\frac{3}{5}$ എന്ന സംഖ്യയിൽ 4, $\frac{3}{5}$ ഈ രണ്ടു സംഖ്യകളും വേർപെട്ടിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ നാലിനെ പൂർണ്ണരൂപങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ നാലു രൂപങ്ങൾ എന്നുപറയുന്നു. $\frac{3}{5}$ എന്നതിനെ ഭിന്നസംഖ്യ എന്നുപറയുന്നു, ഭിന്നസംഖ്യകൾ അവയവിയായിരിക്കുന്ന പൂർണ്ണരൂപങ്ങളുടെ അവയവങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. $\frac{3}{5}$ എന്നുവെച്ചാൽ പൂർണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്ന ഒന്നിനെ അഞ്ചായി ഭാഗിച്ചതിൽ മൂന്നംശമെന്നും മൂന്നിനെ അഞ്ചായി പകുത്തിട്ടൊരു ഭാഗം അല്ലെങ്കിൽ ഒരു കൂറെന്നും പറയുന്നു. അപ്പോൾ $\frac{3}{5}$നെ അഞ്ചിലിറങ്ങിയ മൂന്നെന്നും മൂന്നിനെ അഞ്ചേടത്തു പകുത്തിട്ടൊരു കൂറെന്നും പറയാം. $\frac{3}{5}$ എന്നതിൽ 3നു അംശമെന്നും 5നു ഛേദമെന്നും പേർ.

$ സദൃശങ്ങൾ, സവർണ്ണങ്ങൾ, വർണ്ണമൊത്തവ ഇവയെല്ലാം പര്യായപദങ്ങൾ. സദൃശങ്ങൾക്കു മാത്രമേ യോഗവിയോഗങ്ങൾക്കു് അർഹതയുള്ളൂ. 1, 2, 3,........ഇവയെ ഒരൊന്നു്, രണ്ടൊന്നുകൾ, മൂന്നൊന്നുകൾ........എന്നിങ്ങനെ കല്പിക്കാം. അങ്ങനെ അവ സദൃശങ്ങളാകകൊണ്ടു അവ തങ്ങളിൽ യോശവിയോഗങ്ങൾ ചെയ്യാം. എന്നാൽ നാലൊന്നു് ($\frac{1}{4}$), അഞ്ചൊന്നു് ($\frac{1}{5}$) ഇവ സദൃശങ്ങളല്ല. ഇവ തങ്ങളിൽ യോഗവിയോഗങ്ങൾ ചെയ്യുവാൻ പാടില്ല. യോഗവിയോഗങ്ങൾ ചെയ്യേണമെന്നുണ്ടെങ്കിൽ അവയെ സമച്ഛേദങ്ങളാക്കി വർണ്ണമൊപ്പിക്കേണം.

തേ അഞ്ചെസാലുള്ള യോഗവിയോഗങ്ങളായിട്ടിരിപ്പൂ. ഒന്നേകാൽ കുറയ രണ്ട് എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളേടത്ത് എല്ലാം യോഗവിയോഗങ്ങൾ ഉണ്ടായീലാ, വേർപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്രെ. ആകയാൽ ഭിന്നപ്രമാണങ്ങളാകുന്ന അവയവങ്ങൾ തങ്ങളിത്താൻ അവയവവും അവയവിയും തങ്ങളിത്താൻ യോഗവിയോഗങ്ങൾ ചെയ്യേണ്ടുകിൽ, വർണ്ണമൊപ്പിച്ചിട്ട് ഒരു തരമേ ആക്കിക്കൊണ്ടിട്ടുവേണം. വർണ്ണമൊപ്പിക്കുംപ്രകാരം, പിന്നെ. ഒരു രൂപത്തിന്റെ അഞ്ചൊന്നും നാലൊന്നും തമ്മിൽ കൂട്ടേണമെങ്കിൽ അവിടെ ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു നാലു ഹരിച്ചതിൽ ഒരു കൂറു നാലൊന്നാകുന്നത്. അതിനെ അഞ്ചു ഹരിച്ചാൽ ഇരുപതു ഹരിച്ചതിൽ അഞ്ചുകൂറായിട്ടിരിക്കും. രൂപത്തിൽ അഞ്ചൊന്നു പിന്നെ രൂപത്തെ അഞ്ച് അംശിച്ചതിൽ ഒരു കൂറ്. അതിനെ പിന്നെ നാലുഹരിച്ചാൽ ഇരുപത് അംശിച്ചതിൽ നാലു കൂറായിട്ടിരിക്കും. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ അഞ്ചൊന്നായിരിക്കുന്ന നാലും നാലൊന്നായിരിക്കുന്ന അഞ്ചും തങ്ങളിൽ വർണ്ണമൊക്കയാൽ യോഗവിയോഗങ്ങൾ ചെയ്യാം. രണ്ടു വകയും ഇരുപതാലൊന്നാകയാൽ വർണ്ണമൊക്കുന്നു. ഇവിടെ നാലൊന്നിലൊന്നാകുന്നവ നാലുകൂട്ടിയവ പൂർണ്ണരൂപമാകുന്നത് എന്നറിവാനടയാളമായിട്ടു നാലിനെ ഛേദമായിട്ടു കീഴെ വെപ്പൂ, ഒന്നിനെ അംശമായിട്ടു മേലേയും വെപ്പൂ. പിന്നെ അഞ്ചൊന്നിങ്കൽ അഞ്ചിനെ കീഴെ ഛേദമായിട്ടും ഒന്നിനെ മീത്തെ അംശമായിട്ടും വെപ്പൂ. പിന്നെ നാലൊന്നിന്റെ ഛേദമായ നാലിനെക്കൊണ്ട് അഞ്ചൊന്നിന്റെ ഛേദമായ അഞ്ചിനേയും അംശമായ ഒന്നിനേയും ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ അഞ്ചാകുന്ന ഛേദത്തെക്കൊണ്ടു നാലൊന്നിന്റെ ഛേദമാകുന്ന നാലിനേയും അംശമാകുന്ന ഒന്നിനേയും ഗുണിപ്പൂ. ഈവണ്ണമാകുമ്പോൾ രണ്ടിങ്കലും ഛേദസംഖ്യ ഇരുപതായിട്ടിരിക്കും. അംശങ്ങൾ നാലൊന്നിങ്കൽ അഞ്ചും അഞ്ചൊന്നിങ്കൽ നാലും അയിട്ടിരിക്കും. ഇവിടേയും നാലൊന്നുമഞ്ചൊന്നുമായിട്ടിരിക്കുന്നതിന്നു വിശേഷമില്ല. ഒട്ടേറെ ചെറിയ നുറുക്കുകൾ ഇപ്പോൾ എന്നേ വിശേഷമുള്ളു. ഇങ്ങനെ ഒന്നിന്റെ ഛേദത്തെക്കൊണ്ടു മറേറതിന്റെ ഛേദത്തേയും അംശത്തേയും ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ മറേറതിന്റെ ഛേദംകൊണ്ട് ഈ ഛേദത്തേയും അംശത്തേയും ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ സമഛേദങ്ങളായി വർണ്ണമൊത്തിരിക്കും*. ആകയാൽ

* സമച്ഛേദമാക്കുംപ്രകാരവും അതിന്റെ യുക്തിയും:

അന്യോന്യഹാരൈർന്നിഘ്നാൻ ഹാരകാനംശകാനപി ।

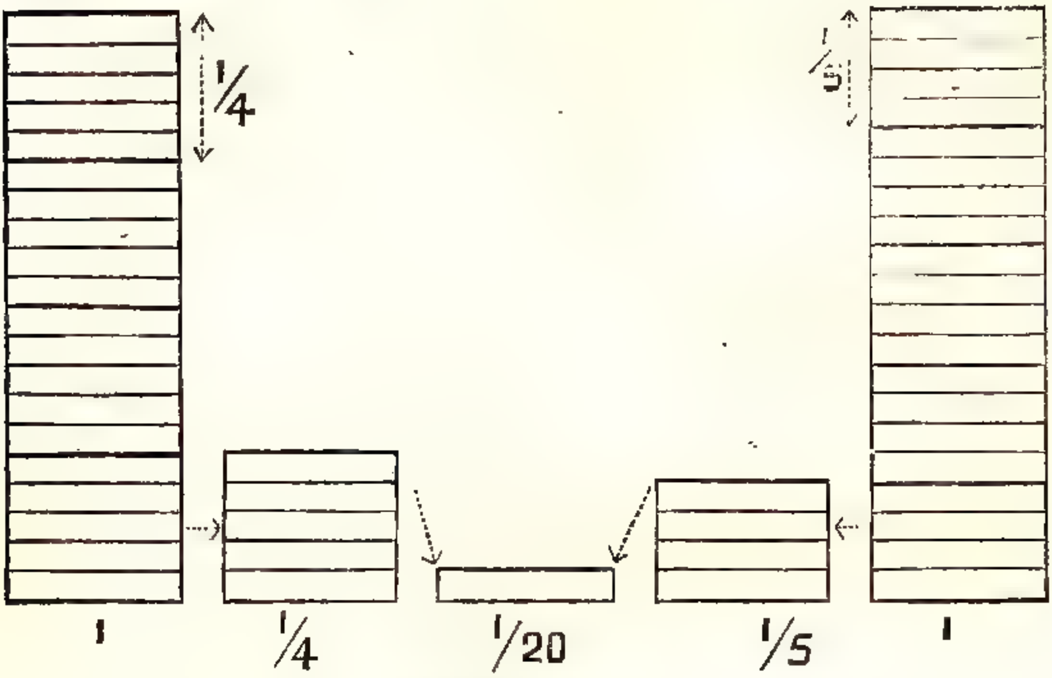
ഏവം ച ഛേദയോർവ്വൃദ്ധ്യനാം വാ സ്യാൽ സമച്ഛേദതാമിയുഃ ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഓരോ സംഖ്യയുടെ അംശത്തേയും ഛേദത്തേയും തദിതരങ്ങളായ സംഖ്യകളുടെ ഹാരകങ്ങളെല്ലാംകൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. എന്നാലെല്ലാസംഖ്യകളും സമച്ഛേദങ്ങളായിട്ടുവരും.

$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7},$

$$\frac{1\times4\times5\times7}{3\times4\times5\times7},\ \frac{1\times3\times5\times7}{4\times3\times5\times7},\ \frac{1\times3\times4\times7}{5\times3\times4\times7},\ \frac{1\times3\times4\times5}{7\times3\times4\times5},$$

$$\frac{140}{420},\ \frac{105}{420},\ \frac{84}{420},\ \frac{60}{420},$$



പരിലേഖം 15.

അഞ്ചൊന്നും നാലൊന്നും വെച്ചിട്ടാണിതിൻെറ യുക്തി കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു്. പരിലേഖം 15ൽ ഒരു ക്ഷേത്രത്തെ നാലു തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു. വേറെ ഒരു തുല്യക്ഷേത്രത്തെതന്നെ അഞ്ചു തുല്യ ഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടും ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു. ആദ്യത്തേതിൽ ഒരു ഖണ്ഡത്തെ അഞ്ചു തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായി പിന്നേയും പകുത്തിരിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തേതിലും ഒരു ഖണ്ഡത്തെ നാലുതുല്യഖണ്ഡങ്ങളായി പിന്നേയും പകുത്തിരിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ രണ്ടു ക്ഷേത്രത്തിലും ഇരുപതുവീതം ചെറിയ തുല്യഖണ്ഡങ്ങളുണ്ടു്. അവയെല്ലാം അന്യോന്യം തുല്യങ്ങളുമാകുന്നു. ഓരോ ചെറിയ ഖണ്ഡം ക്ഷേത്രത്തിൻ ഇരുപതാലൊന്നായിരിക്കും. അപ്പോൾ ഇരുപതു ഖണ്ഡങ്ങളുള്ള ക്ഷേത്രത്തിൻ അഞ്ചുഖണ്ഡങ്ങൾ കൂടിയതു ക്ഷേത്രത്തിൻെറ നാലൊന്നാകുന്നു. അപ്പോൾ നാലൊന്നിനെ ഇരുപതു ഛേദവും അഞ്ചു് അംശവുമായിരിക്കുന്ന ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയെന്നു കല്പിക്കാമെന്നു വന്നു. അങ്ങനെതന്നെ അഞ്ചൊന്നിനെ ഇരുപതു ഛേദവും നാലംശവുമായിരിക്കുന്നൊരു ഭിന്നസംഖ്യ എന്നു കല്പിക്കാം. ഇങ്ങനെ കല്പിക്കുമ്പോൾ അവ സമച്ഛേദങ്ങളായി. പിന്നെ നാലൊന്നു് അഞ്ചു് ഇരുപതാലൊന്നുകളെന്നും അഞ്ചൊന്നു നാലു് ഇരുപതാലൊന്നുകളെന്നും വന്നു. അപ്പോൾ അവ സദൃശങ്ങളായതുകൊണ്ടു യോഗവിയോഗങ്ങൾക്കു യോഗ്യമായി. സദൃശങ്ങളാക്കുവാൻ സമച്ഛേദം ചെയ്യേണമെന്നും വന്നു.

ഇവററിൻെറ യോഗത്തിങ്കൽ ഒമ്പതായിട്ടിരിക്കും, അന്തരത്തിങ്കൽ ഒന്നുമായിട്ടിരിക്കും*. ഇവ പൂൎണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്ന ഒന്നിൻെറ ഇരുപതാലൊന്നുതാനും. ഇങ്ങനെ പലവക ഉണ്ടായിരിക്കിലും സമച്ഛേദങ്ങളാക്കാം. അവിടെ ഛേദംകൊണ്ടു്, തന്നേയും തൻെറ അംശത്തേയും ഒഴിച്ചു് എല്ലാറേറയും ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ സമച്ഛേദങ്ങളായി സംകലിതവ്യവകലിതയോഗ്യങ്ങളായിട്ടു വരും. പിന്നെ ഇവറോടു് ഒരു പൂൎണ്ണരൂപത്തെ കൂട്ടേണമെങ്കിൽ ഈ സമച്ഛേദത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചുകൊള്ളൂ. എന്നാൽ അവയവങ്ങളോടു വൎണ്ണമൊക്കമാറുവരും പൂൎണ്ണരൂപമായിട്ടിരിക്കുന്നതു്||. ഇങ്ങനെ സവൎണ്ണനം.

അംശഗുണനം

അനന്തരം അവയവത്തിൻെറ ഗുണനം. അവിടെ ഒരു രൂപത്തിൻെറ ചതുരംശം ഗുണ്യം, ചില പൂൎണ്ണരൂപങ്ങൾ ഗുണകാരങ്ങൾ എന്നും വരുമ്പോൾ ഗുണകാരത്തിൻെറ വ്യക്തികൾ എത്ര അത്ര സ്ഥാനത്തുവെപ്പൂ ഗുണ്യമാകുന്ന ചതുരംശത്തെ. പിന്നെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടുതും ചെയ്വൂ. അപ്പോൾ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ഖണ്ഡഗുണനന്യാ

---

* "കൃത്വാൽ സമച്ഛിദാമേവ രാശീനാം യോഗമന്തരം"॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

$=\frac{1\times5}{4\times5}+\frac{1\times4}{5\times4}$.

$=\frac{5}{20}+\frac{4}{20}=\frac{9}{20}$.

$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{5}{20}-\frac{4}{20}=\frac{1}{20}$.

|| പൂൎണ്ണരൂപങ്ങൾക്കു ഛേദം രൂപമെന്നു കല്പിക്കാം.

$2+\frac{3}{7}$.

$=\frac{2}{1}+\frac{3}{7}$.

$=\frac{2\times7}{1\times7}+\frac{3\times1}{7\times1}$.

$=\frac{14}{7}+\frac{3}{7}$

$=\frac{17}{7}$

ഇങ്ങനെ പൂൎണ്ണങ്ങളേയും ഭിന്നസംഖ്യകളേയും സമച്ഛേദങ്ങളാക്കി യോഗവിയോഗം ചെയ്യാം.

യത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ആ ഗുണ്യത്തെ ഗുണിച്ചതായിട്ടു വരും. അവിടെ ഗുണകാരത്തിങ്കൽ പത്തുരൂപവ്യക്തികൾ ഉണ്ട് എന്നിരിപ്പൂ. അപ്പോൾ രൂപചതുരംശത്തെ പത്തേടത്തു് ഉണ്ടാക്കൂ. അവററിന്റെ യോഗം ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. അതു പിന്നെ സമച്ഛേദങ്ങളായിരിപ്പോ ചിലവ പത്തു് അംശങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇതു ഹേതുവായിട്ടുതന്നെ രൂപചതുരംശത്തെക്കൊണ്ടു പത്തിനെ ഗുണിച്ചാലും വിശേഷമില്ല, പത്തു ചതുരംശമായിട്ടു ഇരിക്കുമത്രേ. ഗുണ്യാവൃത്തമായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരവും ഗുണകാരാവൃത്തമായിരിക്കുന്ന ഗുണ്യവും ഒന്നുതന്നെ എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലീ, എന്നിട്ടു്. ഇങ്ങനെ ആകുമ്പോൾ ഛേദമുണ്ടാകയാൽ ഛേദംകൊണ്ടു ഹരിച്ചേ ഗുണിച്ചുണ്ടായ പൂർണ്ണരൂപങ്ങളായിട്ടു വരൂ എന്നേ വിശേഷമുള്ളൂ. ഇങ്ങനെ ഗുണ്യഗുണകാരങ്ങളിൽവെച്ചു് ഒന്നിങ്കൽ ഛേദമുണ്ടായിരിക്കുമ്പോൾ. പിന്നെ രണ്ടിങ്കലുംകൂടി ഛേദമുണ്ടായിരിക്കിൽ ഛേദങ്ങൾ രണ്ടിനെക്കൊണ്ടും ഹരിക്കേണം. ആകയാൽ ഛേദങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. ആകയാൽ അവയവഗുണനത്തിങ്കൽ ഗുണ്യഗുണകാരങ്ങളുടെ അംശങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിപ്പൂ, ഛേദങ്ങൾ തങ്ങളിലും ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഗുണ്യഗുണകാരങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടു വരും. ആകയാൽ അഞ്ചൊന്നും നാലൊന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ ഇരുപതാലൊന്നായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ അംശഗുണനം*.

---

* "ഗുണഗുണ്യാംശകവധം തയോശ്ഛേദവധേന തു ।
ഹൃത്വാപ്തം ഭിന്നഗുണനേ ഫലം സ്യാൽ........" ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽവെച്ചു് ഒന്നിന്നുമാത്രം ഛേദമുണ്ടായിരിക്കുമ്പോൾ:—

ഗുണ്യം=രൂപത്തിന്റെ ചതുരംശം= $\frac{1}{4}$.
ഗുണകാരം =10.

ഖണ്ഡഗുണനന്യായേന

$$\frac{1}{4}\times10=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1+1+1+1+1+1+1+1+1+1}{4}$$
$$=\frac{10}{4}$$

അഥവാ, പത്തിനെക്കൊണ്ടൊരു ചതുരംശത്തെ ഗുണിച്ചാലും പത്തു ചതുരംശം തന്നെ $=\frac{10}{4}$.

ഗുണഗുണ്യങ്ങൾ രണ്ടിലും ഛേദമുണ്ടായിരിക്കുമ്പോൾ:—

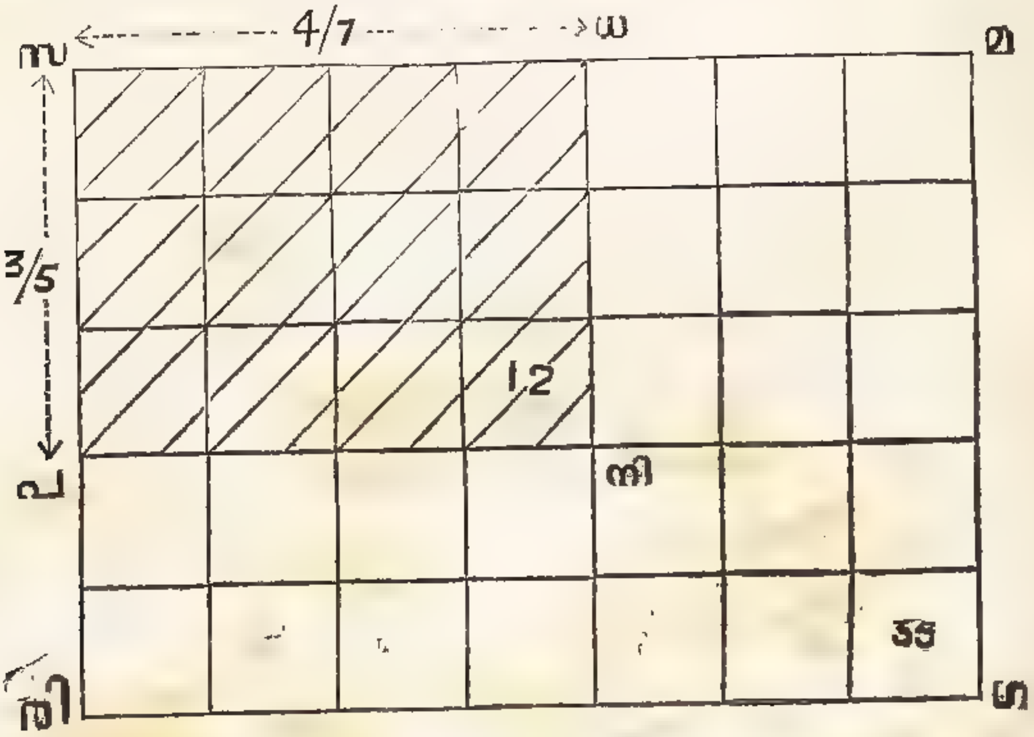
$\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}$

അംശഭാഗഹരണം

അനന്തരം അംശഭാഗഹരണം. ഇവിടെ അംശരൂപമായിരിക്കു ന്ന ഹാരകത്തെ അവ്വണ്ണമിരിക്കുന്ന ഹാര്യത്തിങ്കന്ന് എത്ര ആവൃത്തി കളയാം അത്ര പൂണ്ണരൂപങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന ഫലങ്ങളുളവാകും എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംതന്നെ അത്രേ ഇവിടേയ്ക്കുമാകുന്നത്. അവിടെ ഒരു രൂപത്തിന്റെ ചതുരംശത്തെ പൂണ്ണരൂപങ്ങൾ പത്തി

നാലൊന്നിനെ രൂപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ നാലൊന്നുതന്നെ. അതിനെ അ ഞ്ചിൽ അംശിക്കേണ്ടുകയാൽ ഫലം ഇരുപതാലൊന്ന് ($=\frac{1}{20}$).

അപ്പോൾ ഭിന്നഗുണനത്തിങ്കൽ അംശഘാതത്തെ ഛേദഘാതത്തെക്കൊണ്ടു ഹരി ക്കേണം.



പരിലേഖം 16.

ഈ ന്യായത്തെ ക്ഷേത്രരൂപേണ കാണിക്കുംപ്രകാരത്തെ ഗ്രന്ഥാന്തരത്തിൽ പ റഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. പരിലേഖം 16ൽ ഏഴിലിറങ്ങിയ നാലിന്റേയും അഞ്ചിലിറങ്ങിയ മൂ ന്നിന്റേയും ഘാതത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെയാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഘാത ക്ഷേത്രത്തിൽ ഛേദങ്ങളിൽ ഒന്നായ ഏഴോളം വരികൾ, വരി ഒന്നിൽ ഇതരഛേദ മായ അഞ്ചോളം ഖണ്ഡങ്ങളുമുണ്ട്. ഈ ക്ഷേത്രത്തെ സരിഗമ എന്നു കല്പിക്ക. അതി നകത്ത് അംശമാകുന്ന നാലുവരിയും വരി ഒന്നിൽ മറ്റേ അംശമാകുന്ന 3ഖണ്ഡങ്ങളു മുള്ള ഒരു ഘാതക്ഷേത്രത്തെ (സപനിധ) പരിലേഖത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നപോലെ കല്പിക്ക. വലിയ ക്ഷേത്രത്തിൽ 35ഖണ്ഡങ്ങളും ചെറിയ ക്ഷേത്രത്തിൽ 12 ഖണ്ഡങ്ങളു മുണ്ട്.

$$\text{സധ}\times\text{സപ}=\tfrac{4}{7}\text{സമ}\times\tfrac{3}{5}\ \text{സരി}=\tfrac{4}{7}\times\tfrac{3}{5}\times\text{സമ}\times\text{സരി}.$$

$$\text{അപ്പോൾ}\ \tfrac{4}{7}\times\tfrac{3}{5}=\frac{\text{സധ}\times\text{സപ}}{\text{സമ}\times\text{സരി}}=\frac{12\text{ഖണ്ഡങ്ങൾ}}{35\text{ഖണ്ഡങ്ങൾ}}=\frac{12}{35}$$

നെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ രൂപചതുരംശങ്ങൾ പത്ത് ഉളവാകും. നാലിൽ ഇറങ്ങിയ പത്ത് എന്നും പറയുമിതിനെ. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ഇതിനെ ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിക്കിൽ ഗുണ്യം ഫലമായിട്ടു വരും. ഗുണ്യംകൊണ്ടു ഹരിക്കിൽ ഗുണകാരം ഫലമായിട്ടു വരും. അവിടെ ഗുണ്യമാകുന്ന നാലിൽ ഇറങ്ങിയ ഒന്നിനെ പത്താവൃത്തി കളയാം. അപ്പോൾ പൂർണ്ണരൂപങ്ങൾ പത്ത് ഉളവാം. അതു ഫലമായിട്ടു വരും, ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ട്. പിന്നെ പൂർണ്ണരൂപങ്ങൾ പത്തിനെ ഇതിങ്കന്നു കളയേണ്ടുമ്പോൾ ഈ ഹാര്യമാകുന്ന പത്തു ചതുരംശമല്ലൊ. ആകയാൽ ഇത്തരം നാല്പതു കൂടിയേ പൂർണ്ണരൂപങ്ങളായിരിക്കുന്ന പത്തിനെ ഒരാവൃത്തി കളവാൻ പോരൂ. അപ്പോളേ ഫലം ഒരു രൂപം തികവൂ. ആകയാൽ ഈ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ഫലം രൂപചതുരംശമേ ഉള്ളൂ എന്നു വന്നു. ഈവണ്ണമാകുമ്പോളതിന്റെ ക്രിയ പിന്നെ ഹാരകത്തെ ചെറുതാക്കിലുമാം, ഹാര്യത്തെ പെരുക്കിലുമാം*.

---

* ഇവിടെ ഗുണ്യം $=\frac{1}{4}$, ഗുണകാരം $=10$, ഫലം $=\frac{10}{4}$

$\frac{1}{4}\times 10=\frac{10}{4}$. എന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞുവല്ലോ.

ഇവിടെ $\frac{10}{4}$ എന്നതിനെ ഹാര്യമെന്നും, രൂപചതുരംശം, പത്ത്, ഇവയിലൊന്നിനെ ഹാരകമെന്നും, മറ്റേതിനെ ഫലമെന്നും കല്പിക്ക.

അപ്പോൾ $\frac{10}{4}\div\frac{1}{4}=10.$

$\frac{10}{4}\div 10=\frac{1}{4};$

ഹാര്യത്തിങ്കന്നു ഹാരകം എത്ര ആവൃത്തി കളയാമോ അതു ഫലമെന്നാണല്ലോ സാമാന്യഹരണന്യായം. അതുകൊണ്ടു $\frac{1}{4}$ന്റെ പത്തിരട്ടി $\frac{10}{4}$ ആകയാൽ, $\frac{10}{4}$നെ $\frac{1}{4}$കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം 10. അതുപോലെ $\frac{10}{4}$നെ 10കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം $\frac{1}{4}$.

പിന്നെ ഹാര്യം $=\frac{10}{4}$.

ഹാരകം $=10$.

40 ചതുരംശങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ പത്തിനെ ഒരാവൃത്തികളയാം. പക്ഷേ ഇവിടെ ഹാര്യം $\frac{10}{4}$ മാത്രമേ ഉള്ളൂ. അപ്പോൾ $\frac{1}{4}$ ആവൃത്തി കളഞ്ഞാൽ മതി. അപ്പോൾ; ഫലം $\frac{1}{4}$.

(i) $\frac{10}{4}\div 10=\frac{10\text{ ചതുരംശം}}{40\text{ ചതുരംശം}}=\frac{1}{4}.$

(ii) $\frac{\text{പത്തുചതുരംശം}}{10}=\frac{\text{പത്ത്}}{\text{നാല്പത്}}=\frac{1}{4}.$

(i)ൽ ഹാരകമായിരിക്കുന്ന രൂപങ്ങളെ ചതുരംശങ്ങളാക്കി വർണ്ണത്തിൽ കറച്ചു. (ii)ൽ ഹാര്യത്തിങ്കലെ ചതുരംശങ്ങളെ രൂപങ്ങളാക്കി വർണ്ണത്തിൽ കൂട്ടി. "ഇതിന്റെ ക്രിയ പിന്നെ ഹാരകത്തെ ചെറുതാക്കിലുമാം, ഹാര്യത്തെ പെരുക്കിലുമാം" എന്ന വാക്യത്തിന്റെ അർത്ഥമിപ്രകാരമാണ്.

അവിടെ നാലിലിറങ്ങിയ പത്തിനെ നാലിലിറങ്ങിയ ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹാരകമാകുന്ന ഒന്നിന്നു ഹാരകം നാലു്. ആ നാലിനെക്കൊണ്ടു ഹാര്യമാകുന്ന പത്തിനെ ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ ഒന്നിനെക്കൊണ്ടുതന്നെ ഹരിക്കേ വേണ്ടൂ; ഹാര്യത്തിന്നു നടേയുള്ള ഛേദത്തെക്കൊണ്ടും. ആകയാൽ ഒന്നും നാലുമുള്ള ഘാതം നാലു്. അതിനെക്കൊണ്ടു നാല്പതിനെ ഹരിച്ച ഫലം പത്തുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ ഹാരകത്തിന്റെ ഛേദംകൊണ്ടു ഹാര്യത്തിന്റെ അംശത്തെ ഗുണിപ്പൂ. അതു് അംശമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഹാരകത്തിന്റെ അംശംകൊണ്ടു ഹാര്യത്തിന്റെ ഛേദത്തെ ഗുണിപ്പൂ. അതു ഛേദമായിട്ടിരിക്കും. അപ്പോൾ ഹരിച്ചതായിട്ടിരിക്കും*. പൂർണ്ണരൂപങ്ങളായിട്ടു ഫലങ്ങൾ എത്ര ഉള്ളവ എന്നു് അറിവേണ്ടുകിൽ ഛേദത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കേണം എന്നേ ഉള്ളൂ. ഇങ്ങനെ നാലൊന്നും അഞ്ചൊന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു് ഇരുപതാലൊന്നായിട്ടിരിക്കുന്നതിനെ ഹാര്യമെന്നു കല്പിച്ചു് ഇതിനെ അഞ്ചൊന്നിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഇരുപതിലിറങ്ങിയ അഞ്ചു്. പിന്നെ ഈ ഛേദാംശങ്ങൾ രണ്ടിനേയും അഞ്ചിൽ ഹരിച്ചാൽ ≠ നാലിലിറങ്ങിയ ഒന്നു ഫലം വരും. പിന്നെ ഈ ഹാര്യത്തെ തന്നെ നാലൊന്നിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അഞ്ചിലിറങ്ങിയ ഒന്നായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ഗുണനവും ഹരണവും ഒരു പ്രകാരംതന്നെ

---

* പിന്നെ നാലിലിറങ്ങിയ പത്തിനെ നാലിലിറങ്ങിയ ഒന്നുകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. അപ്പോൾ ഹാര്യത്തിന്റെ അംശത്തെ ഹാരകത്തിന്റെ അംശംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. ഹാരകത്തിന്റെ അംശത്തെ ഹാരകത്തിന്റെ ഛേദംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. അപ്പോൾ ഹാര്യത്തിന്റെ അംശത്തെ ഹാരകാംശത്തിന്റെ ഹാരകമായ ഹാരകഛേദംകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണം, ഹാരകത്തിന്റെ അംശംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. ഫലത്തെ ഹാര്യത്തിന്റെ ഛേദംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. അപ്പോൾ ഹാര്യത്തിന്റെ അംശത്തെ ഹാരകത്തിന്റെ ഛേദംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഹാരകത്തിന്റെ അംശത്തിന്റെയും ഹാര്യത്തിന്റെ ഛേദത്തിന്റെയും ഘാതംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഹരണത്തിങ്കലെ ഫലം വരും. അപ്പോൾ ഹാരകത്തിന്റെ അംശച്ഛേദങ്ങളെ മാററിക്കല്പിച്ചു ചെയ്യുന്ന ഗുണനം തന്നെ ഹരണം.

"..............................ഹരണേ പുനഃ
ഹരരാശ്യംശഹാരഘ്നൌ ഹാരച്ഛേദാംശകൌ ക്രമാൽ ।
കൃത്വാ തേന പുനശ്ഛേദേനാപ്തമംശാഹതേഃ ഫലം ॥" (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

≠ $\frac{1}{20} \div \frac{1}{5} = \frac{5}{20} = \frac{5 \div 5}{20 \div 5} = \frac{1}{4}$.

ഇങ്ങനെ ഛേദാംശങ്ങളെ അഞ്ചിൽ ഹരിക്കുന്നതിനു് അപവർത്തനം ചെയ്യുക എന്നു പറയുന്നു. ഈ അപവർത്തനക്രിയയെ മുകളിൽ വിസ്തരിക്കുന്നുണ്ടു്.

മിക്കവാറും. ഗുണഗുണ്യങ്ങളുടെ ഛേദങ്ങൾ തങ്ങളിലും അംശങ്ങൾ തങ്ങളിലും ഗുണിപ്പൂ. ഇതു ഗുണനം. പിന്നെ ഹാരകത്തിന്റെ ഛേദത്തെ അംശമെന്നും അംശത്തെ ഛേദമെന്നും കല്പിച്ചിട്ടു തന്നെ ഗുണനക്രിയ ചെയ്യുമ്പോൾ ഹരിച്ചതായിട്ടു വരും. ഇത്രേ വിശേഷമുള്ളു. ഇങ്ങനെ ഗുണനഹരണങ്ങൾ.

പിന്നെ സമച്ഛേദമായിട്ടിരിക്കുന്ന രാശിയെ വർഗ്ഗിക്കേണ്ടുമ്പോൾ ഛേദത്തേയും അംശത്തേയും വർഗ്ഗിക്കേണം. അവ വർഗ്ഗിച്ച രാശിയുടെ ഛേദാംശങ്ങളാകുന്നവ*. പിന്നെ ഛേദം കൂടിഇരിക്കുന്ന രാശിയെ മൂലിക്കേണ്ടുമ്പോൾ ഛേദത്തേയും അംശത്തേയും മൂലിക്കേണം. അവ പിന്നെ മൂലിച്ച രാശിക്കു ഛേദാംശങ്ങളാകുന്നവ$. ഇങ്ങനെ സമച്ഛേദ γ ത്തിന്റെ മൂലീകരണങ്ങൾ.

---

* വർഗ്ഗീകരണാദി:—

"വർഗ്ഗേ ഹാരാംശയോർവ്വർഗ്ഗഃ കാര്യസ്സ്യാൽ ഘനനേ ഘനഃ" ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$ മൂലീകരണം:—

"മൂലേ ചാപി തയോർമ്മൂലമേവം ഭിന്നവിധിർഭവേൽ" ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

γ വർഗ്ഗിക്കുന്നതിന്നും മൂലിക്കുന്നതിന്നും മുമ്പിൽ സംഖ്യകളെ സമച്ഛേദങ്ങളാക്കണം. $3\frac{3}{4}$നെ വർഗ്ഗിക്കേണ്ട ദിക്കിൽ അതിനെ $\frac{15}{4}$ എന്നു സമച്ഛേദമാക്കണം.

$$3\tfrac{3}{4}\times 3\tfrac{3}{4}=\frac{15\times 15}{4\times 4}=\frac{225}{16}=14\tfrac{1}{16}$$

അതുപോലെ മൂലീകരണത്തിലും:—

$$\sqrt{14\tfrac{1}{16}}=\sqrt{\tfrac{225}{16}}=\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{16}}=\frac{15}{4}=3\tfrac{3}{4}$$

നാലാമദ്ധ്യായം

ത്രൈരാശികം

അനന്തരം ത്രൈരാശികം*. അവിടെ ഒരു അവയവിക്കു രണ്ട് അവയവം ഉണ്ടായിട്ടിരിപ്പൂ. അതിൽ ഒരു് അവയവം ഇത്ര പരിമാണത്തോടുകൂടിയിരുന്നൊന്ന്; അപ്പോൾ അവയവാന്തരം ഇത്ര പരിമാണത്തോടുകൂടിയിരുന്നൊന്ന് നിയതമായിട്ടിരിപ്പൂ. ഇന്നിയമത്തെ അറിഞ്ഞിട്ടും ഇരിപ്പൂ. അപ്പോൾ മറെറാരിടത്ത് ഇങ്ങനത്തെ ഒരു അവയവിയിങ്കലെ ഏകദേശത്തിൻെറ പരിമാണത്തെ അനുമാനിക്കാം. ഇതു ത്രൈരാശികമാകുന്നത്. ഇതിനുദാഹരണം†. അഞ്ഞാഴി നെല്ലിന്ന് ഇരുനാഴി അരി എന്നിങ്ങനെ അറിഞ്ഞിട്ടിരിക്കുമ്പോൾ ഇതിൻെറ ശേഷം നെല്ലിന്നൊക്കയ്ക്കും ഇങ്ങനെത്തൊരു് അരിയോടുള്ള മാനസംബന്ധനിയമമുണ്ട് എന്നിരിക്കേണം. ആകയാൽ പന്തിരുനാഴി നെല്ലിന്ന് എത്ര അരിയുണ്ടെന്ന് അറിയേണ്ടുമ്പോൾ ഇത്ത്രൈരാശികമാകുന്ന ക്രിയ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇവിടെ പന്തിരുനാഴി നെല്ലിൻെറ അരി അറിയേണ്ടുന്നേടത്തേയ്ക്ക് അറിഞ്ഞ നെല്ല് അഞ്ചിനു **പ്രമാണ**മെന്നു പേർ. അരി രണ്ടിന്നു **പ്രമാണഫല**മെന്നും പന്ത്രണ്ടു നെല്ലിന്ന് **ഇച്ഛ**യെന്നും പന്ത്രണ്ടിൻെറ അരി അറിവാനിരിക്കുന്നതിന്ന് **ഇച്ഛാഫല**മെന്നും പേർ¶. അവിടെ അഞ്ചിന്ന് ഇത്ര എന്നു

---

* ത്രൈരാശികം (Rule of Three) എന്ന പേർ വരുവാനുള്ള ഹേതു: "ത്രയോ രാശയഃ സമാഹൃതാഃ കാരണം യസ്യ, സരാശിഃ കാര്യേ കാരണോപചാരാൽ ത്രിരാശിഃവതി, സ പ്രയോജനം യസ്യ തൽഗണിതം ത്രൈരാശികം" കാരണരൂപങ്ങളായിരിക്കുന്ന മൂന്നുരാശികളെക്കൊണ്ടു കാര്യരൂപമായിരിക്കുന്ന രാശിയെ വരുത്തുവാനുള്ള ഗണിതം ത്രൈരാശികം. ഇപ്രകാരംതന്നെ അഞ്ച്, എഴ്, ഒമ്പതു തുടങ്ങിയ രാശികളെക്കൊണ്ടുള്ള ക്രിയകൾക്കു പഞ്ചരാശികം, സപ്തരാശികം, നവരാശികം എന്നിങ്ങനെയുള്ള പേർ പറയുന്നു. (Rule of Compound Proportion).

† ഇവിടെ അവയവി നെല്ല്. അതിൻെറ അവയവങ്ങൾ അരി, ഉമി, തവിട്.

¶ ഇവിടെ പ്രമാണം അഞ്ചുനാഴി നെല്ല്.
പ്രമാണഫലം രണ്ടുനാഴി അരി.
ഇച്ഛ പന്ത്രണ്ടുനാഴി നെല്ല്.
ഇച്ഛാഫലം ജ്ഞേയമായിട്ടുള്ള അരി.

അപ്പോൾ പ്രമാണവും ഇച്ഛയും സമാനജാതികളായിട്ടിരിക്കണം, പ്രമാണഫലവും ഇച്ഛാഫലവും സമാനജാതികളായിരിക്കണമെന്നും ത്രൈരാശികത്തിലെ നിയമമാകുന്നു.

അറിഞ്ഞതിനെക്കൊണ്ടു തന്നെ ഒന്നിന്ന് ഇത്ര എന്നു നടേ അറിഞ്ഞുകൊണ്ടാൽ ഇച്ഛാവ്യക്തികൾ ഓരോന്നിന്ന് അത്രയത്ര ഉണ്ടാകും ഫലം എന്നറിവാനെളുപ്പമുണ്ട്. ഇതിൻെറ പ്രകാരം. അവിടെ പ്രമാണവ്യക്തികൾ അഞ്ചിന്നു ഫലവ്യക്തികൾ രണ്ടു്, എന്നേടത്തു് ആ രണ്ടിനെ അഞ്ചേടത്തു പകുത്താൽ ഒരു കൂറു പ്രമാണവ്യക്തി ഒന്നിൻെറ ഫലമായിട്ടിരിക്കുമതു്. ഇതിനെ ഇച്ഛാരാശിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഇച്ഛാവ്യക്തികൾ എല്ലാററിൻേറയും ഫലയോഗമുണ്ടാകും. അവിടെ രണ്ടിനെ അഞ്ചേടത്തു പകുക്കുകയാകുന്നതു് അഞ്ചിൽ ഹരിക്ക. അഞ്ചിൽ ഒരു കൂറു ഹരിച്ച ഫലമാകുന്നതു്. അവിടെ ഹരിച്ചാൽ മുടിയായ്യുമ്പോൾ രണ്ടിന്ന് അഞ്ചു ഛേദമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ഒന്നിന്ന് അഞ്ചിൽ ഇറങ്ങിയ രണ്ടും ഫലമാകുന്നതു് എന്നും വരും. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ പ്രമാണം പ്രമാണഫലത്തിന്നു ഛേദമായിട്ടിരിക്കും. ഇതു ഗുണ്യമാകുന്നതു്. ഇച്ഛാരാശി ഗുണകാരമാകുന്നതു്. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ പ്രമാണഫലത്തെ ഇച്ഛയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു അപ്ഫലത്തിന്നു ഛേദമായിട്ടിരിക്കുന്ന പ്രമാണരാശിയെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലമിച്ഛാഫലമായിട്ടു വരും. ഇവിടെ അഞ്ചേടത്തു പകുത്തിട്ടു് ഒരു കൂറു് എന്നും അഞ്ചിൽ ഹരിച്ച ഫലമെന്നും ഒന്നുതന്നെ*. യാതൊരുപ്രകാരം ഘാതക്ഷേത്രത്തെ ഒരു വക വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മററെ വരിഷയിലെ ഒരു വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യയുണ്ടാകും ഫലമായിട്ടു്. അത്രേടത്തു പകു

---

* "ഇച്ഛാം ഫലേന സംഹത്യ പ്രമാണേന വിഭാജയേൽ ।
ഇച്ഛാഫലം ഭവേൽ ലബ്ധമേവം ത്രൈരാശികം മതം ॥

ഈ ക്രിയയുടെ യുക്തിയാണിവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു്.

$$\text{ഇച്ഛാഫലം} = \text{ഇച്ഛാ} \times \frac{\text{പ്രമാണഫലം}}{\text{പ്രമാണം}}$$

അപ്പോൾ ഇച്ഛാ $\times$ പ്രമാണഫലം $=$ പ്രമാണം $\times$ ഇച്ഛാഫലം.

ത്രൈരാശികത്തിൽ ഇച്ഛാപ്രമാണഫലഘാതം പ്രമാണേച്ഛാഫലഘാതത്തോടു തുല്യമായിട്ടിരിക്കും.

ഈ ബന്ധത്തെ തന്നെ വേറെ ഒരു പ്രകാരത്തിൽ കല്പിക്കാം.

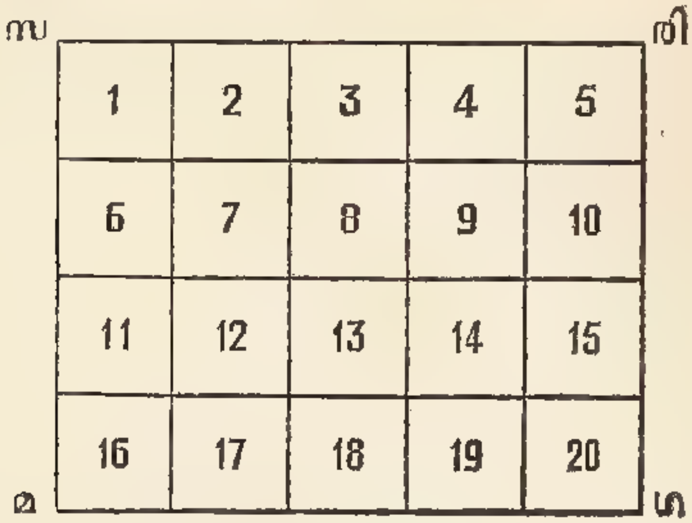
$$\frac{\text{പ്രമാണഫലം}}{\text{പ്രമാണം}} = \frac{\text{ഇച്ഛാഫലം}}{\text{ഇച്ഛാ}}.$$

പ്രമാണഫലം പ്രമാണത്തിൻെറ എത്ര ആവൃത്തിയാണൊ അത്രാവൃത്തി ഇച്ഛാഫലം ഇച്ഛയുടേതായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഇച്ഛ പ്രമാണത്തേക്കാളേറുമ്പോൾ, ഇച്ഛാഫലം പ്രമാണഫലത്തേക്കാളേറും; കുറയുമ്പോൾ കുറയും. വ്യസ്തത്രൈരാശികത്തിലുള്ള വ്യത്യാസത്തെ മേലിൽ പറയുന്നുണ്ട്.

ത്താലും ഒരു വരി ഒരുകൂറായിട്ടിരിക്കും എന്നവണ്ണം*. ഇങ്ങനെത്തൊന്നു ത്രൈരാശികമാകുന്ന ഗണിതം.

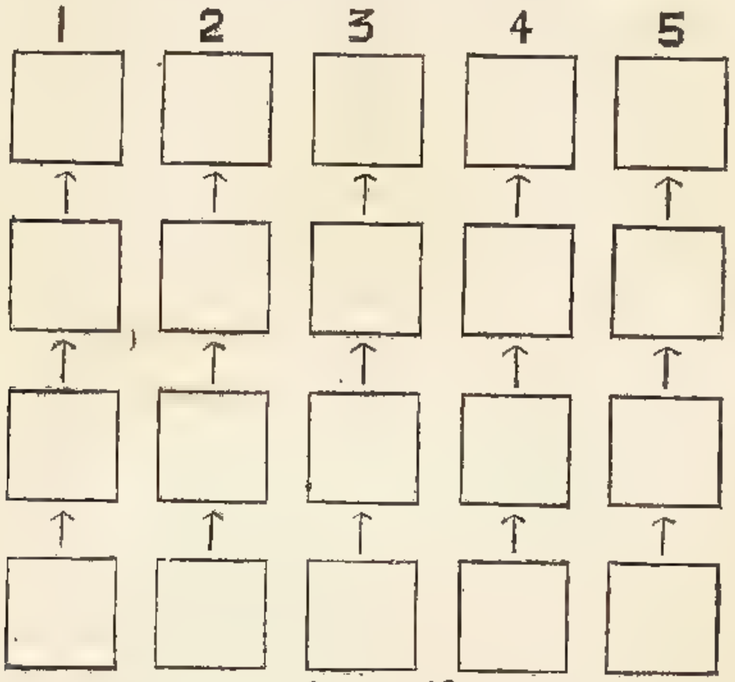
---

* ഇരുപതു ഖണ്ഡങ്ങളടങ്ങിയ ഒരു ഘാതക്ഷേത്രത്തെ ഒരു വരിയിൽ അഞ്ചു



പരിലേഖം 17.

ഖണ്ഡം വീതമായിട്ടു കല്പിക്ക. അപ്പോൾ മറ്റെവരിയൊന്നിൽ നാലുഖണ്ഡങ്ങളുണ്ടാകും. (പരിലേഖം 17) അതായതു് ഇരുപതിനെ അഞ്ചിൽ ഹരിച്ചാൽ ഫലം നാലു് എന്നു്.



പരിലേഖം 18.

പിന്നെ അഞ്ചു ഖണ്ഡങ്ങളെ വെവ്വേറെ വെക്ക. (പരിലേഖം 18) ഓരോന്നിൽ ഓരോ ഖണ്ഡം വീതം ചേർക്കു. പിന്നേയും ഓരോ ഖണ്ഡങ്ങൾ ചേർക്കു. മൂന്നാമതും ഓരോ ഖണ്ഡങ്ങൾ ചേർക്കു. അപ്പോൾ ഇരുപതു ഖണ്ഡങ്ങളും തികഞ്ഞു. ഇങ്ങനെ നാലു ഖണ്ഡങ്ങളടങ്ങിയ അഞ്ചുകൂട്ടങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നു. ഇരുപതിനെ അഞ്ചായിട്ടു പകുത്തിട്ടു് ഒരു കൂറു് എന്നീ നാലിനെ പറയുന്നു. അപ്പോൾ ഇരുപതിനെ അഞ്ചിൽ ഹരിച്ച ഫലവും ഇരുപതിനെ അഞ്ചേടത്തു പകുത്തിട്ടു് ഒരു കൂറും നാലുതന്നെ. അഞ്ചേടത്തു പകുക്കുക എന്നതിന്നു് അഞ്ചിൽ ഹരിക്കുക എന്നുതന്നെ അർത്ഥം. അപ്പോൾ പ്രഥമോദാഹരണത്തിൽ രണ്ടിനെ അഞ്ചിൽ ഹരിച്ച ഫലവും രണ്ടിനെ അഞ്ചേടത്തു പകുത്തിട്ടു് ഒരു കൂറും അഞ്ചിൽ ഇറങ്ങിയ രണ്ടുതന്നെ—$\frac{2}{5}$.

ഇവിടെ നെല്ല് അവയവി ആകുന്നത്. ഉമിയും അരിയും തവിടും അവയവങ്ങളാകുന്നത്. അവിടെ മൂന്ന് ഉമിക്കു രണ്ട് അരി എന്നാകിലുമാം വ്യാപ്തിഗ്രഹണം. അഞ്ചു നെല്ലിന്നു മൂന്ന് ഉമി എന്നാകിലുമാം. ഇങ്ങനെ ഉപാധിവശാൽ പ്രമാണഫലങ്ങൾ അതതായിട്ടു കല്പിക്കാം. ഒരിടത്തു ജിജ്ഞാസാവശാൽ രണ്ട് അരിക്ക് അഞ്ചു നെല്ല്, ഇത്ര അരിക്ക് എത്ര നെല്ല് എന്നും വരും പ്രമാണേച്ഛാഫലഭേദങ്ങൾ. ഇങ്ങനെ ഒരു വക ത്രൈരാശികം.

പിന്നെ വ്യസ്തത്രൈരാശികവിഷയം*. അവിടെ എട്ടുമാററിൽ ഈ വിലയ്ക്ക് ഇത്ര പണത്തൂക്കം പൊന്നു വേണം, അപ്പോൾ പത്തു മാററിൽ എത്ര പണത്തൂക്കം എന്ന ത്രൈരാശികത്തിങ്കൽ പ്രമാണത്തേക്കാൾ എത്രയേറും ഇച്ഛാരാശി പ്രമാണഫലത്തേക്കാൾ അത്രയേറും ഇച്ഛാഫലം എന്നല്ലാ ഇരിപ്പൂ, അത്ര കുറയുമെന്ന്. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്തു വ്യസ്തത്രൈരാശികം വേണ്ടുവത്. അതാകുന്നതു പ്രമാണവും പ്രമാണഫലവും തങ്ങളിൽ ഘാതത്തിങ്കന്ന് ഇച്ഛാരാശിയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചത് ഇവിടെ ഇച്ഛാഫലമാകുന്നത് എന്നു വിശേഷം†. വ്യസ്തത്രൈരാശികഫലമിച്ഛാഭക്തഃ പ്രമാണഫലഘാതഃ'' എ

---

* ''ഇച്ഛാവൃദ്ധൌ ഫലഹ്രാസ ഇച്ഛാഹ്രാസേധികം ഫലം।
യത്ര തത്ര ഹി കർത്തവ്യം വ്യസ്തത്രൈരാശികം ബുധൈഃ॥

ഇവിടെ ഇച്ഛാപ്രമാണത്തേക്കാളേറുമ്പോൾ ഇച്ഛാഫലം പ്രമാണഫലത്തേക്കാൾ കുറയും, കുറയുമ്പോഴേറും. ഇങ്ങനെയുള്ള വിഷയത്തിങ്കലെ ക്രിയയ്ക്കു വ്യസ്തത്രൈരാശികമെന്നു പറയുന്നു. (Inverse Proportion).

† വ്യസ്തത്രൈരാശികക്രിയയാണിവിടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്.
''വ്യസ്തത്രൈരാശികഫലമിച്ഛാഭക്തഃ പ്രമാണഫലഘാതഃ'' ॥

പ്രമാണാന്തരം:

''പ്രമാണേന ഫലം ഹത്വാ വിഭജേദിച്ഛയാ ബുധഃ।
വ്യസ്തത്രൈരാശികം ഹ്യേതൽ ജ്ഞേയം സർവ്വത്ര ധീമതാ'' ॥

ഒരു കൂലിക്കാരന്നു കുറെ തെങ്ങുംതയ്യുകൾ വെയ്ക്കുവാൻ ഒരു ദിവസം വേണമെങ്കിൽ രണ്ടു കൂലിക്കാർക്ക് അത്രതന്നെ തെങ്ങുംതയ്യു വെയ്ക്കുവാൻ പകുതി സമയം മതി. ഒരേ വിലയ്ക്കുതന്നെ പത്തു മാററുള്ള സ്വർണ്ണത്തിന്റെ തൂക്കത്തിനേക്കാളധികം എട്ടുമാററുള്ള സ്വർണ്ണത്തിന്റെ തൂക്കം വാങ്ങാം. നാല്പതു മഞ്ചാടിക്കുരുവിനെ നാലായി ഭാഗിച്ചാൽ ഓരോ ഭാഗത്തിൽ പത്തു മഞ്ചാടിവീതമുണ്ടാകും. എന്നാലവയെ എട്ടായിട്ടു ഭാഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഓരോ ഭാഗത്തിൽ അഞ്ചുവീതം മാത്രമേ ഉണ്ടാകയുള്ളൂ. ഇങ്ങനെ ചില വ്യസ്തത്രൈരാശികത്തിന്റെ ഉദാഹരണങ്ങൾ.

വ്യസ്തത്രൈരാശികത്തിങ്കൽ,

പ്രമാണം $\times$ പ്രമാണഫലം $=$ ഇച്ഛാ $\times$ ഇച്ഛാഫലം.

$$\frac{\text{ഇച്ഛാ}}{\text{പ്രമാണം}} = \frac{\text{പ്രമാണഫലം}}{\text{ഇച്ഛാഫലം}}.$$

[ര്ന

നുണ്ട്. ഇങ്ങനെ ത്രൈരാശികത്തിന്റെ ദിങ്മാത്രം*.

പിന്നെ ഇത്ത്രൈരാശികന്യായവും ഭുജാകോടികർണ്ണന്യായവും ഇവ രണ്ടിനെക്കൊണ്ടും വ്യാപ്തം ഗണിതക്രിയ മിക്കതും. ഇവറ്റിന്ന് അംഗമായിട്ട സംകലിതാദി പരികർമ്മങ്ങൾ ഇരിപ്പൂ. ഇങ്ങനെ ഗണിതന്യായങ്ങൾ മിക്കതും ചൊല്ലീതായി.

---

* പഞ്ചരാശികം, സപ്തരാശികം, നവരാശികം ഇങ്ങനെയെല്ലാം ചില ക്രിയകളുണ്ടെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലൊ. പഞ്ചരാശികത്തിന്റെ ഉദാഹരണം:

"മാസേ ശതസ്യ യദി പഞ്ചകലാന്തരം സ്യാ-
ദ്വർഷേ ഗതേ ഭവതി കിം വദ ഷോഡശാനാം" ‖ (ലീലാവതീ)

നൂറിന്ന് ഒരു മാസത്തിൽ അഞ്ചു പലിശയാണെങ്കിൽ, പതിനാറിന്നൊരു കൊല്ലത്തേയ്ക്കു പലിശ എന്തു്?

ഇവിടെ പ്രമാണങ്ങൾ—100, 1.
പ്രമാണഫലം —5.
ഇച്ഛകൾ —16, 12.

$$\text{ഇച്ഛാഫലം} = \frac{\text{പ്രമാണഫലം} \times \text{ഇച്ഛാ.}}{\text{പ്രമാണം}}$$

$$= \frac{5 \times 16 \times 12}{1 \times 100} = \frac{960}{100} = 9\tfrac{3}{5}$$

ഇവിടെ പ്രമാണഫലത്തെ എല്ലാ ഇച്ഛകളെക്കൊണ്ടും ഗുണിക്കേണം. എല്ലാ പ്രമാണങ്ങളെക്കൊണ്ടും ഹരിക്കുകയും വേണം. ഈ ക്രിയയെ രണ്ടു ത്രൈരാശികങ്ങളെന്നു കല്പിക്കാം. ഇവ രണ്ടും സാധാരണ ത്രൈരാശികം തന്നെ. എന്നാൽ ഒന്നു വ്യസ്തത്രൈരാശികമാണെങ്കിൽ അതിലെ പ്രമാണഫലത്തെ അതിന്റെ പ്രമാണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഇച്ഛകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. മറ്റെ ത്രൈരാശികത്തിൽ ഇച്ഛതന്നെ ഗുണകാരം, പ്രമാണം ഹാരകവും. ഇങ്ങനെ ത്രൈരാശികത്തിലും പഞ്ചാദിരാശികങ്ങളിലും ക്രിയയ്ക്കു വ്യത്യാസമില്ല.

അഞ്ചാമദ്ധ്യായം

കുട്ടാകാരം

അഹർഗ്ഗണാനയനം

അനന്തരം അഹർഗ്ഗണം വരുത്തുക തുടങ്ങിയുള്ള ഗണിതത്തെ ഈ ന്യായാ * തിദേശപ്രകാരത്തെക്കൊണ്ടു ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ കല്യാദ്യഹർഗ്ഗണത്തെ രണ്ടു ത്രൈരാശികം † കൊണ്ടറിയുന്നു. ഇതിങ്കൽ കല്യാദ്യതീത സംവത്സരത്തെ സൌരംകൊണ്ട് അറിയുന്നു, സംവത്സരത്തിങ്കൽ സൌരം $ പ്രസിദ്ധമാകുന്നതു്, എന്നിട്ട്. പിന്നെ വർത്ത

---

* ത്രൈരാശികം ന്യായം.

† ദ്വാദശഘ്നാൻ കലേരബ്ദാൻ മാസൈശ്ചൈത്രാദിഭിർഗ്ഗതൈഃ ।
സംയുക്താൻ പൃഥഗാഹത്യാച്യധിമാസൈ സ്തതോ ഹൃതൈഃ ॥
സൌരമാസൈസ്ത്വഗോക്തൈസ്തൈരധിമാസൈസ്ത്വതാൻ ഗതൈഃ ।
മാസാംശ്ച ത്രിംശതാ ഹത്വാ തിഥിയുക്താ ഗതാഃ പൃഥക് ॥
തിഥിക്ഷയൈർന്നിഹത്യാതോ യുഗോക്തതിഥിഭിർഹൃതാൻ ।
അവമാൻ ശോധയേച്ഛേഷസ്സാവനോ ദ്യുഗണഃ കലേഃ ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഇവിടെ രണ്ടു ത്രൈരാശികങ്ങളെ ചെയ്യുന്നുണ്ടു്. (1) കല്യാദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങി കഴിഞ്ഞ സൌരാബ്ദങ്ങളെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചു മാസമാക്കി വർത്തമാനവർഷത്തിലെ കഴിഞ്ഞ ചൈത്രാദി മാസങ്ങളെ അതിൽ കൂട്ടൂ. ആ മാസസമൂഹത്തെ വേറെവെച്ചു യുഗാധിമാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു പെരുക്കി യുഗസൌരമാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. അപ്പോൾ കിട്ടുന്നതു കഴിഞ്ഞുപോയ അധിമാസങ്ങളായിരിക്കും. (2) ഈ അധിമാസങ്ങളെ മുൻ വേറെ വെച്ചിരിക്കുന്ന മാസസമൂഹത്തിൽക്കൂട്ടി മുപ്പതിൽ ഗുണിച്ചു വർത്തമാനചാന്ദ്രമാസത്തിങ്കലെ ശുക്ലപ്രതിപദം മുതൽ കഴിഞ്ഞ പക്കങ്ങളേയുംകൂട്ടി വേറെ വെയ്ക്കുക. അതിനെ യുഗാവമദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു യുഗചാന്ദ്രദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിക്ക. ഇങ്ങനെ ഹരിച്ചുകിട്ടുന്നതു് അവമദിനങ്ങളാകുന്നു. ഈ അവമദിനങ്ങളെ വേറെവെച്ചിരിക്കുന്ന ചാന്ദ്രദിനങ്ങളിൽനിന്നു കളയൂ. ശേഷിച്ചതു കല്യാദിയിങ്കന്നു കഴിഞ്ഞ സാവനാഹർഗ്ഗണമാകും.

$ "സൌരാബ്ദോ ഭാസ്കരസ്യൈവ ജ്യോതിശ്ചക്രപരിഭ്രമഃ" (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ആദിത്യന്റെ ജ്യോതിശ്ചക്രത്തിൽ കിഴക്കുനോക്കിക്കൊണ്ടുള്ള ഒരു ഭ്രമണത്താൽ പരിച്ഛേദിക്കപ്പെടുന്ന കാലം ഒരു സൌരാബ്ദം.

മാനസംവത്സരത്തിങ്കൽ കഴിഞ്ഞ മാസങ്ങളെ ചാന്ദ്രം||കൊണ്ട് അറിയും. പിന്നെ വൎത്തമാനമാസത്തിൽ കഴിഞ്ഞ ദിവസങ്ങളെ സാവനം§കൊണ്ട് അറിഞ്ഞിരിക്കുന്നു, പ്രസിദ്ധിവശാൽ. പിന്നെ ഇവററെക്കൊണ്ടു കല്യാദ്യതീതസാവനദിവസങ്ങളെ അറിയേണ്ടുന്നു. ഇവിടെ പിന്നെ ചതുൎയ്യുഗത്തിങ്കലെ ഭഗണഭൂദിനങ്ങളല്ലൊ പഠിച്ചതു്. അവററെക്കൊണ്ടു കല്യാദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങി കഴിഞ്ഞതിനെ വരുത്തുന്നു. അവിടെ യുഗത്തിങ്കൽ സൌരചാന്ദ്രഭഗണാന്തരം ചാന്ദ്രമാസ*മാകുന്നതു്. അതിങ്കന്നു യുഗസൌരഭഗണത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചുണ്ടായ യുഗസൌരമാസത്തെ കളഞ്ഞശേഷം യുഗാധിമാസം†. പിന്നെ യുഗസൌരമാസത്തിന്നു് ഇത്ര അധിമാസം കല്യാദ്യതീത സൌരമാസത്തിന്നു് എത്ര അധിമാസം എന്ന ത്രൈരാശികത്തെ

|| പൂൎവ്വപക്ഷശ്ശശാങ്കസ്യ വിപ്രകൎഷോ രവേഃ സ്മൃതഃ।
സന്നികൎഷോപരഃ പക്ഷഃ സിതവൃദ്ധിക്ഷയൌ യയോഃ ||
മാസസ്താഭ്യാം മതശ്ചാന്ദ്രസ്ത്രിംശത്തിഥ്യാത്മകസ്സ ച || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

അമാവാസ്യാന്തത്തിങ്കൽ ആദിത്യനോടു കൂടിയിരിക്കുന്ന ചന്ദ്രന്നു പൌൎണ്ണമാസ്യാന്തത്തോളം ക്രമേണയുള്ള വിപ്രകൎഷം യാതൊന്നു് അതിന്നു പൂൎവ്വപക്ഷമെന്നും പൌൎണ്ണമാസ്യന്തത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ക്രമേണ അമാവാസ്യാന്തമുള്ള സന്നികൎഷം യാതൊന്നു് അതിന്നു് അപരപക്ഷമെന്നും പറയപ്പെടുന്നു. ചന്ദ്രബിംബത്തിന്റെ സിതാസിതമാനങ്ങളുടെ വൃദ്ധിക്ഷയങ്ങളെ അനുസരിച്ചു് അക്കാലങ്ങൾക്കു ശുക്ലപക്ഷമെന്നും കൃഷ്ണപക്ഷമെന്നും പേരുകളുണ്ടു്. ഇപ്രകാരം പൂൎവ്വാപരപക്ഷങ്ങളെക്കൊണ്ടുള്ള മുപ്പതു തിഥികളടങ്ങിയ കാലമാകുന്നു ഒരു ചാന്ദ്രമാസം.

§ രവേഃ പ്രത്യഗ്ഭ്രമം പ്രാഹുഃ സാവനാഖ്യം ദിനം നൃണാം|| (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

പ്രവഹവായുവശഗനായ ആദിത്യന്റെ പടിഞ്ഞാറു നോക്കിയുള്ള ഒരു ഭ്രമണത്തിന്നുള്ള കാലമാകുന്നു ഒരു സാവനദിനം.

* സൂൎയ്യഭഗണം=അയുതഘ്നരദാൎണ്ണവാഃ=432 × 10000= 4320000

ചന്ദ്രഭഗണം=ഖാശപി ദേവേഷു സപ്താദ്രി ശരാഃ =57753320

ചാന്ദ്രമാസം=സൂൎയ്യേന്ദു ഭഗണാന്തരം

=57753320 − 4320000

=53433320.

† യുഗസൌരമാസം=അയുതഘ്നാബ്ധിവസേപക ശരാഃ

=4320000 × 12=51840000.

യുഗാധിമാസം=ഖരനേത്രാഗ്നി രാമനന്ദേഷു ഭൂമയഃ=1593320

ഇവിടെ സൂൎയ്യഭഗണത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ പെരുക്കിയാൽ യുഗസൌരമാസം കിട്ടുമെന്നും ചാന്ദ്രമാസത്തിൽനിന്നും യുഗസൌരമാസം വാങ്ങിയാൽ ശേഷം യുഗാധിമാസമായിട്ടു വരുമെന്നും അറിയേണം.

കൊണ്ടു് അതീതാധിമാസത്തെ ഉണ്ടാക്കി അതീതസൌരമാസത്തിൽ കൂട്ടിയതു് അതീതചാന്ദ്രമാസമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിൽ പിന്നെ വൎത്തമാനവൎഷത്തിലെ ചൈത്രാദികളെ കൂട്ടി മുപ്പതിൽ ഗുണിച്ചു വൎത്തമാനമാസത്തിലെ അതീതദിവസത്തേയും കൂട്ടിയതു കല്യാദ്യതീതതിഥികൾ. പിന്നെ യുഗതിഥിയും യുഗസാവനവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം യുഗാവമം*. പിന്നെ യുഗതിഥിക്കു് ഇത്ര അവമം അതീതതിഥിക്കു് എത്ര അവമം എന്ന ത്രൈരാശികത്തെക്കൊണ്ടു് ഉണ്ടായ അവമത്തെ അതീതതിഥിയിങ്കന്നു കളഞ്ഞതു കല്യാദ്യതീതസാവനദിവസം||.

---

* യുഗതിഥികൾ=ഖഖഷണ്ണവഗോനന്ദനേത്രശൂന്യരസന്ദവഃ

$$=53433320\times30=\underline{1602999600}.$$

യുഗസാവനദിവസങ്ങൾ (ഭൂദിനം)=ഖഖാക്ഷാത്യഷ്ടിഗോസപ്തസപ്തരേഷു ശശിനഃ

$$=\underline{1577917500}.$$

അവമദിനങ്ങൾ അഥവാ തിഥിക്ഷയങ്ങൾ

ഖവ്യോമേന്ദുയമാഷ്ടാഭ്രതതത്തുല്യാഃ

$$=\underline{25082100}.$$

|| ഉദാഹരണം:—1120-ാമാണ്ടു ചിങ്ങം 1-ാംനു ഉദയത്തിലെ കല്യാദ്യഹൎഗ്ഗണം എന്തു്? അതായതു് 5046-ാം കല്യബ്ദത്തിൽ ശ്രാവണമാസത്തിൽ കറുത്ത ത്രയോദശി ബുധനാഴ്ച ഉദയത്തിലെ കലിക്കൊട്ടനാൾ ഏതു്?

1119 മേടം 1-ാംനുക്കു് അതീതസൌരമാസങ്ങൾ$=5045\times12=60540$

ആദ്യത്തെ ത്രൈരാശികം:—

യുഗസൌരമാസം: യുഗാധിമാസം : : അതീതസൌരമാസം: അതീതാധിമാസം.

അപ്പോൾ അതീതാധിമാസം$=\dfrac{60540\times1593320}{51840000}=1860$

അതീതചാന്ദ്രമാസം$=60540+1860=62400$

ഇഷ്ടകാലത്തേയ്ക്കു് അതീതചാന്ദ്രമാസം$=62400+4=62404$

ഇഷ്ടകാലത്തേയ്ക്കു് അതീതചാന്ദ്രദിവസം$=62404\times30+27=1872147$.

രണ്ടാമത്തെ ത്രൈരാശികം:—

യുഗതിഥി: യുഗാവമം : : അതീതതിഥി: അതീതാവമം.

$$\therefore \text{ അതീതാവമം}=\frac{1872147\times25082100}{1602999600}=29293.$$

അപ്പോൾ അതീതസാവനദിവസം$=1872147-29293=1842854$.

ഇവിടെ ഒന്നോ രണ്ടോ ദിവസത്തെ വ്യത്യാസം കാണുവാൻ സംഗതിയുണ്ടു്. കല്യാദി വെള്ളിയാഴ്ച എന്നു കല്പിച്ചു് ഇവിടെ ആഴ്ച ഒപ്പിച്ചു് ഇഷ്ടാഹൎഗ്ഗണം ശരിപ്പെടുത്തേണ്ടതാകുന്നു. ആഴ്ച ഒപ്പിച്ചു നോക്കുമ്പോൾ,

ഇഷ്ടകല്യാദ്യഹൎഗ്ഗണം$=\underline{1842853}$ എന്നുവരും.

പ്രസിദ്ധമായിട്ടുള്ളതു സാവനമാണെങ്കിലും, ചാന്ദ്രങ്ങളായിട്ടുള്ള വസ്തുക്കളെ ഉപയോഗിച്ചു രണ്ടു ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു കല്യാദ്യഹര്‍ഗ്ഗണത്തെ വരുത്തുന്നു. എന്തുകൊണ്ടാണു് ചാന്ദ്രങ്ങളെ സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നതു്? കല്യാദിയായ ദിവസം ലങ്കയിലെ ഉദയത്തിങ്കല്‍ സൂര്യ്യചന്ദ്രന്മാരുടെ മദ്ധ്യമം ശൂന്യവും ഇംഗന്റെ മദ്ധ്യമം മൂന്നു രാശിയും ആണെന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നാല്‍ കല്യബ്ദത്തിന്റെ ആരംഭം മേഷസ്ഫുടസംക്രമസമയത്തുനിന്നാണു്. മേഷസ്ഫുടസംക്രമസമയത്തു സൂര്യ്യമദ്ധ്യമം 11 രാശി 27 തിയ്യതി, 52 ഇലി, 58 വിലി, 6 തല്പര മാത്രമേ ആയിട്ടുള്ളൂ. അപ്പോള്‍ സൂര്യ്യമദ്ധ്യമം ശൂന്യമാകുവാന്‍ രണ്ടില്‍ ചില്വാനം ദിവസവുംകൂടി വേണ്ടതായിട്ടിരിക്കുന്നു. കല്യബ്ദാദി കഴിഞ്ഞിട്ടു രണ്ടില്‍ചില്വാനം ദിവസം കഴിഞ്ഞിട്ടാണു് കല്യാദി തുടങ്ങുന്നതു്. അപ്പോള്‍ തികഞ്ഞ കല്യബ്ദം വെച്ചു ക്രിയ ചെയ്യുമ്പോള്‍ കല്യാദ്യഹര്‍ഗ്ഗണം വരുത്തുവാന്‍ രണ്ടില്‍ ചില്വാനം ദിവസം തള്ളിക്കളയേണ്ടിവരും. എന്നാല്‍ കല്യാദിയിങ്കല്‍ ചന്ദ്രന്റെ ഉദയസ്ഫുടം ഏകദേശം 5 തിയ്യതി 1 ഇലി ആകുന്നു. അസ്സമയത്തു ചന്ദ്രസൂര്യ്യന്മാരുടെ സ്ഫുടാന്തരം 2തി. 54 ഇലി. അതായതു കല്യാദി ഉദയത്തിങ്കല്‍ വെളുത്ത പ്രതിപദം തുടങ്ങിയിട്ടു് ഏകദേശം $14\frac{1}{2}$ നാഴിക കഴിഞ്ഞിരിക്കുന്നു. കല്യാദിയിങ്കലെ ഉദയം വെളുത്ത പ്രതിപദത്തിന്റെ മുതല്‍ക്കാലിലാകുന്നു. ക്രിയയിലും ശുക്ലപ്രതിപദാദി തുടങ്ങി തന്നെ അഹര്‍ഗ്ഗണത്തെ കണക്കാക്കുന്നു. അതു കല്യാദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങിയതുതന്നെ എന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

എന്നാല്‍ സൂര്യ്യന്റെ മേഷസ്ഫുടസംക്രമവും മദ്ധ്യസംക്രമവും തമ്മിലുള്ള രണ്ടില്‍ ചില്വാനം ദിവസത്തിന്റെ വ്യത്യാസത്തെ പരിഹരിക്കുവാന്‍ ഒരു സംസ്കാരം ചെയ്തു സാവനങ്ങളായിരിക്കുന്ന വസ്തുക്കളെക്കൊണ്ടുതന്നെ ഒരു ത്രൈരാശികം ചെയ്താല്‍ ശരിയായിട്ടുള്ള കല്യാദ്യഹര്‍ഗ്ഗണം വരും. മേഷാദി തുടങ്ങി മേഷാദിവരെ ഗമിക്കുവാന്‍ സ്ഫുടസൂര്യ്യനും മദ്ധ്യമസൂര്യ്യനും വേണ്ടിവരുന്ന സമയം "മകരോല്‍ബണകൃഷ്ണതാലഃ" (365 ദിവസം 15 നാഴിക 31 വിനാഴിക 15 ഗുര്‍വ്വക്ഷരം).

1119 മേടം 1-ാംനു-ക്ക തികഞ്ഞ കല്യബ്ദം=5045.

അതായതു കല്യാദിയിങ്കന്നു രണ്ടിൽചില്വാനം ദിവസം മുമ്പുണ്ടായ സൂര്യ്യസ്ഫുടമേഷസംക്രമം തുടങ്ങി 1119ല്‍ മേഷസംക്രമംവരെ സ്ഫുടസൂര്യ്യന്‍ 5045 പരിഭ്രമണങ്ങള്‍ കഴിച്ചു എന്നര്‍ത്ഥം അസ്സമയത്തു മദ്ധ്യമസൂര്യ്യന്‍ 5044 ഭഗണം 11 രാശി 27തി. 52ഇ. 58വി. 6ത. മാത്രമേ ഗമിച്ചിട്ടുള്ളൂ. അപ്പോള്‍ 4320000 ഭഗണത്തിനു 1577917500 ദിവസം വേണമെങ്കില്‍ 5044ഭ. 11രാ. 27തി. 52ഇ. 58വി. 6തക്കു് എത്ര ദിവസം വേണമെന്നുള്ള ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു ശരിയായിട്ടുള്ള അഹര്‍ഗ്ഗണം വരും.

1119 മേടം 1-ാംനു-ക്ക തികഞ്ഞ കലിക്കൊട്ടനാള്‍

$$=(5044\text{ഭ. } 11\text{രാ. } 27\text{തി. } 52\text{ഇ. } 58\text{വി. } 6\text{ത.}) \times \frac{1577917500}{4320000}$$

$$= \left[5045\text{ഭ.} - (0\text{രാ.} 2\text{തി.} 7\text{ഇ.} 1\text{വി.} 54\text{ത.})\right] \times \frac{2103890}{5760}$$

(ഇവിടെ 1577917500നേയും 4320000നേയും 7500കൊണ്ടു് അപവര്‍ത്തിച്ചാല്‍ ദൃഢഭൂദിനഭഗണങ്ങളായിരിക്കുന്ന 210389ഉം 576ഉം വരും. ഇവയെ പത്തില്‍ ഗുണിച്ചവയെയാണിവിടെ ഗുണകാരഹാരകങ്ങളായിട്ടു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നതു്.)

മദ്ധ്യമാനയനം

അനന്തരം കല്യാദ്യതീതമദ്ധ്യമാനയനം. അവിടെ യുഗസാവനത്തിന്നു് ഇത്ര ഭഗണം*, അതീതസാവനത്തിന്നു് എത്ര ഭഗണം എന്നു തികഞ്ഞ ഭഗണങ്ങൾ ഉളവാകും. പിന്നെ ശേഷത്തിങ്കന്നു ഭഗണാവയവമായിരിക്കുന്ന രാശ്യംശലിപ്താദിയെ പന്ത്രണ്ടു്, മുപ്പതു്, അറുവതു് എന്നവറ്റെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചുണ്ടാക്കൂ. അവ മദ്ധ്യമങ്ങളാകുന്നവ. ഇങ്ങനെ ഒരു പ്രകാരം. പിന്നെ മാസാധിമാസാവമഭഗണങ്ങളിൽവെച്ചു കല്യാദ്യതീതങ്ങളിൽ യാതൊന്നിനെ ഇച്ഛാരാശിയായിട്ടു കല്പിക്കുന്നു, യുഗസംബന്ധികളായിരിക്കുന്ന തജ്ജാതീയത്തെ പ്രമാണമാക്കി പിന്നെ യുഗസംബന്ധികളിലിഷ്ടത്തെ പ്രമാണഫലമാക്കൂ. പിന്നെ ത്രൈരാശികംകൊണ്ടുണ്ടായ ഇച്ഛാഫലം പ്രമാണഫലത്തോടു സമാനജാതീയമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ഗ്രഹമദ്ധ്യമാനയനം.

അപവർത്തനവും കുട്ടാകാരവും

അനന്തരം ഇച്ചൊല്ലിയവ യുഗസംബന്ധികൾ ഗുണഹാരങ്ങൾ എന്നിരിക്കുമ്പോൾ ക്രിയ പെരുതു് എന്നിട്ടു ക്രിയയുടെ ചുരുക്കത്തിന്നായിക്കൊണ്ടു ഗുണഹാരങ്ങളെ ചുരുക്കുവാനായിക്കൊണ്ടു് അപവർത്തനക്രിയയേയും പ്രസംഗാൽ കുട്ടാകാരത്തേയും ചൊല്ലുന്നു. അവി

അപ്പോൾ ഇഷ്ടകല്യാദ്യഹർഗ്ഗണം.

$$= \left[5045\text{ദി} - \frac{2\text{തി. }7\text{ഇ. }1\text{വി. }54\text{ത.}}{360}\text{ദി}\right] \times \frac{2103890}{5760}$$

$$= \frac{5045\text{ദി} \times 2103890 - \frac{2\text{തി. }7\text{ഇ. }1\text{വി. }54\text{ത.}}{360} \times 2103890.}{5760}$$

$$= \frac{5045 \times 2103890 - \frac{445434-25-19-6}{36}}{5760}$$

$$= \frac{5045 \times 2103890 - 12373}{5760}$$

"അബ്ദാൻ കലേരഭ്ജഗന്ന്യപേന്ദ്രൈ-
ഹതാം, തതോ ലാസഗരീഡ്യ ഹീനാൽ
ഇഷ്ടച്ഛമാപ്തം ഗതമാസവാക്യ
ഗതാഹയുക്തം ദ്യുഗണോച്ഛവാരാൽ." (പഞ്ചബോധം)

ഇതുപ്രകാരം ക്രിയ ചെയ്താലും മുമ്പിലെ അഹർഗ്ഗണം തന്നെ വരും.

* ജ്യോതിശ്ചക്രത്തിൽ ഗ്രഹത്തിന്റെ കിഴക്കുനോക്കിയുള്ള ഒരു ഭ്രമണത്തിന്നു് ഒരു ഭഗണമെന്നു പറയുന്നു.

ടെ ഇഷ്ടാഫലത്തെ പ്രമാണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും പ്രമാണഫലത്തെ ഇച്ഛകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും തുല്യസംഖ്യമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ഈ ഘാതത്തിങ്കന്നു് ഇച്ഛകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു പ്രമാണഫലമായിട്ടു വരും. പ്രമാണത്തെകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു് ഇഷ്ടാഫലമായിട്ടു വരും. പ്രമാണഫലത്തെകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു് ഇഷ്ടാ. ഇഷ്ടാഫലത്തെകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു പ്രമാണം. ഈവണ്ണമാകുമ്പോൾ ഇഷ്ടാഫലത്തെ നേടേ അറിഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ അതിനെ പ്രമാണത്തെകൊണ്ടു ഗുണിച്ച പ്രമാണഫലത്തെകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു് ഇഷ്ടാരാശിയായിട്ടു വരും, ഹരിച്ചാൽ ശേഷം മുടിയുന്നേടത്തു്. മുടിയാത്തേടത്തു പോരാത്ത സംഖ്യ കൂട്ടീട്ടു്, ഏറുകിൽ കളഞ്ഞിട്ടു ഹരിച്ചാൽ ഇഷ്ടാരാശിയായിട്ടു വരും. ഇഷ്ടാഫലം പൂർണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്നതിനെക്കൊണ്ടു പ്രമാണരാശിയെ ഗുണിപ്പൂ എങ്കിൽ ശേഷത്തെ കൂട്ടുകതാൻ കളകതാൻ വേണ്ടിരിക്കും. പ്രമാണഫലത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചിട്ടു് ഇച്ഛേ വരുത്തുന്നേടത്തേയ്ക്കു് ഇഷ്ടാഫലാവയവത്തെക്കൊണ്ടുകൂടി ഗുണിക്കിൽ ശേഷമുണ്ടായിരിക്കയില്ല. അവിടെ ഇഷ്ടാഹർഗ്ഗണത്തിങ്കന്നു് ഇഷ്ടാഫലമായിട്ടു് അതീത ഭഗണങ്ങൾ ഉണ്ടായാൽ ഹരിച്ചശേഷത്തിങ്കന്നു ഭഗണാവയവമായിട്ടു് അതീതരാശ്യാദികൾ ഉണ്ടാകുന്നു. ഭഗണംപൂർണ്ണരൂപമുണ്ടായാറെ യാതൊന്നു ഹരിപ്പാൻ പോരാതെ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിച്ചതു് അതിനെ ഭഗണശേഷമെന്നു ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ ഭഗണത്തിന്നു നേടത്തെ അവയവമാകുന്നതു രാശി. അതു പന്ത്രണ്ടുകൂടിയതു് ഒരു ഭഗണം. ആകയാൽ രാശിക്കു ഛേദമാകുന്നതു പന്ത്രണ്ടു് ആകയാൽ ഭഗണത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചു മുമ്പിലെ പ്രമാണംതന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അതീതഭഗണാവയവമായിട്ടു രാശിയുണ്ടാം. അവിടേയും ശേഷമുണ്ടു ഹാര്യത്തിങ്കൽ എങ്കിൽ അതിന്നു രാശിശേഷമെന്നു പേർ. അതിങ്കന്നു രാശ്യവയവം ഭാഗം; മുപ്പതുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു പ്രമാണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു ഭാഗം. ശേഷം ഭാഗശേഷം. അതിങ്കന്നു് അറുപതിൽ ഗുണിച്ചു മുമ്പിലെ ഹാരകംതന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചതു കല. അവിടെ ശേഷിച്ചതു കലാശേഷം. ഈവണ്ണമാകുമ്പോൾ കലാശേഷത്തിങ്കന്നു വിപരീതക്രിയകൊണ്ടു് ഇഷ്ടാഹർഗ്ഗണം വരും. അതു് എവ്വണ്ണമെന്നു്. അവിടെ ഹാരകത്തെക്കൊണ്ടു് ഈ കലേ ഗുണിച്ചു കലാശേഷത്തെ കൂട്ടി അറുപതിൽ ഹരിച്ച ഫലം ഭാഗശേഷമായിട്ടു വരും. പിന്നെ ഹാരകത്തെക്കൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിൽ ഭാഗശേഷത്തെ കൂട്ടി മുപ്പതിൽ ഹരിച്ച ഫ

ലം രാശിശേഷം. അതിനെ രാശിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഹാരകത്തിൽക്കൂടി പന്ത്രണ്ടിൽ ഹരിച്ചതു ഭഗണശേഷം. അതിനെ അതീതഭഗണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഹാരകത്തിങ്കൽക്കൂടി യുഗഭഗണത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം അതീതാഹർഗ്ഗണം.

ഇവിടെ ഗുണഗുണ്യഘാതമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഹാര്യത്തെ ഭാജ്യമെന്നു ചൊല്ലുവാൻ യോഗ്യമായിട്ടിരിക്കുന്നേടത്തു കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ പ്രമാണഫലങ്ങൾക്കു ഭാജ്യമെന്നു പേർ ചൊല്ലുന്നു*. അവിടെ ഭഗണാദി ശേഷത്തിൽ രാശ്യാദിച്ഛേദങ്ങൾ പന്ത്രണ്ടും, മുപ്പതും, അറുപതും ക്രമേണ ഭാജ്യങ്ങളാകുന്നതു് $.

പ്രമാണമൊന്നുതന്നെ എല്ലാടവും ഭാജകമാകുന്നതു്. മുമ്പിലെ മുമ്പിലെ ശേഷം ഇച്ഛാരാശിയായിരിക്കുന്നതു് അവിടെ അവിടെയ്ക്കു സാദ്ധ്യമാകുന്നതു്. അസ്സാദ്ധ്യത്തിന്നു ഗുണകാരമെന്നു കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ പേർ. പ്രമാണഫലത്തെക്കൊണ്ടു് ഇച്ഛാരാശിയെ ഗുണിച്ചു പ്രമാണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിച്ചതു് എത്ര സംഖ്യ അതിനെ അറിയൂ, ഒന്നു തികയാൻ പോരാത്തതു് ഇത്ര സംഖ്യയെന്നുതാൻ. ഇതു് ഒരു രാശിയാകുന്നതു്. പിന്നെ പ്രമാണവും പ്രമാണഫലവും ഇവ മൂന്നിനെ അറിഞ്ഞിരിക്കും വിഷയത്തിങ്കൽ ഇച്ഛാരാശിയെ അറിവാനായിക്കൊണ്ടുള്ള ഗണിതത്തിന്നു കുട്ടാകാരമെന്നു പേർ ആകുന്നു||. അവിടെ ആദിത്യന്റെ അപവർത്തിതഭഗണം തൽസമനെന്നു്. അതിന്റെ ദ്യുഗണം ധീജഗന്നൂപുരം‡. ഇതുപ്ര

---

* മദ്ധ്യമാനയത്തിൽ പ്രമാണം ഭൂദിനം; പ്രമാണഫലം യുഗഭഗണം; ഇച്ഛാ അതീതാഹർഗ്ഗണം; ഇച്ഛാഫലം ഭഗണാദി മദ്ധ്യമം. യുഗഭഗണമാകുന്ന ഗുണ്യത്തെ അതീതാഹർഗ്ഗണമായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഘാതത്തെ ഭൂദിനമാകുന്ന ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മദ്ധ്യമം വരുന്നു. സാമാന്യേന ഈ പ്രമാണഫലേച്ഛാഘാതത്തെ ഹാര്യം അല്ലെങ്കിൽ ഭാജ്യമെന്നും ചൊല്ലുന്നു എന്നാൽ കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ പ്രമാണഫലത്തെത്തന്നെയാണു് ഭാജ്യമെന്നു പറയാറുള്ളതു. ഇച്ഛയെ ഗുണകാരമെന്നും പ്രമാണത്തെ ഭാജകം അല്ലെങ്കിൽ ഹാരകമെന്നും പറയുന്നു.

$ അനുബന്ധത്തിലെ ഉദാഹരണം നോക്കുക.

|| കുട്ടാകാരത്തിന്റെ വിഷയത്തെപ്പററി അനുബന്ധത്തിൽ നോക്കുക.

‡ ആദിത്യത്തിന്റെ ഭഗണം=4320000.

ഭൂദിനം=1577917500.

ഇവയുടെ അപവർത്തനഹാരകം=7500.

$$\text{അപ്പോൾ അവാന്തരയുഗദിനം} = \frac{1577917500}{7500} = 210389\ (\text{ധീജഗന്നൂപുരം}).$$

$$\text{അവാന്തരയുഗഭഗണം} = \frac{4320000}{7500} = 576\ (\text{തൽസമഃ})$$

മാണം. തൽസമൻ പ്രമാണഫലം. അവാന്തരയുഗം യുഗഭഗണമെന്നുമുണ്ട് ഇവററിന്നു പേർ*. ദൃഢഭാജ്യഭാജകങ്ങൾ എന്നുമുണ്ടു പേർ. ഇവററെക്കൊണ്ടുള്ള ഭഗണശേഷത്തിങ്കലെ കുട്ടാകാരത്തെ ഇവിടെ നടേ കാട്ടുന്നു. അവിടെ അവാന്തരയുഗം മുടിയുന്ന ദിവസം ഉദയത്തിന്നു മീനാന്ത്യത്തിങ്കൽ അകപ്പെട്ടിരിക്കും ആദിത്യമദ്ധ്യമം$. ആകയാലന്നു ഭഗണശേഷമില്ല. പിന്നെ അതിങ്കൽനിന്നു ചെന്ന ദിവസത്തെ തൽസമനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ധീജഗന്നൂപുരത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച മദ്ധ്യമം വരുത്തുന്നു. ആകയാൽ അവാന്തരയുഗാദിയിങ്കന്ന് ഒരു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ തൽസമൻതുല്യം ഭഗണശേഷം. രണ്ടു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ അതിലിരട്ടി. ഇങ്ങനെ ദിവസംപ്രതി ഓരോ ഓരോ തൽസമൻ ഏറി ഏറി ഇരിക്കും ഭഗണശേഷത്തിങ്കൽ. ഇത് അധികശേഷമായിട്ടിരുന്നൊന്ന്. പിന്നെ മാതുലനോളം ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ മാതുലനും തൽസമനും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു ധീജഗന്നൂപുരത്തിന്നു പോരാത്തതു ധീവന്ദ്യഃ എന്നാകയാൽ അന്ന് ഊനശേഷമാകുന്നത് അത്. ആകയാൽ അടുത്തപിറെറ ദിവസം ഈ ഘാതത്തിൽ ഒരുതൽസമൻ കൂട്ടുണ്ടുകയാൽ അതിൽ ധീവന്ദ്യനെക്കൊണ്ടു ഭഗണം തികഞ്ഞ്, ധീവന്ദ്യൻ പോയ തൽസമശേഷം ദ്വിതീയസംവത്സരാദ്യദിവസത്തിങ്കലെ അധികശേഷം സുരഭി എന്ന്℘. പിന്നെ ഇതിൽ ഓരോ തൽസമൻ കൂട്ടി കൂട്ടി ഇരിക്കുന്നതു ദ്വിതീയസംവത്സരത്തിൽ ദിവസംപ്രതിയുള്ള ഭഗണശേഷം. പിന്നെ മൂന്നാം സംവത്സരാദിയിങ്കലെ ദിവസത്തിൽ ധീവന്ദ്യനെ രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചതു തൽസമനിൽനിന്നു കളഞ്ഞശേഷം ഭഗണശേഷമാകുന്നതു ദാസീസ്ത്രീ എന്ന്. പിന്നെ ഇത് ആദിയായി ദിവസംപ്രതി തൽസമൻ ഏറി ഇരിക്കുന്നതു മൂന്നാംസംവത്സരത്തിൽ ഭഗണശേഷം. ഇങ്ങനെ **സംവത്സരാദ്യദിവസത്തിലെ ഭഗണശേഷത്തിന്നു പ്രതിസംവത്സരം ഭേദമുണ്ട്**. പിന്നെ ദിവസംപ്ര

---

* 1577917500 ദിവസങ്ങൾ കൂടിയതു് ഒരു യുഗം. 210389 ദിവസങ്ങൾ കൂടിയതു് ഒരു അവാന്തരയുഗം. അവാന്തരയുഗഭഗണം=576.

$ കല്യാദി ഉദയത്തിങ്കൽ സൂക്ഷ്മമദ്ധ്യമം ശൂന്യം. അവാന്തരയുഗമാകുന്ന 210389 ദിവസംകൊണ്ടു ആദിത്യൻ 576 ഭഗണം തികക്കുന്നു. അപ്പോൾ അവാന്തരയുഗം മുടിയുന്ന ദിവസം ഉദയത്തിങ്കലും ആദിത്യമദ്ധ്യമം ശൂന്യം.

℘ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിച്ചതു് അധികശേഷം; തികയുവാൻ പോരാതെ വരുന്നതു് ഊനശേഷം. ധീവന്ദ്യഃ എന്നതു് ഊനശേഷം (−149). −149+576=427 (സുരഭിഃ) എന്നതു് അധികശേഷം.

തിയുള്ള വൃദ്ധിക്കു സാമ്യമുണ്ടു്. ആകയാൽ ഒരു ദിവസത്തെ ശേഷത്തോടു തുല്യമായിട്ടു മറ്റൊരു ദിവസം ആ യുഗത്തിൽ ഉണ്ടാകയില്ല*. ആകയാൽ ധീജഗന്നൂപുരത്തിൽ കുറഞ്ഞതിൽ യാതൊരു സംഖ്യെകൊണ്ടു തത്സമനെ ഗുണിച്ചാൽ ധീജഗന്നൂപുരംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഇത്ര പോരാതെയിരിക്കും ഇത്ര അധികമായിട്ടിരിക്കും എന്നുതാൻ അഗ്ഗുണകാരസംഖ്യ എത്ര എന്ന ചോദ്യം ഉപപന്നമത്രെ. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്തു ഗുണകാരസംഖ്യയെ അറിവാനായിക്കൊണ്ടുള്ള ഗണിതത്തിന്നു കുട്ടാകാരമെന്നു പേരാകുന്നു.

അവിടെ ഏതാനുമൊരു സംഖ്യാ വിശേഷത്തെ ഉദ്ദേശിച്ചു് ഓക്കുമ്പോൾ എളുപ്പമുള്ളൂ. എന്നിട്ടു് ഈവണ്ണം നിരൂപിപ്പൂ. അവിടെ തൽസമൻ ഭാജ്യം ധീജഗന്നൂപുരം ഭാജകം, ഊനാംശമായിരിക്കുന്ന

---

* അവാന്തരയുഗാവസാനത്തിൽനിന്നു് അതീതമായിരിക്കുന്ന ദിവസം ഗുണകാരം. തൽസമൻ ഭാജ്യം.

ധീജഗന്നൂപുരം ഭാജകം.

ശേഷങ്ങളെല്ലാം ഭഗണശേഷങ്ങൾ.

യുഗാവസാനത്തിൽനിന്നു് ആദ്യദിവസം — $\frac{576\times 0}{210389}$ — ഫലം $=0$; ശേഷം $=0$.

ഒരു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ — $\frac{576\times 1}{210389}$ — ഫലം $=0$; ശേഷം $=576$ (അധികം)

രണ്ടു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ — $\frac{576\times 2}{210389}$ — ഫലം $=0$; ശേഷം $=2\times 576$ (അധികം)

മൂന്നു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ — $\frac{576\times 3}{210389}$ — ഫലം $=0$; ശേഷം $=3\times 576$ (അധികം)

365ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ — $\frac{576\times 365}{210389}$ — ഫലം $=0$; ശേഷം $=365\times 576$ (അധികം)

അതായതു ഫലം $=1$, ശേഷം $=210389-365\times 576=149$ (ഊനം)

രണ്ടാംകൊല്ലത്തിൽ ഒരു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ
ശേഷം $=-149+576=427$ (അധികം)

രണ്ടാംകൊല്ലത്തിൽ രണ്ടുദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ
ശേഷം $=427+576\times 1$ (അധികം)

രണ്ടാംകൊല്ലത്തിൽ മൂന്നുദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ
ശേഷം $=427+576\times 2$ (അധികം)

മൂന്നുകൊല്ലം ചെല്ലുമ്പോൾ, ശേഷം $=2\times 149$ (ഊനം)

മൂന്നാംകൊല്ലത്തിൽ ഒരു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ
ശേഷം $=-2\times 149+576=278$ (അധികം)

ഇങ്ങനെ ഒരു അവാന്തരയുഗത്തിങ്കൽ സംവത്സരാദ്യദിവസത്തിലെ ഭഗണശേഷത്തിന്നു പ്രതിവത്സരം ഭേദമുണ്ടു്. പിന്നെ ദിവസംപ്രതിയുള്ള വൃദ്ധിക്കു സാമ്യമുണ്ടു്. അതുകൊണ്ടു് ഒരു അവാന്തരയുഗത്തിങ്കൽ ദിവസംപ്രതി ശേഷങ്ങൾക്കു ഭേദമുണ്ടു്.

ഭഗണശേഷം നൂറു് ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്തു യാതൊരു ദിവസം കൊണ്ടു തൽസമനെ ഗുണിച്ചാൽ ഋണക്ഷേപ§മായിരിക്കുന്ന ഈ ഭഗണശേഷം വരു എന്നു് ഊഹിക്കേവേണ്ടൂ എന്നുവെച്ചാൽ മുനിഗാഥ എന്നതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ വരും എന്നു് അറിഞ്ഞുകൊള്ളാം എങ്കിൽ അവ്വണ്ണം കല്പിക്കേ വേണ്ടൂ. ഫലം പിന്നെ ത്രൈരാശികം കൊണ്ടും അറിയാം. അവിടെ തൽസമനും യാതൊരു സംഖ്യയും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതത്തേക്കാൾ ധീജഗന്നൂപുരവും യാതൊരു സംഖ്യയും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം നൂറുസംഖ്യകൊണ്ടു് അധികമായിട്ടിരിക്കും, ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ഗുണകാരസംഖ്യകൾ രണ്ടും മുനിഗാഥ, 20 എന്നതിവിടെ വസ്തുവാകുന്നതു്. അവിടെ തൽസമനെ മുനിഗാഥ എന്നതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിനേക്കാൾ ധീജഗന്നൂപുരത്തെ ഇരുപതിൽ ഗുണിച്ചതു നൂറുസംഖ്യകൊണ്ടു് അധികം. എന്നീ ഗുണകാരങ്ങളെ ഭാജ്യഭാജകങ്ങൾ ഇത്ര വലുതായിട്ടിരിക്കുമ്പോൾ ഊഹിച്ചു് അറിഞ്ഞുകൂടാ. എന്നാൽ ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ ചെറുതായിക്കൊണ്ടിട്ടു ഗുണകാരങ്ങളെ ഊഹിച്ചുകൊള്ളൂ. എന്നാലെളുപ്പമുണ്ടു്.

ചെറുതാക്കുംപ്രകാരം പിന്നെ. അവിടെ ദിവസംപ്രതി തൽസമസംഖ്യ ഭഗണത്തിന്നു വൃദ്ധിയാകുന്നു. ആകയാൽ തൽസമനെ ധീജഗന്നൂപുരത്തിൽ വാങ്ങി വാങ്ങി ഇരിപ്പൂ. അവിടെ മാതുലസംഖ്യയോ

§ തൽസമനെ മുനിഗാഥകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലുള്ള ഫലം ധീജഗന്നൂപുരത്തെ 20കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഫലത്തേക്കാൾ നൂറു കുറയും.

$$576 \times 7305 - 210389 \times 20 = 4207680 - 4207780 = -100.$$

അതായതു ഭാജ്യത്തിൽ നൂറു കുറഞ്ഞിരിക്കും. ഭാജ്യത്തിൽ നൂറു ഋണമായിട്ടു ക്ഷേപിച്ചിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ടു 100നെ ഭാജ്യത്തിങ്കലെ ഋണക്ഷേപമെന്നു പറയുന്നു. അതുപോലെ ഭാജ്യത്തിൽ 100ഏറിയിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അതു ഭാജ്യത്തിലെ ധനക്ഷേപം. ഭാജ്യത്തിൽ പോരാത്തതു് ഊനശേഷം, ഭാജ്യത്തിൽ ശേഷിച്ചതു് അധികശേഷം. അപ്പോൾ ഊനശേഷങ്ങൾ ഭാജ്യത്തിലെ ഋണക്ഷേപങ്ങൾ, അധികശേഷങ്ങൾ ഭാജ്യത്തിലെ ധനക്ഷേപങ്ങൾ. ഊനശേഷങ്ങൾ കുട്ടാകാരത്തിങ്കലെ ക്ഷേപങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ധനക്ഷേപങ്ങളാകുന്നു; അധികശേഷങ്ങൾ കുട്ടാകാരത്തിങ്കലെ ശുദ്ധികൾ അല്ലെങ്കിൽ ഋണക്ഷേപങ്ങളാകുന്നു. അപ്പോൾ ഭാജ്യത്തിൽ പോരാത്തവ ഊനശേഷങ്ങൾ അഥവാ ഭാജ്യത്തിലെ ഋണക്ഷേപങ്ങൾ. അവ കുട്ടാകാരത്തിങ്കലെ ക്ഷേപങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ധനക്ഷേപങ്ങളാകുന്നു. ഭാജ്യത്തിൽ ശേഷിച്ചവ അധികശേഷങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തിലെ ധനക്ഷേപങ്ങളാകുന്നു. അവ കുട്ടാകാരത്തിങ്കലെ ശുദ്ധികൾ അല്ലെങ്കിൽ ഋണക്ഷേപങ്ങളാകുന്നു. അപ്പോളിവിടെ 100 കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ ധനക്ഷേപമാകുന്നു.

ളമാവൃത്തി വാങ്ങിയാൽ പിന്നെ ധീവന്ദ്യ എന്നു ശേഷിക്കും. എന്നിട്ടു മാതുലദിവസത്തിന്നു തൽസമനേക്കാൾ കുറയും ശേഷം. അതു ഋണക്ഷേപം താനും. പിന്നെ ധീവന്ദ്യനേക്കാളും ശേഷം കുറയൂ എന്നു നിരൂപിക്കുന്നതു്. പിന്നെ മാതുലന്റെ പിറ്റെ ദിവസം ധീവന്ദ്യൻ പോയതത്സമൻ ഭഗണശേഷമാകുന്നതു്. അതു ധീവന്ദ്യനേക്കാളേറും. പിന്നെ ദിവസംപ്രതി ഏറുമെത്രെ. പിന്നെ നാഗസ്ഥാനമെന്ന ദിവസത്തിന്നു ധീവന്ദ്യനിലിരട്ടിപോരാതെയിരിക്കും. പിന്നെ കാലസ്ഥാനമെന്ന ദിവസം ധീവന്ദ്യനെ രണ്ടാവൃത്തി തൽസമങ്കൽനിന്നു വാങ്ങിയശേഷം അധികശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ശൂദ്ധനയഃ എന്ന ദിവസം ധീവന്ദ്യൻ മന്നടങ്ങു ഊനശേഷം. പിന്നെ സ്തബ്ധനയഃ എന്ന ദിവസം ത്രിഗുണധീവന്ദ്യനെ തൽസമങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷം ധീപ്രിയ എന്ന അധികശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ധീപ്രിയ എന്നതിങ്കന്നു കുറയൂ എന്നു്. സ്തബ്ധനയ എന്നതിന്നു ധീപ്രിയ എന്ന അധികശേഷം, മാതുലന്നു ധീവന്ദ്യനെന്ന ഊനശേഷം; ആകയാലിവററിന്റെ യോഗം കാത്തവീഴ്യ എന്ന ദിവസം ധീപ്രിയ എന്നും ധീവന്ദ്യ എന്നും ഇവ രണ്ടിന്റേയുമന്തരം ഇരുപതു് ഊനശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഭഗണശേഷം ഇരുപതിൽകുറയൂ എന്നു്. പിന്നെ കാത്തവീഴ്യനെ ആറിൽ ഗുണിച്ച ദിവസം ഇരുപതിനെ ആറിൽ ഗുണിച്ചതു് ഊനശേഷമായിട്ടിരിക്കും. സ്തബ്ധനയഃ എന്ന ദിവസം ധീപ്രിയ എന്ന അധികശേഷം. ഇദ്ദിവസങ്ങളുടെ യോഗം പ്രീതിദ്ദഃശ്ധേ എന്ന ദിവസം ആറിൽ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഇരുപതും ധീപ്രിയ എന്നുമുള്ള അന്തരം ഒമ്പതു് അധികശേഷമായിട്ടിരിക്കും*. ഇങ്ങനെ അധികശേഷദിന

---

* "മാതുലഃ" (365), "നാഗസ്ഥാനം" (730), "ശൂദ്ധനയഃ" (1095), "കാത്തവീഴ്യഃ" (1461) ഇവ ആദ്യത്തെ നാലുസംവത്സരവാക്യങ്ങൾ.

$210389 - 365 \times 576 = 149$ (ഭാജകത്തിൽ ശേഷിച്ചതുകൊണ്ടു ഊനശേഷം).

സ്തബ്ധനയഃ എന്ന ദിവസം $(3 \times 365 + 1)$ ശേഷം $= -3 \times 149 + 576.$

$= 129$ (അധികശേഷം)

സ്തബ്ധനയഃ $+$ മാതുലഃ ($=$ കാത്തവീഴ്യഃ) എന്ന ദിവസം ശേഷം

$= -149 + 129 = -20$ (ഊനശേഷം).

$6 \times$ കാത്തവീഴ്യഃ $+$ സ്തബ്ധനയഃ ($=$ പ്രീതിദ്ദഃശ്ധ) എന്ന ദിവസം.

ശേഷം $= -6 \times 20 + 129.$

$= 9$ (അധികശേഷം).

വും ഊനശേഷദിനവും തങ്ങളിലെ യോഗത്തിന്റെ ശേഷാന്തരം ശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ദിവസങ്ങൾ രണ്ടിനേയും ഗുണിച്ചു കൂട്ടി. ശേഷങ്ങൾ രണ്ടിനേയും അതതു ദിവസഗുണകാരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അന്തരിപ്പൂതും ചെയ്യൂ. എന്നാലായന്തരം യോഗദിവസത്തിന്നു ശേഷമായിട്ടിരിക്കും. അവിടെ ഭാജകത്തിൽ ശേഷിക്കിൽ ഊനശേഷം, ഭാജ്യത്തിൽ ശേഷിക്കിൽ അധികശേഷം എന്നറിയതം.

ആകയാൽ ധീവന്ദ്യനേയും ധീപ്രിയനേയും അയ്യഞ്ചിൽ ഗുണിച്ച് അന്തരിച്ചാൽ ധീവന്ദ്യങ്കൽ നൂറു ഏറിയിരിക്കും. പിന്നെ മാതുലനേയും സ്ഥൂലനയനേയും അയ്യഞ്ചിൽ ഗുണിച്ചുകൂട്ടിയ മുനിഗാഥ എന്ന ദിവസത്തിന്നു നൂറ് ഊനശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇരുപതിനെ പതിന്നാലിലും ഒമ്പതിനെ ഇരുപതിലും ഗുണിപ്പൂ. തങ്ങളിലന്തരം നൂറ്. പിന്നെ പ്രീതിദുശ്ശ എന്നതിനെ ഇരുപതിലും കാത്തവീര്യനെ പതിന്നാലിലും ഗുണിച്ച് തങ്ങളിൽ കൂട്ടു. പിന്നെ അതിങ്കന്നു ധീജഗന്നൂപുരം പോയശേഷം മുനിഗാഥ എന്നതിന്ന് ഊനശേഷം നൂറ് എന്നു ചൊല്ലിയെല്ലോ. ആകയാൽ ശേഷമെത്ര ചെറുതായാൽ ഗുണകാരത്തെ ഊഹിക്കാവൂ അത്ര ചെറുതായിട്ട് ഊഹിച്ചുകൊള്ളൂ ഗുണകാരങ്ങളെ. എന്നാൽ എല്ലാടവും ഫലസാമ്യമുണ്ട്*.

എന്നിട്ടു ഗുണകാരമെളുതായിട്ടുവരുംപ്രകാരമുണ്ടു ലീലാവതിയിങ്കൽ ചൊല്ലീട്ട്.

"ഭാജ്യോ ഹാരഃ ക്ഷേപകശ്ചാപവര്‍ത്ത്യഃ
കേനാപ്യാദൌ സംഭവേ കുട്ടകാര്‍ത്ഥം |
യേന ച്ഛിന്നൌ ഭാജ്യഹാരൌ ന തേന
ക്ഷേപശ്ചേത്തദ്ദുഷ്ടമുദ്ദിഷ്ടമേവ ||

---

* ക്രിയയെ എളുപ്പമാക്കിത്തീർക്കുവാനുള്ള ഉപായത്തെ ഇവിടെ കാണിക്കുന്നു.

(ക) $(-149+129)\times 5=-20\times 5=-100$ (ഊനശേഷം)

(ഖ) $-20\times 14+9\times 20=-280+180=-100$

ഇവയുള്ള ദിവസങ്ങൾ:—

(ക) $(365+1096)\times 5=7305=$(മുനിഗാഥ).

(ഖ) $9862\times 20+1461\times 14=217694$.

ഇതു് ഒരു അവാന്തരയുഗദിവസത്തെക്കാൾ ഏറുകകൊണ്ടു 210389 എന്നതിനെ ഇതിൽനിന്നും വാങ്ങേണം.

അപ്പോൾ $217694-210389=7305$ (മുനിഗാഥ എന്നതന്നെ.)

ഒരു അവാന്തരയുഗത്തിങ്കൽ ഒരു ശേഷം ഒരു ദിവസം മാത്രമേ ഉണ്ടാകയുള്ളൂ.

പരസ്പരം ഭാജിതയോര്യയോര്യ-
ശ്ശേഷസ്തയോസ്സ്യാദപവർത്തനന്തൽ |
സ്വേനാപവർത്തേന വിഭാജിതൗ യൗ
തൗ ഭാജ്യഹാരൗ ദൃഢസംജ്ഞിതൗ സ്തഃ ||
മിഥോ ഭജേത്തൗ ദൃഢഭാജ്യഹാരൗ
യാവദ്വിഭക്തേ ഭവതീഹ രൂപം |
ഫലാന്യധോധസ്തദധോനിവേശ്യഃ
ക്ഷേപസ്തഥാന്തേ ഖമുപാന്തിമേന ||
സ്വോർദ്ധ്വേ ഹതേന്ത്യേന യുതേ തദന്ത്യം
ത്യജേന്മുഹുസ്സ്യാദിതി രാശിയുഗ്മം |
ഊർദ്ധ്വോ വിഭാജ്യേന ദൃഢേന തഷ്ടഃ
ഫലം ഗുണസ്സ്യാദപരോ ഹരേണ ||
ഏവം തദൈവാത്ര യദാ സമാസ്താ-
സ്സ്യുർല്ലബ്ധയശ്ചേദ്വിഷമാസ്തദാനീം |
യഥാ(ദാ)ഗതൗ ലബ്ധിഗുണൗ വിശോദ്ധ്യൗ
സ്വതക്ഷണാച്ഛേഷമിതൗ തു തൗ സ്തഃ || ഇതി*.

ഇവിടെ ചെറിയ രണ്ടു ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ ഉദ്ദേശിക്കുന്നു. നടേ അതിങ്കൽ ക്രിയ യോജിച്ചാൽ വേണ്ടുന്നേടത്തു് അതിദേശിച്ചുകൊള്ളാം പിന്നെ. എന്നിട്ടു് ഉദാഹരണം:

“ഏകവിംശതിയുതം ശതദ്വയം |
യൽഗുണം ഗണക പഞ്ചഷഷ്ടിയുക് ||
പഞ്ചവർജ്ജിതശതദ്വയോദ്ധൃതം |
ശുദ്ധിമേതി ഗുണകം വദാശുമേ” || ഇതി. (ലീലാവതീ).

ഇതിൻ ചോദ്യം$. ഇരുനൂററിരുപത്തൊന്നിനെ യാതൊന്നു കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ അറുപത്തഞ്ചുകൂട്ടി നൂററിതൊണ്ണൂററഞ്ചുകൊണ്ടു

---

* ഈ കുട്ടാകാരക്രിയ അനുബന്ധത്തിൽ വിസ്തരിച്ചു കാണിച്ചിട്ടുണ്ടു്.

$ $\frac{221\times \text{ഗുണകാരം} + 65}{195}$ = ഫലം. ഈ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ കാണുന്നതാണു് കുട്ടാകാരക്രിയ.

[Kuttakaram is to find the integral values of x and y from the Indeterminate Equation of the first degree $\frac{Ax\pm C}{B}=y$.

If A, B and C are known, this may be reduced to the form $Ax-By=\pm C$. The problem is to find the integral of x and y so that $Ax-By=\pm C$ where A, B, and C are given integers.]

ഹരിച്ചാൽ ശേഷിയാതെ ഇരിപ്പൂ ആ ഗുണകാരമെത്രയെന്ന ചോദ്യം — ഇതു കട്ടാകാരത്തിന്നു വിഷയമാകുന്നതു്.

അനന്തരം അപവൎത്തനപ്രകാരം. ഭാജ്യമാകുന്ന ഇരുനൂററിരുപത്തൊന്നിനെ ഭാജകമാകുന്ന നൂററിതൊണ്ണൂററഞ്ചുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷം ഇരുപത്തിയാറു്. പിന്നെ അതിനെക്കൊണ്ടു നൂററിതൊണ്ണൂററഞ്ചിനെ ഹരിച്ചാൽ ശേഷം പതിമൂന്നു്. അതിനെക്കൊണ്ടു് ഇരുപത്താറിനെ ഹരിച്ചാൽ ശേഷമൊട്ടുമില്ലായ്കയാൽ പതിമൂന്നിൻെറ ആവൃത്തി ഇരുപത്താറു്. അതു ഹേതുവായിട്ടുതന്നെ ഇരുപത്താറിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുപോയ ഭാഗവും പതിമൂന്നിൻെറ ആവൃത്തിതന്നെയാകയാൽ ഈ ഭാഗവും പതിമൂന്നും കൂടിയതിനെക്കൊണ്ടു നടേ ഭാജ്യത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞതും പതിമൂന്നിൻെറ ആവൃത്തിതന്നെ. ഈ ന്യായംകൊണ്ടു തന്നെ ഇതിങ്കന്നു മുമ്പിലും അന്യോന്യം ഹരിച്ചതാകിൽ ഒടുക്കത്തെ ശേഷിച്ചതിൻെറ ആവൃത്തിതന്നെയായിട്ടിരിക്കും പോയ ഭാഗങ്ങളൊക്ക*. എന്നാൽ പരസ്പരം ഹരിച്ച ശേഷിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു നടേത്തെ ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ ഹരിച്ചാൽ ശേഷിയാതെ മുടിയും, അങ്ങനെ ഹരിച്ചിരിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾക്ക ദൃഢഭാജ്യഭാജകങ്ങൾഎന്നു പേർ. എന്നാലിവിടെ ദൃഢഭാജ്യം പതിനേഴ്, ദൃഢഭാജകം പതിനഞ്ചു്. പിന്നെ ക്ഷേപം അറുപത്തിഅഞ്ചിനെ പതിമൂന്നിൽ ഹരിച്ചാൽ ഫലം അഞ്ചിവിടത്തു ക്ഷേപമാകുന്നു. ഇവിടെ ക്ഷേപത്തെ പതിമൂന്നിൽ ഹരിച്ചാൽ മുടിയാതെ ഇരിക്കയില്ല. അതിന്നു ഹേതു. ഭാജകത്തിങ്കന്നു് അധികമാകുന്ന ഭാഗം ഭാജ്യത്തിങ്കൽ ഇരുപത്താറു് ഉള്ളു. അതിനെ ഗുണിച്ചതു ശേഷത്തിങ്കലെ വൃദ്ധിയാ¶കുന്നതു്.

---

* 195) 221 (1
195
26) 195 (7
182
13) 26 (2
26
0

$26 = 13 \times 2$. (13ൻെറ ആവൃത്തി).
$182 = 26 \times 7 = 13 \times 2 \times 7$ (13ൻെറ ആവൃത്തി).
ഭാജ്യത്തിൽ കളഞ്ഞതു
$195 = 182 + 13 = 13.\ (14 + 1)$.
(13ൻെറ ആവൃത്തി).
$221 = 195 + 26$. (13ൻെറ ആവൃത്തി)

¶ ഭാജ്യം $= 221$; ഭാജകം $= 195$; ഇവയുടെ അപവൎത്തനം $= 13$.

$\frac{221 \times 1}{195}$ — ശേഷം $= 26 \times 1 = 26$ (13ൻെറ ആവൃത്തി)

$\frac{221 \times 2}{195}$ — ശേഷം $= 26 \times 2 = 52$ (13ൻെറ ആവൃത്തി)

$\frac{221 \times 3}{195}$ — ശേഷം $= 26 \times 3 = 78$ (13ൻെറ ആവൃത്തി)

ആകയാലെ പതിമൂന്നിൽ ഹരിച്ചാൽ മുടിഞ്ഞിരിക്കുമെത്രെ. അല്ലാസ്സിൽ ഈ ഭാജ്യഭാജകങ്ങളിൽ സംഭവിക്കുന്ന ക്ഷേപമല്ല ഉദ്ദേശിച്ചതു് എന്നു അറിയേണം. ആകയാലെ ഉദ്ദേശമനുപപന്നം ഈവണ്ണമിരിക്കുന്നതു് എന്നു കല്പിക്കേണം.

അനന്തരമിവ്വണ്ണമപവത്തിച്ച ദൃഢങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭാജ്യഭാജകക്ഷേപങ്ങൾ പതിനേഴും പതിനഞ്ചും, അഞ്ചും, ഇവറ്റെക്കൊണ്ടു ഭാജ്യത്തിന്റെ ഗുണകാരത്തെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം. അവിടെ ഭാജ്യം പതിനേഴിനെ ഭാജകമായിരിക്കുന്ന പതിനഞ്ചുകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ഒന്നു്; ശേഷം രണ്ടു്. പിന്നെ ആ രണ്ടിനെക്കൊണ്ടു പതിനഞ്ചിനെ ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഏഴ്, നടേത്തെ ഫലത്തിന്നു കീഴെ വെപ്പൂ; ശേഷം ഒന്നു്. ഭാജ്യഭാജകങ്ങളിൽ ഒരിടത്തു ശേഷമൊന്നാവോളം അന്യോന്യം ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങളെ ക്രമേണ കീഴെ കീഴെ വെപ്പൂ. അപ്ഫലപരമ്പരയ്ക്കു വല്ലീ എന്നു പേർ. അനന്തരം ഈ വല്ലീഫലങ്ങൾ ഒന്നും, ഏഴും, ശേഷങ്ങൾ രണ്ടും ഒന്നും ഇവറ്റെ ക്രമേണ കീഴെ കീഴെ വെച്ചു വല്ല്യാനയനന്യായവിപരീതക്രിയയെക്കൊണ്ടു ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു. അവിടെ ഒടുക്കത്തെ ക്രിയ നടേ വേണ്ടുവതു്. അതാകുന്നതു ഭാജ്യത്തിങ്കലെ ശേഷം രണ്ടു്. അതുകൊണ്ടു ഭാജകം പതിനഞ്ചിനെ ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം ഏഴ്. എന്നിട്ടു് അവിടുത്തെ ഹാരകമാകുന്ന രണ്ടിനെക്കൊണ്ടു തന്റെ ഫലമാകുന്ന ഏഴിനെ ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ തന്റെ ഹാര്യമു

ഗുണകാരത്തിന്റെ എത്ര ആവൃത്തികൊണ്ടു ഭാജ്യത്തെ ഗുണിക്കുന്നു, 26ന്റെ അത്രാവൃത്തി അധികശേഷമായിട്ടു ഭാജ്യത്തിൽ ശേഷിക്കും. 13കൊണ്ടു 26നെ ശേഷം കൂടാതെ ഹരിക്കാവുന്നതുകൊണ്ടു ക്ഷേപത്തേയും 13കൊണ്ടു് അപവത്തിക്കാം. കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ ഭാജ്യഭാജകങ്ങളുടെ അപവത്തനം ക്ഷേപത്തിന്റേയും അപവത്തനമായിരിക്കുമെന്നു നിയതം.

If $\frac{Ax \pm C}{B} = y$ (an integer), and A and B have a common factor, then C is also a multiple of the factor.

Let p be the common factor and let $A = ap$ and $B = bp$.

Then $\frac{apx \pm C}{bp} = y$.

$\therefore apx \pm C = y.\,bp.$

$\therefore \pm C = p\,(y.\,b - ax)$

$\therefore p$ is a factor of C.

ണ്ടായിവരും, ഹൃതശേഷമില്ലാത്തേടത്ത്. ഉള്ളേടത്തു പിന്നെ ശേഷത്തെ ഈ ഘാതത്തിൽ കൂട്ടിയാൽ ഹാര്യമായിട്ടുവരും. ഇവിടെ രണ്ടും ഏഴും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം പതിനാലിൽ ശേഷിച്ച ഒന്നിനെ കൂട്ടിയാൽ രണ്ടിന്റെ ഹാര്യമായിട്ടിരുന്ന പതിനഞ്ചു വരും. പിന്നെ ആ പതിനഞ്ചിന്റെ ഹാര്യത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരം. പതിനഞ്ചിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം ഒന്ന്. അതിനെ പതിനഞ്ചുകൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ പതിനഞ്ചുതന്നെ. അതിൽ പിന്നെ അവിടെ ശേഷിച്ച ശേഷം രണ്ടിനേയും കൂട്ടിയുള്ള പതിനേഴ് ആ പതിനഞ്ചിന്റെ ഹാര്യമാകുന്നത്. പിന്നെ മുമ്പിലും വല്ലീഫലങ്ങൾ ഉണ്ടായിട്ടിരിക്കുന്നതാകിൽ ഇപ്പതിനേഴിനെക്കൊണ്ടു തനിക്കടുത്ത മുമ്പിലെ ഫലത്തെഗുണിച്ചതിൽ പതിനഞ്ചിനെ കൂട്ടൂ. എന്നാൽ പതിനേഴിന്റെ ഹാര്യം വരും. ഇപ്രകാരം എല്ലാടവും ഉപാന്ത്യത്തെക്കൊണ്ടു തനിക്കടുത്ത മുമ്പിലെ ഫലത്തെ ഗുണിപ്പൂ. അന്ത്യത്തെ കൂട്ടൂ. പിന്നെ ആ അന്ത്യത്തെ കളഞ്ഞു പിന്നെയുള്ളതിൽവെച്ച് ഉപാന്ത്യത്തെക്കൊണ്ട് അതിനടുത്തു മുമ്പിലേതിനെ ഗുണിച്ചതിൽ അന്ത്യത്തെ കൂട്ടി ആയന്ത്യമായിട്ടു വെച്ചിരിക്കുന്നതിനെ കളവൂ. ഇങ്ങനെയാകുമ്പോൾ യാതൊരിക്കൽ രണ്ടു പങ്ക്തിയേ ഉള്ളൂ എന്നു വരുന്നു, അപ്പോൾ ഉപാന്ത്യമില്ലായ്കയാൽ ക്രിയ ഒടുങ്ങി*. പിന്നെ ആ രണ്ടു രാശികളിൽവെച്ച മേലേതു ഭാജ്യമായിട്ടിരിക്കും, കീഴേതു ഭാജകവും. ഇങ്ങനെ ഭാജകത്തെക്കാൾ ഭാജ്യം വലുതായിട്ടിരിക്കുന്നേടത്ത്. ചെറുതായിട്ടിരിക്കുന്നേടത്തു പിന്നെ ഭാജ്യം കീഴേത്, ഭാജകം മേലേത് ആയിട്ടിരിക്കും. ഭാജ്യത്തിങ്കന്നുണ്ടായ ഫലത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഭാജ്യം വരും; ഭാജകത്തിങ്കന്നുണ്ടായ ഫലത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഭാജകവും എന്നു നിയമമാകുന്നത്. ഈ ക്രിയയ്ക്കു വല്ല്യുപസംഹാരമെന്നു പേർ. ഇതിന്നു വിപരീതക്രിയയിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊരു വിശേഷമുണ്ട് എന്നു തോന്നും. വല്ലീഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തു ഹരണംതന്നേ ഉള്ളൂ. അതിന്റെ ഉപസംഹാരത്തിങ്കൽ ഗുണനം തന്നെഅല്ലാ ഉള്ളൂ; ഗുണിച്ചതിൽ

---

* 1 – 17 ഇവിടെ 7, 2, 1 എന്നീ വല്ലീസംഖ്യയിൽ 7 = ഊർദ്ധ്വം; 1 = അന്ത്യം;
7 – 15 അന്ത്യത്തിന്റെ മേലെയുള്ള സംഖ്യ 2 ഉപാന്ത്യം.
2
1

മേലേതും കീഴേതും അതായത് ഊർദ്ധ്വവും അന്ത്യവുമായിട്ടു രണ്ടു സംഖ്യകൾ മാത്രം ശേഷിക്കുമ്പോൾ, ഉപാന്ത്യത്തിന്നു സ്ഥാനമില്ലാത്തതിനാൽ ഉപാന്ത്യമില്ല എന്നു പറയുന്നു.

അവിടവിടുത്തെ ഹൃതശേഷത്തെ കുട്ടക എന്നൊരു ക്രിയകൂടെ ഉണ്ട്. എന്നിട്ടു കേവലം വിപരീതക്രിയയിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊരു വിശേഷമുണ്ടെന്നു തോന്നും. ഉപപത്തിയെ നിരൂപിക്കുമ്പോൾ വിപരീതക്രിയ തന്നെ. നടേയും ശേഷത്തെ കളഞ്ഞിട്ട് അത്രെ ഇരിക്കുന്നു ഫലം കൊണ്ട്§, എന്നിട്ട്.

അനന്തരം ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെന്നു പേർ പെട്ടിരിക്കുന്ന പ്രമാണഫലത്തേയും പ്രമാണത്തേയും വരുത്തിയ വല്ല്യുപസംഹാരന്യായം കൊണ്ടുതന്നെ ഇച്ഛാഫലത്തേയും ഇച്ഛയേയും വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു†. അവിടെ ദൃഢഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരിച്ച ഫലങ്ങളെ കീഴെ കീഴെ വെപ്പൂ. ഇങ്ങനെ ഭാജ്യഭാജകങ്ങളിൽ ഒരിടത്തു രൂപം മാത്രം ശേഷിപ്പോളം. പിന്നെ വല്ലീഫലങ്ങളുടെ കീഴെ അപവർത്തിതക്ഷേപത്തേയും വെപ്പൂ. അതിന്റെ കീഴെ ശൂന്യത്തേയും വെപ്പൂ. അവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ ഇവിടയ്ക്ക് ഒന്നും, ഏഴും, അഞ്ചും, ശൂന്യവും ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പൂ വല്ലി. പിന്നെ ഇതിനെക്കൊണ്ടും മുമ്പിലെപ്പോലെ ഉപസംഹാരം ചെയ്‌വൂ. അവിടെ കളയുന്ന അന്ത്യത്തെ വേറെ ഒരിടത്തു ക്രമേണ വെച്ചിരിക്കിലുമാം. അപ്പോളവ കീഴന്നു തുടങ്ങീട്ടു ശൂന്യം, അഞ്ച്, മുപ്പത്തഞ്ച്, നാല്പത്ത് എന്നിങ്ങനെ ഇരി

---

§ ആദ്യത്തെ ക്രിയയിൽ ഹാരകം × ഫലം = ഭാജ്യം — ശേഷം. അതുകൊണ്ടു ഭാജ്യത്തിൽനിന്നു ശേഷം കളഞ്ഞതിനെ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചപ്പോൾ ഫലം വന്നു. ഫലത്തെ ഹാരകംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ശേഷത്തെ കുട്ടക എന്നതു് ഇതിങ്കന്നു വിപരീതക്രിയതന്നെയാണല്ലോ.

† സാധാരണയായി ത്രൈരാശികത്തിൽ പ്രമാണം, പ്രമാണഫലം, ഇച്ഛാ, ഇച്ഛാഫലം എന്നിവയിൽ ഏതെങ്കിലും മൂന്നെണ്ണംകൊണ്ടു നാലാമത്തേതിനെ കാണുവാനുള്ള ഉപായത്തെ പറയുന്നു. ഇവിടെ ഭാജ്യമായ 17 പ്രമാണഫലവും ഭാജകമായ 15 പ്രമാണവുമാകുന്നു. ഇച്ഛാഫലമാകുന്ന ഫലത്തിന്നു പകരം ഹരിച്ചശേഷമുള്ള ഹരണശേഷത്തെയാണ് തന്നിരിക്കുന്നതു്. ഈ ഹരണശേഷത്തെ ക്ഷേപമെന്നൊ ശുദ്ധി എന്നൊ കല്പിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഇച്ഛയും ഇച്ഛാഫലവുമായ ഗുണകാരവും ഫലവും സാദ്ധ്യങ്ങളാകുന്നു.

$$\frac{17 \times \text{ഗുണകാരം} + 5}{15} = \text{ഫലം}$$

$$\frac{\text{ഭാജ്യം} \times \text{ഗുണകാരം} + \text{ശേഷം}}{\text{ഭാജകം}} = \text{ഫലം}$$

$$\therefore \text{ഗുണകാരം} = \text{ഇച്ഛാ};\ \text{ഫലം} = \text{ഇച്ഛാഫലം}$$

ക്കം *. ഇവററിൽവെച്ച ശൂന്യവും മുപ്പത്തഞ്ചും ഗുണകാരം; അഞ്ചും നാല്പതും ഫലം. ഇവററിന്നു ഹാരഭാജ്യങ്ങളാകുന്നവ ഒന്നും രണ്ടും പതിനഞ്ചും പതിനേഴും. അവിടെ ഒന്നും പതിനഞ്ചും ഹാരം, രണ്ടും പതിനേഴും ഭാജ്യം. അവിടെ നടേ ഭാജ്യശേഷം രണ്ടിനെ ശൂന്യത്തെ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു ശൂന്യം. അതിൽ ക്ഷേപം അഞ്ചുകൂട്ടി ഹാരശേഷം ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം അഞ്ച്. പിന്നെ രണ്ടാമതു ഭാജ്യശേഷം രണ്ടിനെത്തന്നെ മുപ്പത്തഞ്ചിൽ ഗുണിച്ച് അഞ്ചുകൂട്ടി പതിനഞ്ചിൽ ഹരിപ്പൂ. ഫലം അഞ്ച്. പിന്നെ മൂന്നാമത് പതിനേഴിനെ മുപ്പത്തിഅഞ്ചിൽ ഗുണിച്ച് അഞ്ചുകൂട്ടി പതിനഞ്ചിൽ ഹരിപ്പൂ. ഫലം നാല്പത്. ഇങ്ങനെ ഇരുപുറത്തെ ഗുണകാരങ്ങളെക്കുറിച്ച നടുവിലേതു ഫലമാം. ഈവണ്ണമേ തന്റെ കീഴും മേലുമുള്ള ഫലങ്ങളെ കുറിച്ച നടുവിലിരിക്കുന്നതു താൻ ഗുണകാരമാം. ഈവണ്ണം ഭാജ്യഹാരങ്ങളും തന്റെ തന്റെ ഇരുപുറത്തേതിനെക്കുറിച്ചും ഭാജ്യഹാരങ്ങളാം$. പിന്നെ മുപ്പത്തഞ്ചിനെ പതിനഞ്ചിൽ ഹരിച്ചശേഷം അഞ്ചു ഗുണകാരമാകിലുമാം. നാല്പതിനെ പതിനേഴിൽ ഹരിച്ച ശേഷം ആറു ഫലമാകിലുമാം. ഇതിന്നു തക്ഷണമെന്നു പേർ†. ഇങ്ങനെ ഇഷ്ടക്ഷേപത്തിങ്കലെ ഗുണലബ്ധികൾ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം.

---

* വല്ലീ: ↓   ഉപസംഹൃതഫലങ്ങൾ ↓

1……………………40 ($1\times35+5$)
7……………………35 ($7\times5+0$)
5
0

$ ഫലം $=40$ — ഭാജ്യം $=17$
ഗുണകാരം $=35$ — ഹാരകം $=15$
ഫലം $=5$ — ഭാജ്യം $=2$
ഗുണകാരം $=0$ — ഹാരകം $=1$

ഭാജ്യമായ രണ്ടിന്നു ഗുണകാരങ്ങൾ 0, 35; ഹാരകങ്ങൾ 1, 15; ഫലം $=5$.
ഭാജ്യമായ 17നു ഗുണകാരം $=35$, ഹാരകം 15, ഫലം 40

$\frac{2\times0+5}{1}=5$; $\frac{2\times35+5}{15}=5$; $\frac{17\times35+5}{15}=40$

† തക്ഷണം: ഗുണകാരം ഹാരകത്തേക്കാളും ഫലം ഭാജ്യത്തേക്കാളും ഏറുന്ന സമയത്തു തക്ഷണം ചെയ്യാം. അതായതു ഗുണകാരത്തെ ഹാരകംകൊണ്ടും ഫലത്തെ ഭാജ്യംകൊണ്ടും ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന ശേഷങ്ങൾ സ്ഫുടഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരും. എത്രതവണ ഹാരകത്തെ ഗുണകാരത്തിൽനിന്നോ ഭാജ്യത്തെ ഫലത്തിൽനിന്നോ വാങ്ങുന്നു, അത്ര തവണ ഭാജ്യത്തെ ഫലത്തിൽനിന്നും ഹാരകത്തെ ഗുണകാരത്തിൽനി

അനന്തരം വല്ല്യുപസംഹാരന്യായത്തെ തൽസമനും ധീജഗന്നൂപുരവും ഭാജ്യഭാജകങ്ങളാകുമ്പോളെല്ലാ കാട്ടുന്നു. അവിടെ അന്യോന്യഹരണശേഷങ്ങൾ ക്രമത്താലെ ധീവന്ദ്യഃ, ധീപ്രിയഃ, നാരീ, ധിക്, ശ്രീഃ, കിം എന്നിവ. വല്ലീഫലങ്ങൾ പിന്നെ മാർത്താണ്ഡഃ, ഗൌഃ, കിം, തൽ, ശ്രീഃ, വിൽ * എന്നിവ. ഇവിടെ ഭാജ്യത്തിങ്കൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ ക്ഷേപത്തെ ധനമായിട്ടു ഉദ്ദേശിച്ചതാകിലും ഋണമെന്നു കല്പിക്കുന്നു‡. എന്നിട്ടിവിടെ രൂപം ഋണക്ഷേപമെന്നു കല്പി

ന്നൊ വാങ്ങണം. ഇങ്ങനെ ശിഷ്ടത്തെ മാത്രം ഉദ്ദേശിച്ചുള്ള ഹരണത്തെയാണ് "ഭക്ഷണ"മെന്നു പറയുന്നതു്.

ഇവിടെ ഗുണകാരം = 35; ഹാരകം = 15

$\frac{35}{15}$ എന്നേടത്തു ഫലം 2, ശേഷം 5.

ഫലം = 40, ഭാജ്യം 17

$40 - 2 \times 17 = 6$

അപ്പോൾ സ്ഫുടഗുണകാരം = 5; സ്ഫുടഫലം = 6; $\frac{17 \times 5 + 5}{15} = 6$

* ഭാജ്യം = 576.

ഭാജകം = 210389.

ചെറിയ ഭാജ്യഹാരകങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുവാനായിക്കൊണ്ട് ഇവയെ അന്യോന്യഹരണംചെയ്യുന്നു.

```
576)210389(365
     1728
      37·8
     3456
      3029
      2880
       149)576(3
           447
           129)149(1
               129
                20)129(6
                   120
                     9)20(2
                       18
                        2)9(4
                          8
                          1
```

‡ ഭാജ്യത്തിങ്കൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ അതു ഭാജ്യത്തിങ്കലെ ധനക്ഷേപമാകുന്നതുകൊണ്ടു കുട്ടാകാരത്തിൽ ഋണക്ഷേപമായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ മുനിഗാഥ, 20 എന്ന മുൻ ഉദാഹരണത്തിൽ, ആറിനെ കുട്ടാകാരത്തിൽ ധനക്ഷേപമായിട്ടാണ് ഉദ്ദേശിച്ചിരിക്കുന്നതു്. ഋണക്ഷേപമായി കല്പിച്ചു ക്രിയചെയ്തു ധനക്ഷേപമായിട്ടിരിക്കുമ്പോഴുള്ള ഗുണകാരലബ്ധികളെ വരുത്തുവാനുള്ള ഉപായത്തെയാണിവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു്. [59-ാംപേജ് ടിപ്പണി നോക്കുക.]

ച്ച വല്ലീഫലങ്ങളുടെ കീഴെ ഒന്നിനെ വെപ്പൂ. അതിന്നു കീഴെ ശൂന്യത്തെയും. പിന്നെ വല്ല്യുപസംഹാരത്തെച്ചെയ്തു ഉപസംഹൃതവല്ലീഫലങ്ങളെ ക്രമേണ കീഴന്നു മേല്പ്പട്ടു വെപ്പൂ. അവററിന്റെ സംഖ്യ—നഃ, കിം, വിൽ, ധീഃ, ഫോമഃ, സൂത, ധീശത്രുഃ, ഖഇൗഷഭവധഃ എന്നിങ്ങനെ.

അനന്തരം ധീവന്ദ്യാദികളിൽ ഒടുക്കത്തെ ഭാജ്യാംശഷം ഒന്നു്. അതിനെ ഋണക്ഷേപം ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഋണക്ഷേപം കളഞ്ഞാൽ ശൂന്യമാകയാൽ ഫലം ശൂന്യം. ഇവ്വണ്ണമാകയാൽ ത്രൈരാശികത്തിങ്കൽ രണ്ടു ഹാരം ഒന്നു ഭാജ്യം, ഒന്നു ഗുണകാരം, ശൂന്യം ഫലം. രണ്ടാം ത്രൈരാശികത്തിങ്കൽ ഹാരം ശ്രീഃ എന്നുതന്നെ, ഭാജ്യം ഇതിന്റെ മേലെ ധീഃ എന്നു്, ഗുണം നടേത്തെ കിം എന്നുതന്നെ, ഫലം ഇതിന്റെ മേലെ വിൽ എന്നു്. മൂന്നാമതിങ്കൽ മേലെ നരഃ എന്നു ഹാരം, ഭാജ്യം നടേത്തെ ധീഃ എന്നുതന്നെ, ഗുണം മറേറതിന്റെ മേലെ ധീഃ, ഫലം മുമ്പിലെ കീഴെ വിൽ തന്നെ. നാലാമതിങ്കൽ പിന്നെ ഹാരഭാജ്യഗുണലബ്ധികളാകുന്നവ ക്രമത്താലെ നരഃ, ധീപ്രിയഃ, ധീഃ, ഫോമഃ എന്നിവ. അഞ്ചാമതിങ്കൽ ധീവന്ദ്യഃ, ധീപ്രിയഃ, സതീ, ഫോമഃ. ആറാമതിങ്കൽ ധീവന്ദ്യഃ, തത്സമഃ, സതീ, ധീശത്രുഃ. ഏഴാമതിങ്കൽ ധീജഗന്നൂപുരം ഹാരം, തൽസമൻ ഭാജ്യം, രത്നസ്തംഭം ഗുണം, ധൎമ്മരാൾ ഫലം. ഇങ്ങനെ ഈ ഭാജ്യഭാജകങ്ങൾക്കു രൂപം ഋണക്ഷേപമാകുമ്പോളെ ഗുണലബ്ധികളാകുന്നതു്. പിന്നെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ രൂപം ധനക്ഷേപമാകുമ്പോളെ ഗുണലബ്ധികളാകുന്നതു് ഋണക്ഷേപത്തിന്റെ ഗുണലബ്ധികളെ ഹാരഭാജ്യങ്ങളിൽനിന്നു കളഞ്ഞ ശേഷങ്ങൾ നൃദോസൌമായയാ, സകലഃ എന്നിവ. ഇങ്ങനെ ക്ഷേപത്തിന്റെ ധനർണ്ണത പകരുമ്പോളെ ഗുണകാരലബ്ധികൾ വരുംപ്രകാരം. പിന്നെ ഈ രൂപക്ഷേപത്തിന്റെ ഗുണലബ്ധികളെ ഇഷ്ടക്ഷേപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഇഷ്ടക്ഷേപത്തിന്റെ ഗുണലബ്ധികളുളവാകും*. ഇങ്ങിനെ ചൊല്ലിയതായി കുട്ടാകാരം സംക്ഷേപിച്ചിട്ടു്.

---

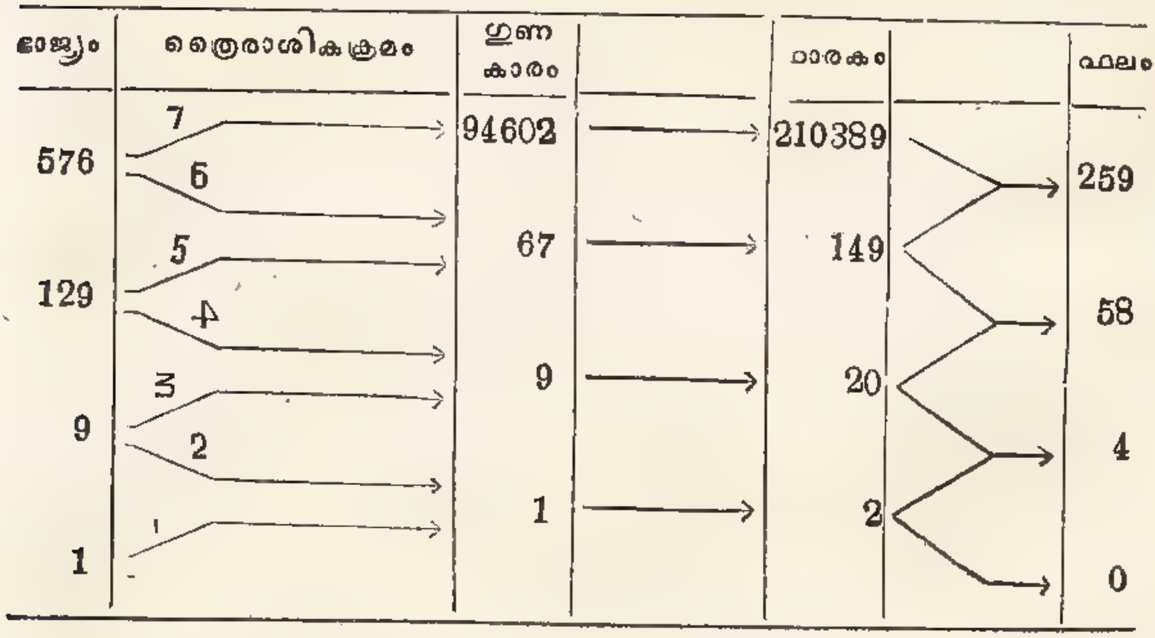
* ഇവിടെ ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ടു രൂപത്തെ ഋണക്ഷേപമെന്നു കല്പിക്കുന്നു.

വല്ലീ	വല്ല്യുപസംഹാരഫലങ്ങൾ
365	94602 — ഗുണം
3	259 — ഫലം
1	67 — ഗുണം

6	....	58 — ഫലം
2	....	9 — ഗുണം
4	....	4 — ഫലം
1	....	1 — ഗുണം
0	....	0 — ഫലം

ഭാജകം ഭാജ്യത്തേക്കാളേറിയതുകൊണ്ട്, ഗുണകാരം വലിയതു്, ഫലം ചെറുതു്. ക്രമേണയുള്ള ഭാജകഭാജ്യങ്ങൾ—210389, 576, 149, 129, 20, 9, 2, 1.

എല്ലാ ത്രൈരാശികത്തിങ്കലും ഭാജ്യത്തെ അതതു ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു അതതു ശേഷത്തെ സംസ്കരിച്ച് അതതു ഭാജകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലംവരും.



ഒരു ഭാജ്യത്തിന്നു രണ്ടു ഗുണകാരം, രണ്ടു ഹാരകം ഒരു ഫലം എന്നും അതുപോലെ ഒരു ഗുണകാരത്തിന്നു രണ്ടു ഭാജ്യങ്ങൾ; ഒരു ഫലത്തിന്നു രണ്ടു ഹാരകങ്ങൾ; ഒരു ഹാരകത്തിന്നു രണ്ടു ഫലങ്ങൾ എന്നും പട്ടികയിൽനിന്നും മനസ്സിലാക്കാമല്ലൊ.

ത്രൈരാശികങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെയാണു പട്ടികയിൽ (ചുവട്ടിൽനിന്നു) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 എന്നു് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നതു്.

4-ാം ത്രൈരാശികം:— ഭാജ്യം=129, ഹാരകം=20, ഗുണകാരം=9.

$$\therefore \text{ ഫലം} = \frac{129 \times 9 - 1}{20} = \frac{1160}{20} = \underline{\underline{58}}$$

5-ാം ത്രൈരാശികം:— ഭാജ്യം=129, ഹാരകം=149, ഗുണകാരം=67.

$$\therefore \text{ ഫലം} = \frac{129 \times 67 - 1}{149} = \frac{8462}{149} = \underline{\underline{58}}$$

ഇതുപോലെ ബാക്കി ത്രൈരാശികങ്ങളും കണ്ടുകൊൾക.

രൂപം ധനക്ഷേപമാകുമ്പോൾ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ അതതു ഹാരകഭാജ്യങ്ങളിൽനിന്നു വാങ്ങിയവ ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരഫലങ്ങൾ ആയിട്ടുവരും.

ത്രൈരാശികത്തിന്റെ എണ്ണം	രൂപം ഋണക്ഷേപം				രൂപം ധനക്ഷേപം			
	ഭാജ്യം	ഗുണം	ഹാരം	ഫലം	ഭാജ്യം	ഗുണം	ഹാരം	ഫലം
1	1	1	2	0	1	1	2	1
2	9	1	2	4	9	1	2	5
3	9	9	20	4	9	11	20	5
4	129	9	20	58	129	11	20	71
5	129	67	149	58	129	82	149	71
6	576	67	149	259	576	82	149	317
7	576	94602	210389	259	576	115787	210389	317

രൂപം ധനക്ഷേപമായിട്ടിരിക്കുമ്പോൾ:—

5-ാം ത്രൈരാശികം:— ഭാജ്യം=129, ഗുണം=82, ഹാരകം 149.

$$\therefore \text{ ഫലം}=\frac{129\times 82+1}{149}=\frac{100579}{149}=\underline{\underline{71}}$$

ഇവിടെ ഗുണകാരം=149—67=82
ഫലം =129—58=71

4-ാം ത്രൈരാശികം:— ഭാജ്യം=129, ഗുണം=11, ഹാരകം=20.

$$\therefore \text{ ഫലം}=\frac{129\times 11+1}{20}=\frac{1420}{20}=\underline{\underline{71}}$$

ഗുണകാരം= 20—9=11
ഫലം =129—58=71

ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങൾ രൂപമല്ലെങ്കിൽ, ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു തക്ഷണം ചെയ്യേണ്ടതുണ്ടെങ്കിൽ അതും ചെയ്താൽ ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരലബ്ധികൾ വരും.

ഉദാഹരണം:— 3-ാം ത്രൈരാശികത്തിൽ ഋണക്ഷേപം 3.

അപ്പോൾ ഗുണകാരം=9×3=27 ഫലം=4×3=12

ഹാരകം=20 ഭാജ്യം=9

* തക്ഷിതഗുണകാരം=7 തക്ഷിതഫലം=3

$$\text{ഫലം}=\frac{9\times 7-3}{20}=\frac{60}{20}=\underline{\underline{3}}$$

ധനക്ഷേപം =3,

ഗുണകാരം=11×3=33 ഫലം =5×3=15

ഹാരകം =20 ഭാജ്യം =9

തക്ഷിതഗുണകാരം =13 തക്ഷിതഫലം =6

$$\text{ഫലം}=\frac{9\times 13+3}{20}=\underline{\underline{6}}$$

ഇതുപോലെതന്നെ കുട്ടാകാരക്രിയകൊണ്ടും ത്രൈരാശികംകൊണ്ടും ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവിടെ വല്ലിയുടെ ഉപാന്ത്യത്തിൽ രൂപത്തെ വെയ്ക്കുന്നതിന്നു പകരം ഇഷ്ടക്ഷേപത്തെ തന്നെ വെച്ചു വല്ല്യുപസംഹാരംചെയ്തും ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം. ഈ വിഷയങ്ങളെല്ലാം അനുബന്ധത്തിൽ വിസ്തരിച്ചിട്ടുണ്ട്.

* (തക്ഷിതം=തഷ്ടം, തക്ഷണാനന്തരം ലഭിച്ചതു്.)

ആറാമദ്ധ്യായം

പരിധിവ്യാസപ്രകരണം

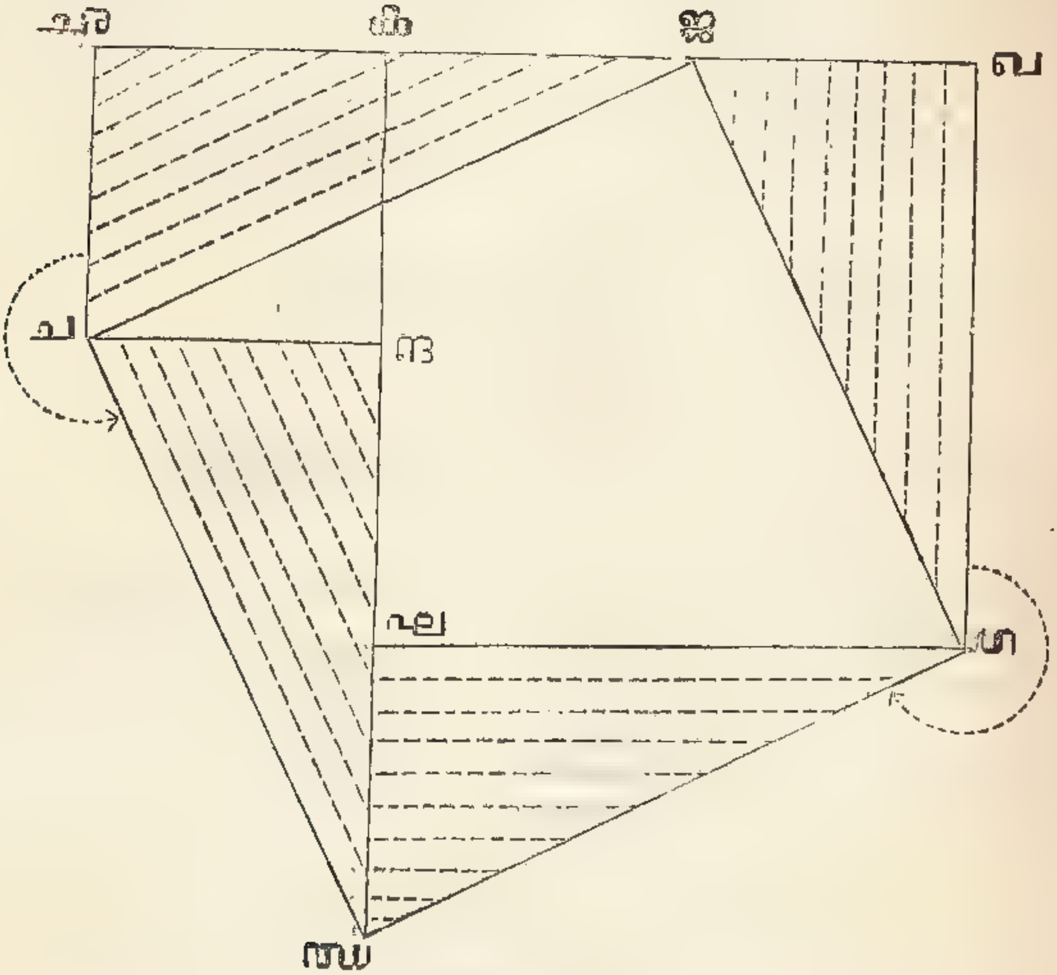
അനന്തരം ഒരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തെ കോൽ വിരൽ എന്നു തുടങ്ങി നീളത്തെ അളക്കുന്ന മാനങ്ങളാൽ ഒന്നുകൊണ്ട് എത്ര എന്നു കല്പിച്ച് അതിന്റെ ഒരു ബാഹു വ്യാസമാകുമ്പോൾ വൃത്തമെത്രമാനമെന്നറിയുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

അവിടെ ഭുജാവർഗ്ഗവും കോടിവർഗ്ഗവും കൂടിയാൽ കർണ്ണവർഗ്ഗമാകും എന്നതിനെ ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ യാതൊന്നിന്റെ വർഗ്ഗമാകുന്നു, അതു ബാഹുവാകുന്ന ഒരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം വർഗ്ഗമാകുന്നതു്. പിന്നെ സമചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ താൻ ദീർഘചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ താൻ ഒരു കോണിങ്കന്നു ക്ഷേത്രത്തിന്റെ നടുവേ മറ്റെ കോണിങ്കൽ ചെല്ലുന്ന സൂത്രം കർണ്ണമാകുന്നതു്. ഇവിടെ ഒരു ചതുരശ്രത്തിന്നു രണ്ടു പാർശ്വവും കോടി തുല്യമായി നീണ്ടിട്ടിരിപ്പൂ, രണ്ടു തലയും ഭുജാതുല്യമായി ഇടംകുറഞ്ഞിരിപ്പൂ. ഇങ്ങനെ ഇവിടെ കല്പിക്കുന്നു. ഈ ക്ഷേത്രത്തിന്റെ കർണ്ണമെത്ര എന്നു് അറിയുന്നതു്.

ഇവിടെ കോടി തുല്യമായിട്ടു് ഒരു സമചതുരശ്രമുണ്ടാക്കൂ, ഭുജാതുല്യമായിട്ടും. ഇങ്ങനെ രണ്ടു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഭുജാചതുരശ്രം വടക്കുപുറത്തു്, കോടിചതുരശ്രം തെക്കുപുറത്തു്, രണ്ടിന്റെയും കിഴക്കെ പാർശ്വം ഒരു സൂത്രത്തിങ്കൽ വരുമാറു തങ്ങളിൽ ചേർപ്പൂ. ഭുജെടെ തെക്കെ പാർശ്വം കോടീടെ വടക്കെ പാർശ്വത്തോടു ചേരുമാറു്. ഈ പാർശ്വം ഭുജാപാർശ്വം കഴിഞ്ഞിട്ടും പടിഞ്ഞാറോട്ടു് ഒട്ടു ശേഷിക്കും. ഭുജടെ വടക്കു കിഴക്കെ കോണിങ്കന്നു തെക്കോട്ടു കോടിയോളം അളപ്പൂ. അവിടെ ഒരു ബിന്ദുവിടൂ. ഇവിടുന്നു തെക്കേടം നീളം ഭുജയോളമുണ്ടായിരിക്കും. പിന്നെ ബിന്ദുവിങ്കന്നു കോടീടെ തെക്കുപടിഞ്ഞാറെ കോണോളവും ഭുജടെ വടക്കുപടിഞ്ഞാറെ കോണോളവുമുള്ള രേഖാമാർഗ്ഗേണ പെളിപ്പൂ. കോണിങ്കൽ രണ്ടിങ്കലും കുറഞ്ഞൊന്നു വേർവിടാതെ ഇരിപ്പൂ. പിന്നെ ബിന്ദുവിങ്കന്നു ചെറിയ രണ്ടു പെളിയും വേർപെടുത്തി ബിന്ദുവിങ്കൽ കൂടിയിരുന്ന രേഖാഗ്രങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കോടീടെ വടക്കുപടി

ഞ്ഞാറു സന്ധികൾമ്മാറു കണ്ടു വലിയ ചതുരശ്രത്തിൻെറ ഇരുപുറവു
ന്തിരിച്ചുകൊണ്ടുപോയി ചേൎപ്പു. എന്നാൽ മറിവാ പുറവായിൽ വരു
മാറു കണ്ടു യോജിക്കേണ്ടതും. എന്നാലതു് ഒരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്ര
മായിട്ടിരിക്കും. ഇതിൻെറ ബാഹുക്കൾ ഈ ഭുജാകോടികളുടെ കൎണ്ണ
ത്തോടു് ഒക്കുംതാനും. എന്നാൽ ഈ ഭുജാകോടികളുടെ വൎഗ്ഗയോഗം
കൎണ്ണവൎഗ്ഗം, കൎണ്ണവൎഗ്ഗത്തിൽ ഒന്നിൻെറ വൎഗ്ഗം കളഞ്ഞാൽ ഭുജാകോ
ടികളിൽ മറേറതിൻെറ വൎഗ്ഗം എന്നു സ്ഥിതമായി ഇപ്പോൾ. ഇതു്
എല്ലാടവും അറിയേണ്ടുവൊന്നു്.

[പരിലേഖം 19_ൽ കോടിവൎഗ്ഗക്ഷേത്രം കഖഗഘ എന്ന സമചതുര
ശ്രം. ഭുജാവൎഗ്ഗക്ഷേത്രം കങചഛ എന്ന സമചതുരശ്രം. ഛജ വിമന കഖ



പരിലേഖം 19.

എന്ന കോടിക്കു സമമായി കല്പിച്ചിട്ടുള്ളതിനാൽ

ജഖ＝കോടി – കജ＝ഛജ – കജ＝ഛക

ആകയാൽ ജഖ＝ഭുജ; ഖഗ＝കോടി

ചജ, ജഗ ഇവ രണ്ടും കൎണ്ണതുല്യങ്ങൾ

ജഖഗ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തെ ഗവിനെ അപേക്ഷിച്ച പ്രദക്ഷിണമായി തി
രിച്ചുകൊണ്ടു വന്നു ചേൎത്തിട്ടുള്ള ത്ര്യശ്രം ഡഘഗ ആകയാൽ ഡഘ＝ഭുജാ
തുല്യം＝കങ, ഘഗ കോടി തുല്യം, ഡഗ കൎണ്ണതുല്യം.

ഝഘ + ഘങ = കങ + ഘങ = കഘ = കോടി.
ആകയാൽ ഝങ = കോടി; ചങ = ഭുജ
ഝച കർണ്ണതുല്യമെന്നും വന്നു.

അപ്പോൾ ചഛജ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തെ ച വിനെ അപേക്ഷിച്ച് അപ്രദക്ഷിണമായി തിരിച്ചുകൊണ്ടുവന്നു ചേർത്തിട്ടുള്ള ത്ര്യശ്രമാണ് ചങഝ എന്നും ചജഗഝ എന്ന ക്ഷേത്രം സമചതുരശ്രമായ കർണ്ണവർഗ്ഗക്ഷേത്രമാകുന്നു എന്നും വന്നു. ഇവിടെ ചജഗഘങ എന്നൊരു പഞ്ചകോണക്ഷേത്രമുണ്ട്. ആ ക്ഷേത്രവും ചഛജ, ജഖഗ എന്ന രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളും കൂടിയാൽ കങചഛ എന്ന ഭുജാവർഗ്ഗവും കഖഗഘ എന്ന കോടിവർഗ്ഗവും ഇവ രണ്ടിന്റെയും യോഗമായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ അതേ പഞ്ചകോണക്ഷേത്രത്തോടു ചഝങ, ഝഘഗ എന്ന രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളെ ചേർത്താൽ കർണ്ണവർഗ്ഗമായ ചജഗഝ എന്ന സമചതുരശ്രക്ഷേത്രം വരും. എന്നാലിവിടെ ചഛജ, ജഖഗ, ഝഘഗ, ചങഝ ഇവ നാലു ത്ര്യശ്രങ്ങളും തുല്യങ്ങളാകയാൽ ഭുജാവർഗ്ഗമായ കങചഛ, കോടിവർഗ്ഗമായ കഖഗഘ ഇവയുടെ യോഗം കർണ്ണവർഗ്ഗമായ ചജഗഝയോടു തുല്യം.

കഖഗഘ + ചഛകങ = ചജഗഘങ + ചഛജ + ഖഗജ
= ചജഗഘങ + ചഝങ + ഗഘഝ
= ചഝഗജ
= കർണ്ണവർഗ്ഗക്ഷേത്രം

ഇപ്രകാരം ഭുജാകോടി വർഗ്ഗങ്ങളുടെ യോഗം കർണ്ണവർഗ്ഗതുല്യമെന്നു സിദ്ധമായി.]

അനന്തരം ചതുരശ്രത്തെക്കൊണ്ടു വൃത്തത്തെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം. ഇഷ്ടമാനമായിട്ട് ഒരു ചതുരശ്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്റെ ബാഹു വ്യാസമായിട്ടിരിപ്പോരു വൃത്തത്തിന്ന് എത്രമാനമെന്ന് അറിയുന്നത്. ഈ കല്പിച്ച ചതുരശ്രത്തിന്നു നടുവേ പൂർവ്വാപരരേഖയും ദക്ഷിണോത്തരരേഖയും ഉണ്ടാക്കൂ. എന്നാൽ നാലു ചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ വലിയ ചതുരശ്രത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു കോണോളം ഒരു രേഖ ഉണ്ടാക്കൂ. അതു കർണ്ണമാകുന്നത്. ഈ കർണ്ണത്തെ അഗ്നികോണിൽ കല്പിച്ചിട്ടു ചൊല്ലുന്നു. പിന്നെ ദക്ഷിണസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തോട് ഒരു കർണ്ണം കല്പിപ്പൂ. ഇവിടെ ചതുരശ്രമദ്ധ്യം കേന്ദ്രമായിട്ട് ഇനി ഉണ്ടാകുന്ന വൃത്തം ഉള്ളൂ. ഇവിടെ യാതൊരു ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലും മൂന്നു ഭുജകളിലും വെച്ചു വലിയ ഭുജയെ ഒരു പാർശ്വം മുഴവൻ നിലത്തു തട്ടുമാറു കല്പിച്ച് അതിന്റെ ഇരുതലയ്ക്കുന്നുമുള്ള ഭുജകളുടെ യോഗം നേരെ മേലാമാറു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഈ യോഗത്തിങ്കന്നു കനത്തൊരു വസ്തു കെട്ടിയ സൂത്രം തൂക്കൂ. അതു

സൂത്രത്തിന്നു ലംബമെന്നു പേർ. മേല്പോട്ടുള്ള ഭുജകൾക്കു ഭുജകൾ എന്നു പേർ. ഭൂമിസ്പൃഷ്ടമായിരിക്കുന്ന ഭുജക്കു ഭൂമി എന്നു പേർ. ഭൂമിയിങ്കൽ യാതൊരിടത്തു ലംബം സ്പർശിക്കുന്നു അവിടുന്ന് ഇരുപുറവുമുള്ള ഭൂഖണ്ഡത്തിന്ന് ആബാധകൾ എന്നു പേർ. ഇവിടെ പിന്നെ കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു കോണോളമുള്ള കർണ്ണം ഭൂമി എന്നു കല്പിക്കുന്നു. പൂർവ്വസൂത്രവും പൂർവ്വഭുജയുടെ തെക്കെപ്പാതിയും ഭുജകളാകുന്നത്. പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നുള്ള കർണ്ണത്തിന്റെ അർദ്ധം ലംബമാകുന്നത്. ഇവ്വണ്ണം ദക്ഷിണസൂത്രവും തെക്കേ ഭുജയുടെ കിഴക്കെപ്പാതിയും ഭുജകളായിട്ട് ഒരു ത്ര്യശ്രം. ഭൂമിയാകുന്നതു നടേത്തെ ഭൂമിതന്നെ. ഇങ്ങനെ ഒരു ചതുരശ്രംകൊണ്ടു രണ്ടു ത്ര്യശ്രം. ഇവിടെ കോണിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന ആബാധ യാതൊന്ന് അതു പ്രമാണമാകുന്നത്. കോണിങ്കന്നു ദിക്സൂത്രാഗ്രമുള്ള ഭുജാ പ്രമാണഫലമാകുന്നത്. ഭൂമിയിങ്കന്നു വ്യാസാർദ്ധം പോയശേഷം കോണിങ്കൽ ശേഷിച്ചത് ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നത്. ഇവിടുന്ന് ഉണ്ടായ ഇച്ഛാഫലത്തെ കോണിങ്കന്ന് ഇരുപുറവും ഭുജയിങ്കന്ന് അളന്നു നീക്കി ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടാക്കി അതിനു നേരെ കോൺമുറിച്ചുകളയൂ. എന്നാലഷ്ടാശ്രമാകും. ഈ ഉണ്ടായ ഇച്ഛാഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ചു ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കന്നു കളയൂ. ശേഷം അഷ്ടാശ്രഭുജയുടെ നീളം.

പിന്നെ കേന്ദ്രത്തിങ്കന്ന് അഷ്ടാശ്രഭുജാമദ്ധ്യത്തോളമുള്ള വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെയും അഷ്ടാശ്രഭുജാർദ്ധത്തിന്റെയും വർഗ്ഗയോഗമൂലം കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി അഷ്ടാശ്രകോണോളമുള്ള കർണ്ണമായിട്ടുണ്ടാകും. ഇതു ഭൂമിയായിട്ട് ആ ത്ര്യശ്രകോണിങ്കന്ന് ഒരു ലംബം കല്പിപ്പൂ. അത് അഷ്ടാശ്രഭുജാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു കർണ്ണത്തിങ്കൽ പതിക്കുമാറ് ഇരിക്കും. ഈ ലംബം സ്പർശിക്കുന്നേടത്തുന്ന് ഇരുപുറവുമുള്ള കർണ്ണത്തിന്റെ ഖണ്ഡങ്ങൾ ആബാധകളാകുന്നത്. വ്യാസാർദ്ധവും അഷ്ടാശ്രഭുജാർദ്ധവും ഭുജകളാകുന്നത്. ഭുജകൾ തങ്ങളിലെ വർഗ്ഗാന്തരവും ആബാധകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നേ. ലംബാബാധകളുടെ കർണ്ണം ഭുജകൾ, എന്നിട്ടു ലംബവർഗ്ഗം രണ്ടിങ്കലും തുല്യം. ആബാധകളുടെ വർഗ്ഗഭേദമത്രെ പിന്നെ ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരമാകുന്നത്. എന്നാൽ ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരത്തെ കർണ്ണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ആബാധാന്തരമുണ്ടാകും, കർണ്ണമാകുന്നത് ആബാധായോഗം എന്നിട്ട്. വർഗ്ഗാന്തരത്തെ യോഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അന്തരമുണ്ടാകും എന്നിട്ട്. പിന്നെ ആബാധാന്തരത്തെ കർണ്ണത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞ് അർദ്ധിച്ചാൽ ചെറിയ ആബാധ ഉണ്ടാകും. പിന്നെ ഈ ആബാധ പ്രമാണമാകുന്നത്. അഷ്ടാശ്രഭുജാ

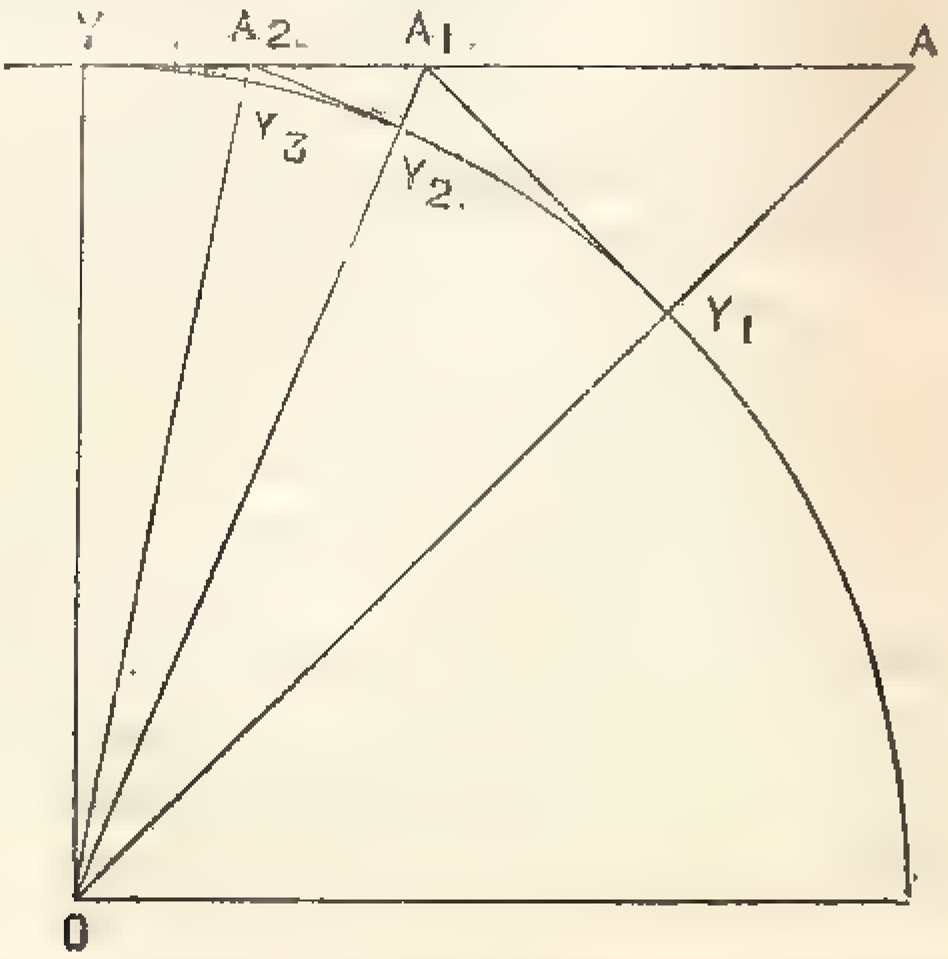
ർദ്ധം പ്രമാണഫലം, വ്യാസാർദ്ധത്തെ കർണ്ണത്തിങ്കന്ന് കളഞ്ഞശേഷം കർണ്ണാഗ്രം ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നത്. ഇതു ചെറിയ ആബാധയുടെ ശം ആയിട്ടുണ്ടാകും. ആ ആബാധക്കു കർണ്ണമാകുന്നത് അഷ്ടാശ്രഭുജാർദ്ധം. ഈ ഇച്ഛാഭാഗത്തിന്നു കർണ്ണമാകുന്നത് എന്ത് എന്ന ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു കോണിങ്കന്ന് അഷ്ടാശ്രഭുജയുടെ ഏകദേശം ഉണ്ടാകും. ഇവിടെ ബിന്ദുക്കളുണ്ടാക്കി അഷ്ടാശ്രത്തിന്റെ കോൺ മുറിച്ചു കളയൂ. എന്നാൽ ഷോഡശാശ്രമാകും. ഈ ഇച്ഛാഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ച് അഷ്ടാശ്രബാഹുവിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷം ഷോഡശാശ്രബാഹുവിന്റെ നീളം ആയിട്ടു വരും.

പിന്നെ ഈ ഷോഡശാശ്രബാഹു ഉണ്ടാക്കിയ ന്യായംകൊണ്ടു ദ്വാത്രിംശദശ്രബാഹു തുടങ്ങി ഇരട്ടിച്ച ഇരട്ടിച്ച അശ്രങ്ങളുടെ ബാഹുമാനത്തെ ഉണ്ടാക്കിയാൽ കോണസംഖ്യമാവോളം * ഏറിയാൽ വൃത്തപ്രായം. ഇതിനെ വൃത്തമെന്നു കല്പിപ്പൂ $. ഈ വൃത്തത്തിന്നു മുമ്പിലെ ചതുരശ്രബാഹു വ്യാസമാകുന്നത്. പിന്നെ ഈ വൃത്തവ്യാസങ്ങളെക്കൊണ്ട് ഇഷ്ടത്തിങ്കൽ ത്രൈരാശികംചെയ്തുണ്ടാക്കൂ വ്യാസത്തെ താൻ വൃത്തത്തെ താൻ.

---

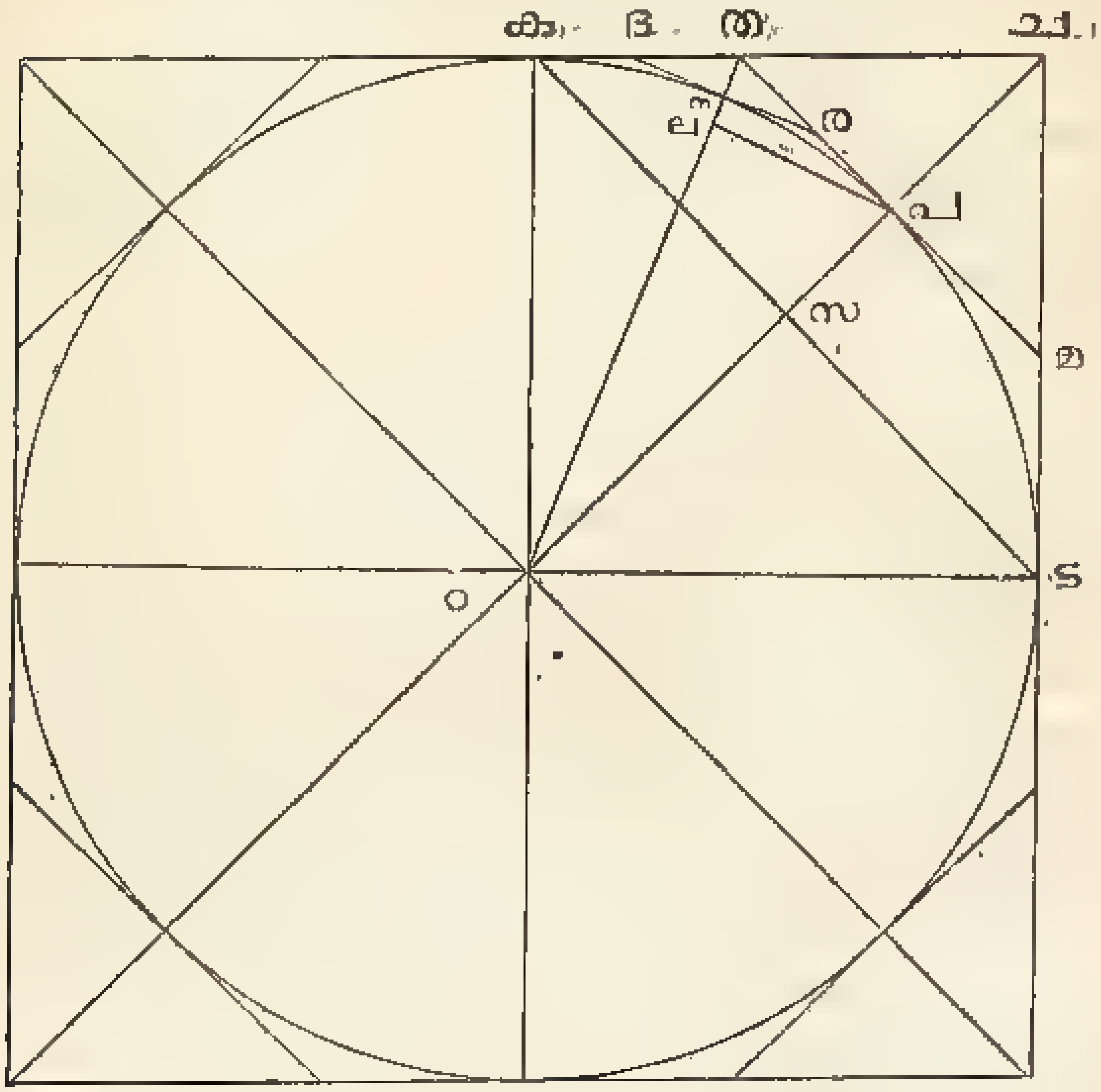
* കോൺ അസംഖ്യമാവോളം എന്നർത്ഥം.

$ One method of estimating the length of the circumference of a circle starting from the measure of its diameter D is to suppose that the circle is inscribed in a square.



പരിലേഖം 20.

[ഇവിടെ ഒരു സമചതുരശ്രത്തിന്റെ ബാഹു വ്യാസമായിട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ മാനത്തെ അറിയേണം. പരിലേഖം(21). ആ സമചതുരശ്രത്തിന്റെ മദ്ധ്യങ്ങളിൽക്കൂടി പൂർവ്വാപരരേഖയും ദക്ഷിണോത്തരരേഖയും ഉണ്ടാക്ക. അപ്പോൾ ആ ചതുരശ്രം തുല്യങ്ങളായ നാലു ചെറിയ സമചതുരശ്രങ്ങളായിട്ടു വിഭജിക്കപ്പെട്ടിരിക്കും. അവയിൽ അഗ്നികോണിങ്കലേതു ഠഢചക. ഠച, കഢ എന്ന കർണ്ണങ്ങളേയും വരക്ക. ഠചക എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ ഠച ഭൂമി; ഠക, കച ഭുജകൾ, കസ ലംബം, ഠസ, സച ആബാധകൾ.



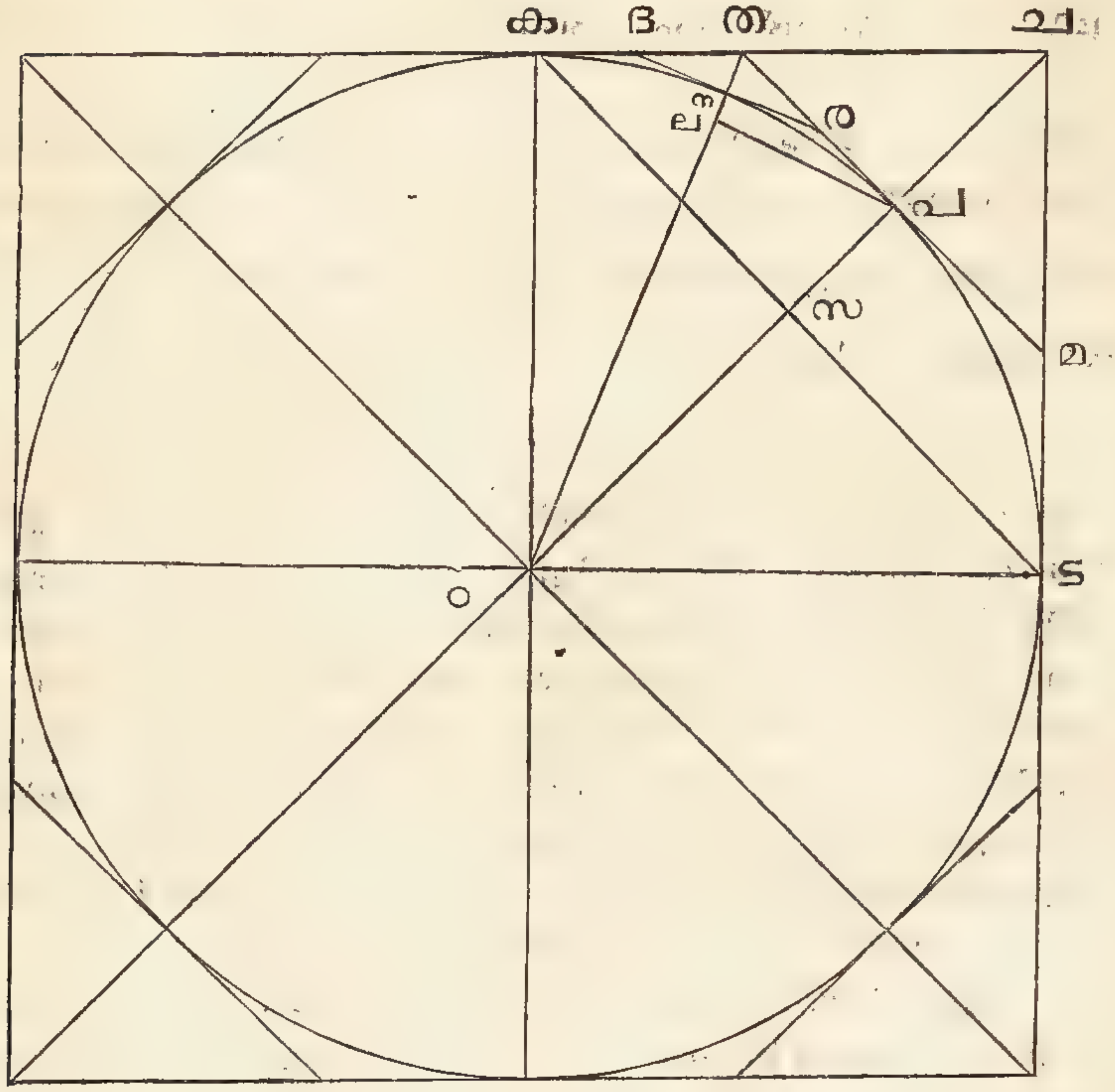
പരിലേഖം 21.

Let O be the centre of the square, Y the middle point of a side and A one of the extremities of the side.

Then OY=YA=$\frac{D}{2}$ when D is the diameter.

If Y_1 is taken on OA so that OY_1=OY and Y_1A_1 is drawn ⊥r to OA to meet AY at A_1, then OA_1 is the bisector of ∠YOA and A_1 is consequently a vertex of the regular octagon which circumscribes the same circle with one point of contact at Y.

[ഇവിടെ ഒരു സമചതുരശ്രത്തിന്റെ ബാഹു വ്യാസമായിട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ മാനത്തെ അറിയേണം. പരിലേഖം(21). ആ സമചതുരശ്രത്തിന്റെ മദ്ധ്യങ്ങളിൽക്കൂടി പൂർവ്വാപരരേഖയും ദക്ഷിണോത്തരരേഖയും ഉണ്ടാക്കുക. അപ്പോൾ ആ ചതുരശ്രം തുല്യങ്ങളായ നാലു ചെറിയ സമചതുരശ്രങ്ങളായിട്ടു വിഭജിക്കപ്പെട്ടിരിക്കും. അവയിൽ അഗ്നികോണിങ്കലേതു ഠടചക. ഠച, കട എന്ന കർണ്ണങ്ങളേയും വരക്കുക. ഠചക എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ ഠച ഭൂമി, ഠക, കച ഭുജങ്ങൾ, കസ ലംബം, ഠസ, സച ആബാധകൾ.



പരിലേഖം 21.

Let O be the centre of the square, Y the middle point of a side and A one of the extremities of the side.

Then $OY = YA = \frac{D}{2}$ when D is the diameter.

If Y_1 is taken on OA so that $OY_1 = OY$ and $Y_1 A_1$ is drawn $\perp r$ to OA to meet AY at A_1, then OA_1 is the bisector of $\angle YOA$ and A_1 is consequently a vertex of the regular octagon which circumscribes the same circle with one point of contact at Y.

ഇവിടെ ചസ പ്രമാണം, ചക പ്രമാണഫലം, ഠച — വ്യാസാൎദ്ധം = ഠച — ഠട = ഠച — ഠപ = ചപ = ഇച്ഛാ. (ഠപ ബാഹ്വൎദ്ധതുല്യമെന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.)

∴ ഇച്ഛാഫലം = ചത = $\frac{\text{ചക} \times \text{ചപ}}{\text{ചസ}}$

വലിയ ചതുരശ്രത്തിന്റെ നാലുകോണുകളുടെ ഇരുപുറവും ഇച്ഛാഫലത്തോളം ചെന്നേടത്തു ബിന്ദുക്കളെ ഇടു. ഈ ബിന്ദുക്കളെക്കൊണ്ടു ചതമ എന്നപോലെയുള്ള നാലു ത്ര്യശ്രങ്ങളുണ്ടാകും. ആ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ നാലും മുറിച്ചു കളഞ്ഞാൽ ഒരു സമാഷ്ടാശ്രക്ഷേത്രമുണ്ടാകും.

അപ്പോൾ അഷ്ടാശ്രത്തിന്റെ ബാഹു = വലിയ ചതുരശ്രത്തിന്റെബാഹു — 2 × ഇച്ഛാഫലം.

(ഇവിടെ കസ എന്നതിന്നു തുല്യദിക്കായി പയിൽ കൂടി ഒരു രേഖ വരക്കുകയാണെങ്കിൽ അതു ചക എന്നതിനെ ത എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പൎശിക്കും. അപ്പോൾ ചകസ, ചതപ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ. അതുകൊണ്ടു ചത = $\frac{\text{ചക} \times \text{ചപ}}{\text{ചസ}}$)

തമ = അഷ്ടാശ്രത്തിന്റെ ഒരു ഭുജ

Now join OA_1 and take Y_2 on OA_1 so that $OY_2 = OY$ and draw $Y_2A_2 \perp r$ to OA_1 meeting OY at A_2. Then as before OA_2 is the bisector of $\angle YOA_1$ and A_2 is therefore a vertex of the regular polygon of 16 sides circumscribing the same circle with one point of contact at Y. The process of bisection of the successive angles so formed can be repeated indefinitely like this. The problem is to calculate successively the lengths YA_1, YA_2, YA_3.........in terms of D.

Then $YA_n = \frac{1}{2}$ the side of the regular polygon having 4.2^n sides circumscribing the circle with one point of contact at Y.

Hence the perimeter of the polygon $= 2.4.2^n.\ YA_n$.

when n is sufficiently large, the perimeter of the polygon approximates to the circumference of the circle.

Hence the circumference $= 2.4.2^n YA_n$.

and if $YA_n = D.\ M.$ where M has been calculated,

We have the circumference $= 4.2^{n+1}\ D.\ M.$

Now to calculate YA_n in terms of D, since OA_1 bisects $\angle YOA$;

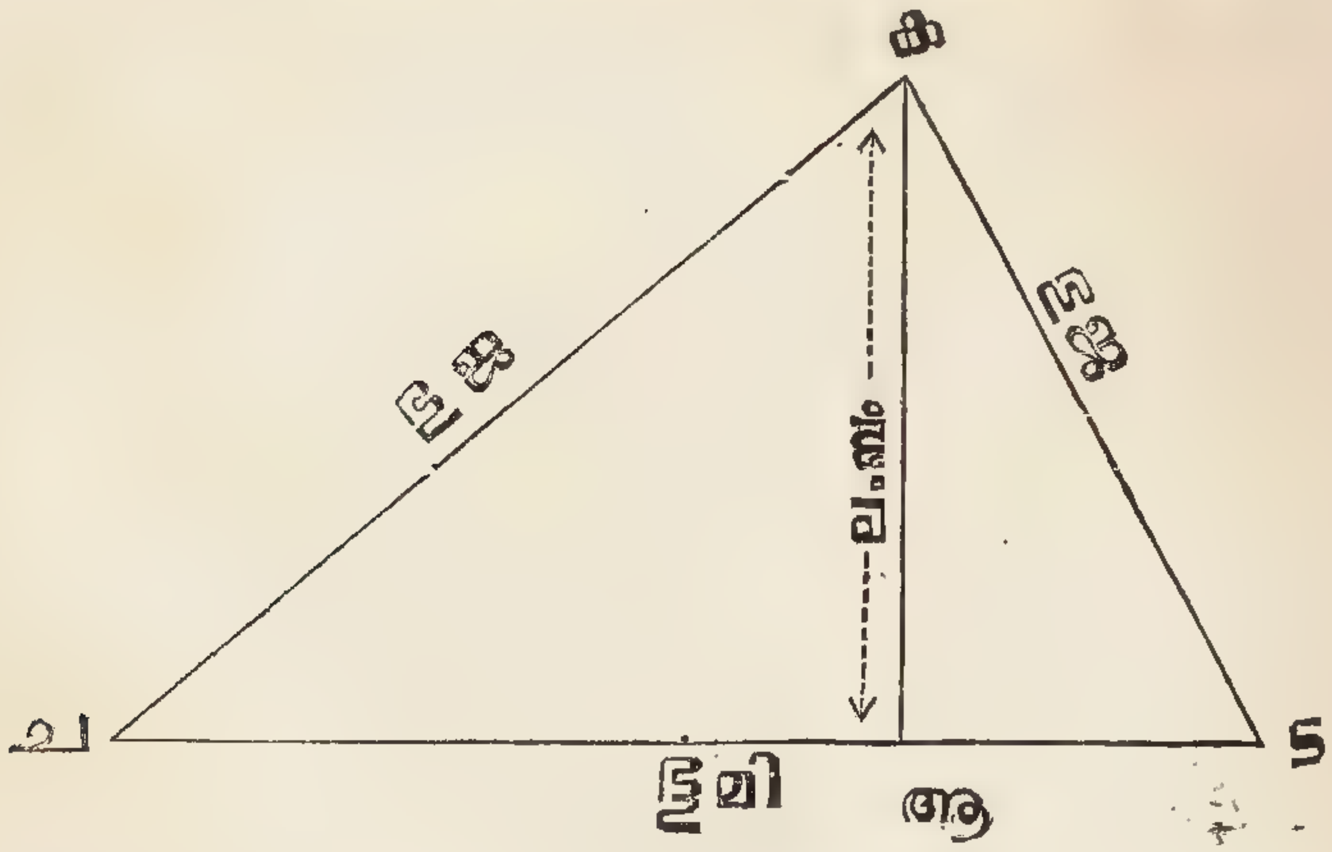
$$YA_1 : A_1A = OY : OA.$$

$$\therefore \frac{YA_1}{YA} = \frac{OY}{OY+OA}$$

$$\therefore YA_1 = \frac{OY.YA}{OY+YA} = \frac{r^2}{r+\sqrt{2}r} \text{ where } r = \text{the radius.}$$

$$= \frac{r}{1+\sqrt{2}} = r(\sqrt{2}-1)$$

പരിലേഖം 22-ൽ ഒരു ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ഭൂമി, ഭുജകൾ, ലംബം, ആബാധകൾ ഇവയെ വ്യക്തമായി കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



പരിലേഖം 22.

ചട=ഭൂമി.

കച, കട=ഭുജകൾ.

ച ആ, ആട=ആബാധകൾ.

കആ=ലംബം.

പരിലേഖം 21-ൽ

തമ എന്ന അഷ്ടാശ്രഭുജത്തിന്റെ മദ്ധ്യം പ.

പെ=വ്യാസാർദ്ധം=വ എന്നു കല്പിക്ക.

$$\text{Again } \frac{YA_2}{A_2A_1} = \frac{OY}{OA_1}$$

$$\therefore \frac{YA_2}{YA_1} = \frac{OY}{OY+OA_1}$$

$$\therefore YA_2 = \frac{YA_1.OY}{OY+OA_1}$$

$$= \frac{r^2(\sqrt{2}-1)}{r+\sqrt{r^2+r^2(\sqrt{2}-1)^2}} = \frac{r(\sqrt{2}-1)}{1+\sqrt{1+3-2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{r(\sqrt{2}-1)}{1+\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

Now OA_2 can be found from $OA_2{}^2 = OY^2 + YA_2{}^2$.

$$\text{Now } \frac{YA_3}{A_3A_2} = \frac{OY}{OA_2}$$

$$\therefore \frac{YA_3}{YA_2} = \frac{OY}{OY+OA_2}$$

$$\therefore YA_3 = \frac{YA_2 \cdot OY}{OY+OA_2} \text{ and so on.}$$

At each stage we get ½ the side of the regular polygon as a p[illegible] r and a fraction involving surds. Proceeding like this as far as [illegible] case say up to YA_{10} and multiplying the value of YA_{10} thus obtained by

തപ=അഷ്ടാശ്രഭുജാൎദ്ധം.

ഠപ, തപ ഇവ ഭുജാഗ്രകോടികളായിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ കൎണ്ണം=ഠത.

പല=ഠത ലംബം.

തല, ഠല രണ്ടാബാധകൾ.

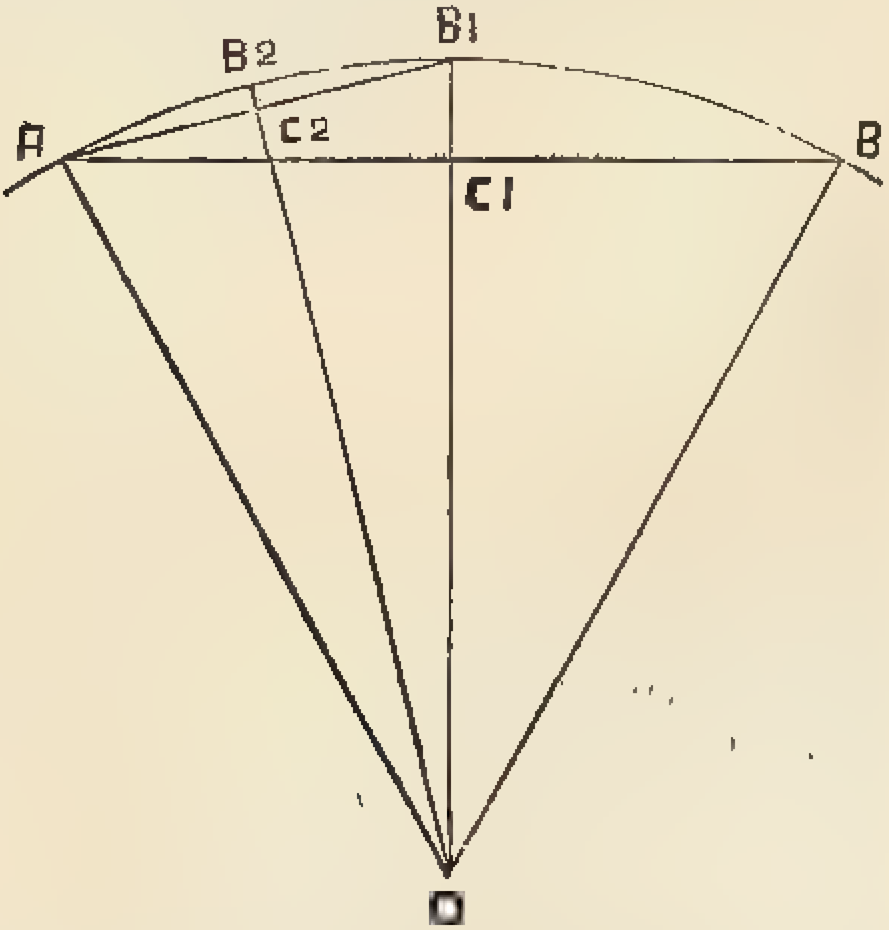
ഠപ^2=ഠല^2 + പല^2

തപ^2=തല^2 + പല^2

∴ ഠപ^2 − തപ^2=ഠല^2 − തല^2=(ഠല + തല) (ഠല − തല)=ഠത × (ഠല − തല).

$2.2^{10} \times 4$ *i. e.* by 8192 we get the perimeter of the regular polygon of 4096 sides, circumscribing the circle. This can be taken as the circumference of the circle itself.

A second method is to start with a regular hexagon inscribed in a circle of given diameter $D(=2r)$. The side of the hexagon$=r$.



പരിലേഖം 23.

In fig 23, let O be the centre of the circle and AB a side of the hexagon. If B_1 is the mid-point of arc AB and OB_1 meets OB at C_1, then $AB_1^2 = AC_1^2 + C_1B_1^2$

$$i.e.\ AB_1^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left\{r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}\right\}^2$$

$$= \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2$$

$$= \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4}(2 - \sqrt{3})^2$$

$$= \frac{r^2}{4}\{1 + 4 + 3 - 4\sqrt{3}\} = r^2(2 - \sqrt{3})$$

$$\frac{\text{വ}^2 - \text{തപ}^2}{\text{ഠത}} = \text{ഠല} - \text{തല}.$$

$$\text{ഠത} = \text{ഠല} + \text{തല}.$$

$$\therefore \text{തല} = \tfrac{1}{2}\left(\text{ഠത} - \frac{\text{വ}^2 - \text{തപ}^2}{\text{ഠത}}\right)$$

ഇവിടെ $\text{ഠത} = \sqrt{\text{ഠപ}^2 + \text{തപ}^2} = \sqrt{\text{വ}^2 + \text{തപ}^2}$.

ഇവിടെ തല പ്രമാണം, തപ പ്രമാണഫലം, ഇച്ഛാ = തഠ − വ = തഠ − ഠന = തന.

(ഠന എന്നതിനെ വ്യാസാർദ്ധമെന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.)

$$\therefore \text{ഇച്ഛാഫലം} = \frac{\text{തപ} \times \text{തന}}{\text{തല}} = \text{തര}.$$

മുമ്പിലത്തെപ്പോലെ അഷ്ടാശ്രത്തിന്റെ കോണുകളുടെ ഇരുപുറവും തര എന്നതിനോളമെടുത്തു കോൺമുറിച്ചു കളഞ്ഞാൽ ഷോഡശാശ്രം വരും.

ഷോഡശാശ്രത്തിന്റെ ഭുജാ = അഷ്ടാശ്രഭുജ − 2 × തര.

ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ 32, 64, 128.........തുടങ്ങി കോണുകളുള്ള ക്ഷേത്രങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി അവയുടെ ബാഹുക്കളുടെ മാനത്തെയും വരുത്താം. ഇങ്ങനെ ആവോളം ഏറിയ കോണുകളുള്ള ക്ഷേത്രത്തെ ഉണ്ടാക്കിയാൽ, അതിനെ വൃത്തപ്രായമെന്നു കല്പിക്കാം. അപ്പോൾ ഒരു ബാഹുവിന്റെ മാനത്തെ കോൺസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ പരിധി വരും.

വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായി എല്ലാ ബാഹുക്കളും വൃത്തത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു സമഷഡശ്രത്തിന്റെ ബാഹു വ്യാസാർദ്ധതുല്യമെന്നു നിയതമാകുന്നു. ഈ ബാഹുവിൽ ഇരട്ടിയോടു തുല്യമായിരിക്കുന്ന വ്യാസത്തിനു പരിധിയുടെ മാനം എത്ര എന്ന പ്രകാരേണയും പരിധിയെ വരുത്താം. വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽനിന്നു സമസ്തജ്യാർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു മൂലിച്ചാൽ സമസ്തജ്യാർദ്ധത്തിന്റെ കോടി വരും. വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കന്ന് ഈ കോടിയെ കളഞ്ഞാൽ ശരം വരും. ശരവർഗ്ഗവും സമസ്തജ്യാർദ്ധവർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാൽ സമസ്തജ്യാചാപത്തിന്റെ അർദ്ധത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവുണ്ടാകും. ഈ ന്യായങ്ങളെല്ലാം ജ്യാപ്രകരണത്തിൽ വിസ്തരിച്ചു പറയുന്നുണ്ട്. ഇങ്ങനെ ഷഡശ്രബാഹ്വർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ ശരവർഗ്ഗം കൂട്ടിയാൽ ദ്വാദശാശ്രബാഹുവർഗ്ഗം വരും. ഇങ്ങനെ 24, 48, 96, 194, 384....തുടങ്ങിയ കോൺസംഖ്യയുള്ള അശ്രങ്ങളുടെ ബാഹുമാനങ്ങളെ വരുത്താം. ഈ പ്രകാരത്തെയാണ് ഭാസ്കരാചാര്യർ ആശ്രയിച്ചിട്ടുള്ളതെന്നു ലീലാവതീവ്യാഖ്യാതാവു ഗണേശൻ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു.

Again if B_3 is the middle point of arc AB_1 and OB_3 cuts AB_1 at C_3 we have $AB_3^2 = AC_3^2 + B_3C_3^2$

$$= \left(\frac{AB_1}{2}\right)^2 + (OB_3 - OC_3)^2$$

$$= \left(\frac{AB_1}{2}\right)^2 + \{OB_3 - \sqrt{OA^2 - AC_3^2}\}^2 \text{ and so on.}$$

At each stage we get ½ the side of the inscribed regular polygon as a product of r and a surd. Proceeding like this as far as we please

"വ്യാസേ ഭനന്ദാഗ്നിഹതേ വിഭക്തേ
ഖബാണസൂര്യൈഃ പരിധിസ്സുസൂക്ഷ്മഃ"

(ലീലാവതീ—6-ാം അദ്ധ്യായം—ശ്ലോകം 201)

1250 എന്ന വ്യാസത്തിനു പരിധി എത്ര?

ഷഡശ്രത്തിന്റെ ബാഹു $= 625$

ഷഡശ്രബാഹ്വർദ്ധത്തിന്റെ കോടി $= \sqrt{625^2 - (312\frac{1}{2})^2}$

$= \sqrt{292968{\cdot}75}$

$= 541{\cdot}2659$

ഇവിടത്തെ ശരം $= 625 - 541{\cdot}2659 = 83{\cdot}7341.$

$\therefore$ ദ്വാദശാശ്രബാഹുവർഗ്ഗം $= 312{\cdot}5^2 + 83{\cdot}7341^2$

$= 97656{\cdot}25 + 7011{\cdot}39950281$

$= 104667{\cdot}64950281$

ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ,

24 ബാഹുക്കളുള്ള സമബാഹ്വശ്ര ബാഹുവർഗ്ഗം $= 26620{\cdot}44902866$

48 സമബാഹുക്കളുള്ള സമബാഹ്വശ്രബാഹുവർഗ്ഗം $= 6683{\cdot}69838872$

96 സമബാഹുക്കളുള്ള സമബാഹ്വശ്രബാഹുവർഗ്ഗം $= 1672{\cdot}71587642$

192 സമബാഹുക്കളുള്ള സമബാഹ്വശ്രബാഹുവർഗ്ഗം $= 418{\cdot}29080126$

384 സമബാഹുക്കളുള്ള സമബാഹ്വശ്രബാഹുവർഗ്ഗം $= 104{\cdot}57970600$

384 കോണുകളുള്ള സമബാഹ്വശ്രബാഹു $= \sqrt{104{\cdot}57970600}$

$= 10{\cdot}2264.$

ഇതിനെ വൃത്തപ്രായമെന്നു കല്പിച്ചാൽ,

വൃത്തപരിധി $= 10{\cdot}2264 \times 384 = 3926{\cdot}9376$

$= 3927$

ഖബാണസൂര്യഃ (1250) എന്ന വ്യാസത്തിനു ഭനന്ദാഗ്നിഃ (3927) എന്ന പരിധിയാണെന്നു ലീലാവതിയിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. സമഷോഡശാശ്രത്തെ അപേക്ഷിച്ചു വരുത്തിയതാണീ പരിധി എന്നു ഗണേശൻ വ്യാഖ്യാനിച്ചിട്ടുമുണ്ട്.

"ചതുരധികം ശതമഷ്ടഗുണം
ദ്വാഷഷ്ടിസ്തഥാ സഹസ്രാണാം।
അയുതദ്വയവിഷ്കംഭസ്യാ-
സന്നോ വൃത്തപരിണാഹഃ" ॥

(ആര്യഭടീയം ഗണിതപാദം ശ്ലോകം 10)

---

say up to AB_9 we get $\frac{1}{2}$ the side of the inscribed regular polygon of 12.2^9 or 12×512 *ie* 6144 sides. Thus if AB_9 is multiplied by 12288 we get the perimeter of the polygon, which can be taken as the circumference of the circle itself.

In general $AB_n = \frac{1}{2}$ the side of the regular inscribed polygon of $6{\cdot}2^n$ sides.

Hence circumference in the limit $= AB_n \times 6 \times 2^{n+1}$.

20000 (1250×16) എന്ന വ്യാസത്തിനു പരിധി 62832 (3927×16) എന്നു ആര്യഭടാചാര്യൻ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു.

എന്നാൽ ഈ ബന്ധത്തെത്തന്നെ സമചതുരശ്രത്തെ അപേക്ഷിച്ചും വരുത്താം.

$$\text{സമചതുരശ്രബാഹു} = \text{വ്യാസം} = 1250$$

പരിലേഖം 21-ൽ വ്യാസാർദ്ധം കച $= 625$

$$\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം കച}^2 = 390625$$

$$\text{കർണ്ണം ഠച} = \sqrt{2 \times 390625} = 883{\cdot}8835$$

$$\text{കർണ്ണാർദ്ധം ചസ} = 441{\cdot}9417$$

$$\text{കർണ്ണം} - \text{വ്യാസാർദ്ധം} = \text{ചപ} = 883{\cdot}8835 - 625$$
$$= 258{\cdot}8835.$$

$$\text{തച} = \frac{\text{കച} \times \text{ചപ}}{\text{ചസ}} = \frac{625 \times 258{\cdot}8835}{441{\cdot}9417}$$
$$= 366{\cdot}1166$$

$$\therefore \text{അഷ്ടാശ്രഭുജം തക} = 1250 - 2 \times 366{\cdot}1166$$
$$= 517{\cdot}7668.$$

$$\text{അഷ്ടാശ്രഭുജാർദ്ധവർഗ്ഗം} = \text{തപ}^2 = 258{\cdot}8834^2 = 67020{\cdot}61479556$$

$$\text{കർണ്ണം ഠത} = \sqrt{390625 + 67020{\cdot}61479556}$$
$$= \sqrt{457645{\cdot}61479556}$$
$$= 676{\cdot}4951.$$

$$\text{ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരം} = \text{ഠപ}^2 - \text{തപ}^2$$
$$= 390625 - 67020{\cdot}61479556$$
$$= 323604{\cdot}38520444.$$

$$\text{ആബാധായോഗം} = \text{ഠത} = 676{\cdot}4951.$$

$$\therefore \text{ആബാധാന്തരം} = \frac{323604{\cdot}38520444}{676{\cdot}4951}$$
$$= 478{\cdot}3544.$$

$$\therefore \text{ചെറിയ ആബാധ തല} = \frac{676{\cdot}4951 - 478{\cdot}3544}{2}$$
$$= \frac{198{\cdot}1407}{2} = 99{\cdot}0703$$

$$\text{കർണ്ണം} - \text{വ്യാസാർദ്ധം} = 676{\cdot}4951 - 625$$
$$= 51{\cdot}4951.$$

$$\therefore \text{തര} = \frac{\text{തന} \times \text{തപ}}{\text{തല}} = \frac{51{\cdot}4951 \times 258{\cdot}8834}{99{\cdot}0703}$$
$$= 134{\cdot}5633.$$

$$\text{ഷോഡശാശ്രഭുജം} = \text{അഷ്ടാശ്രഭുജം} - 2 \times \text{തര}.$$
$$= 517{\cdot}7668 - 2 \times 134{\cdot}5633$$
$$= 248{\cdot}6402.$$

ഈ ഷോഡശാശ്രഭുജയെ വരുത്തിയ ന്യായപ്രകാരംതന്നെ 32,64,128...... തുടങ്ങിയുള്ള കോണുകളുള്ള അശ്രക്ഷേത്രങ്ങളുടെ ബാഹുക്കളെ വരുത്താം.

32 കോണുകളുള്ളതിൻെറ ഭുജ=123·2386

64 കോണുകളുള്ളതിൻെറ ഭുജ=61·4085

128 കോണുകളുള്ളതിൻെറ ഭുജ=30·6857

256 കോണുകളുള്ളതിൻെറ ഭുജ=15·3405

256 കോണുകളുള്ള ക്ഷേത്രത്തെ വൃത്തപ്രായമെന്നു കല്പിക്കാം.

അപ്പോൾ പരിധി=15·3405×256

=3927·168.

=3927 (ഏകദേശം).]

അനന്തരം ഇഷ്ടമായിട്ട് ഒരു വ്യാസത്തെ കല്പിച്ച് അതിങ്കന്നു വൎഗ്ഗമൂലക്രിയകൾ കൂടാതെ പരിധിയെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ നടേ നാലു ബാഹുക്കളേയും ഇഷ്ടവ്യാസതുല്യമായിട്ടു കല്പിച്ച് ഇരിപ്പോരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. അതിൻെറ അകത്ത് ഒരു വൃത്തത്തേയും കല്പിപ്പൂ. വൃത്തനേമി നാലു ഭുജാമദ്ധ്യത്തിങ്കലും സ്പൎശിക്കുമാറ് ഇരിക്കേണം. പിന്നെ വൃത്തമദ്ധ്യത്തൂടെ പൂൎവ്വാപരസൂത്രത്തേയും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തേയും വൃത്തനേമിയും ഭുജാമദ്ധ്യവും തങ്ങളിലുള്ള സംപാതത്തിങ്കൽ അഗ്രമാകുമാറു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ പൂൎവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു ചതുരശ്രത്തിൻെറ അഗ്നികോണോടിട വ്യാസാൎദ്ധതുല്യമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ പെരികെ അടുക്കെ ഇടകൾ എല്ലാമൊക്കുമാറുകണ്ടു ചില വിഭാഗത്തെ കല്പിച്ചു ചില ബിന്ദുക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ. എത്ര ഏറസംഖ്യ ഉണ്ടായി അത്ര സൂക്ഷ്മമാകും പരിധി. പിന്നെ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ആ ബിന്ദുക്കളിലഗ്രമാകുമാറ് അത്ര കൎണ്ണരേഖകളേയും കല്പിപ്പൂ. അവിടെ പൂൎവ്വസൂത്രം കോടിയാകുന്നത്. പൂൎവ്വസൂത്രത്തോടു കൎണ്ണാഗ്രത്തോടിടയിലേടം പൂൎവ്വഭുജാഭാഗം ഭുജ ആകുന്നത്. അവിടെ പൂൎവ്വസൂത്രത്തിന്നടുത്തു തെക്കെ കൎണ്ണത്തിന്നു് ഒരു ഖണ്ഡം ഭുജയാകുന്നത്. രണ്ടാം കൎണ്ണത്തിന്നു രണ്ടു ഖണ്ഡം കൂടിയതു ഭുജയാകുന്നത്. ഇങ്ങിനെ പിന്നെ പിന്നെ കൎണ്ണത്തിന്നു് ഓരോരോ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളേറിയതു ഭുജകളായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങിനെ ചതുരശ്രകോണിലെ കൎണ്ണത്തിന്നു എല്ലായിലും വലിയ ഭുജാ. പിന്നെ കോടി എല്ലാ കൎണ്ണത്തിന്നും വ്യാസാൎദ്ധമാകുന്ന പൂൎവ്വസൂത്രംതന്നെ. ആകയാൽ വ്യാസാൎദ്ധവൎഗ്ഗവും അതതു ഭുജാവൎഗ്ഗവും കൂട്ടി മൂലിച്ചതു് അതതു കൎണ്ണമായിട്ടിരിക്കും.

അനന്തരം ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോട് അതിനടുത്തുള്ള ആദ്യകൎണ്ണാഗ്രത്തോട് ഉള്ള ഇട ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ ഒരു ഖണ്ഡം യാതൊ

ന്ന് അതിനെ ദിക്സൂത്രാഗ്രമാകുന്ന വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ആദ്യകർണ്ണംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന് ആദ്യകർണ്ണത്തോടിട ആദ്യകർണ്ണവിപരീതമായിട്ടുണ്ടാകും. ഈ രേഖ ഒരു കോടിയായിട്ടിരിക്കും. ഇക്കോടിയും ആദ്യകർണ്ണവുമുള്ള സംപാതത്തിങ്കന്ന് ആ കർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രം ഭുജയാകുന്നത്. ആദ്യകർണ്ണവും ദിക്സൂത്രാഗ്രവുമുള്ള ഇട ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ ഖണ്ഡം കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇത് ഒരു് ഇച്ഛാക്ഷേത്രം. ഇതിന്നു തുല്യാകാരമായിരിക്കുന്ന പ്രമാണക്ഷേത്രമാകുന്നതു പിന്നെ. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു പൂർവ്വഭുജാമദ്ധ്യത്തോളമുള്ള ദിക്സൂത്രം കോടി. ആദ്യകർണ്ണരേഖ കർണ്ണം. കർണ്ണകോടികളുടെ അഗ്രാന്തരം ഭുജ. ഇപ്രമാണക്ഷേത്രത്തോടു തുല്യാകാരമായിട്ടിരുന്നോന്ന് ഇച്ഛാക്ഷേത്രം. ഇതിന്നു ഹേതു. പ്രമാണക്ഷേത്രഭുജയോടു തുല്യദിക്ക് ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണം, ഇച്ഛാക്ഷേത്രഭുജയോടു തുല്യദിക്ക പ്രമാണകർണ്ണം എന്ന് ആകിലുമാം. പിന്നെ പ്രമാണക്ഷേത്രകോടിയാകുന്ന ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്നു വിപരീതമായിട്ടിരുന്നൊന്ന് ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രഭുജാഖണ്ഡം. ഇവിടെ ഇച്ഛാഫലമായിട്ടു വരുത്തിയ ഇച്ഛാക്ഷേത്രകോടി പ്രമാണക്ഷേത്രകർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതദിക്കായിട്ടിരുന്നൊന്ന് എന്നാകിലുമാം. രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങളും തുല്യാകാരങ്ങൾ എന്നതിൻ ഹേതുവാകുന്നത്. ഇങ്ങനെ ഇവിടെ രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങളിലും അന്യോന്യം ഭുജാകർണ്ണങ്ങൾക്ക ദിക്സാമ്യം, കോടികർണ്ണങ്ങൾക്ക ദിഗ്വൈപരീത്യം, എന്നിട്ട് ആകാരസാമ്യം ഉണ്ടാകുന്നു. അവിടെ മൂന്നിനുംകൂടി ദിഗ്വൈപരീത്യം താൻ ദിക്സാമ്യം താൻ ഉണ്ട് എങ്കിലും തുല്യാകാരങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. യാതൊരുപ്രകാരം സമചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കുന്ന മണ്ഡപത്തിന്റെ ചെരിഞ്ഞിരിക്കുന്ന കഴുക്കോൽ പ്രമാണക്ഷേത്രകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്നതിന്നു വാമട ഭുജയായിട്ടിരിക്കുന്നു, ഇതിന്നു തുല്യദിക്കായിട്ടിരിക്കും ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്ന വളത്തുള; ഇക്കർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജയാകുന്നതു കഴുക്കോലുടെ പാർശ്വത്തിങ്കലെ വളത്തുളേടെ ചെരിവ്; ഭുജാകർണ്ണങ്ങൾ ഇതരേതരതുല്യദിക്കുകളാകയാൽ കഴുക്കോൽ ചെരിവുകൊണ്ടു വളത്തുളേടെ ചെരിവുണ്ടാകുന്നു. എന്നിങ്ങനെ എല്ലാം നിരൂപിക്കേണ്ടൂ. ആകയാൽ ത്രൈരാശികംകൊണ്ടുവരുത്താം ഇച്ചൊല്ലിയ ഇച്ഛാക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ കോടിയെ.

അനന്തരം മൂന്നാമതുമുണ്ട് ഇവിടെ ഒരു ത്ര്യശ്രം. അതിന്നു ദിക്സൂത്രം കർണ്ണമാകുന്നത്. ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്ന് ആദ്യകർണ്ണത്തോടുള്ള അന്തരാളം ഇച്ചൊല്ലിയ ഇച്ഛാക്ഷേത്രകോടി ഇവിടെക്ക ഭുജയാക

ന്നത്. ഈ ഭുജയും ആദ്യകർണ്ണവുമുള്ള യോഗത്തിങ്കന്ന് ആദ്യകർണ്ണത്തിന്റെ ഖണ്ഡം വൃത്തകേന്ദ്രത്തോളമുള്ളതു കോടി ആകുന്നത്. ഇങ്ങനെ ഇത്.

അനന്തരം രണ്ടാമതുമുണ്ട് ഒരു പ്രമാണക്ഷേത്രം. അതിന്നു ദിക്സൂത്രംതന്നെ കോടിയാകുന്നത്. കോട്യഗ്രത്തിങ്കന്നു ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ രണ്ടു ഖണ്ഡംകൂടിയതു ഭുജയാകുന്നതു്. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങിയുള്ള കർണ്ണത്തിൽ രണ്ടാമതു കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇങ്ങനെയൊന്നു ദ്വിതീയപ്രമാണക്ഷേത്രമാകുന്നത്. പിന്നെ ഇതിന്റെ ഇച്ഛാക്ഷേത്രം. പ്രഥമകർണ്ണാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതമായി ദ്വിതീയകർണ്ണത്തെ സ്പർശിക്കുമാറുള്ള രേഖ കോടിയാകുന്നത്. ഈ കോടിസംപാതത്തിങ്കന്നു ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രം ഭുജാ. ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ രണ്ടാംഖണ്ഡം കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇങ്ങനെ രണ്ടാമിച്ഛാക്ഷേത്രം. യാതൊരുപ്രകാരം നടുവിങ്കന്നു രണ്ടാം കഴക്കോൽ പ്രമാണക്ഷേത്രകർണ്ണമാകുമ്പോൾ കഴക്കോൽപഴുതി രണ്ടുകൂടിയതു പ്രമാണഭുജയാകുന്നത്. ആകയാൽ നടേത്തെ കഴക്കോലേക്കാൾ നീളമേറും രണ്ടാംകഴക്കോൽ. അതിന്നു തക്കവണ്ണം അതിന്മേലെ വളത്തുളയും നീളമേറും. അത് ഇവിടക്ക് ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണമായി പ്രമാണക്ഷേത്രഭുജയാകുന്ന വാമടയോടു തുല്യദിക്കായി ഇരുന്നൊന്ന്. ഇങ്ങനെ കഴക്കോൽ ചെരിവും അതാതിങ്കലെ വളത്തുളയുടെ ചെരിവും ഒരു പ്രകാരമെന്നതു യാതൊന്ന് അവ്വണ്ണമിരിപ്പൊന്ന് ഇവിടത്തെ പ്രമാണേച്ഛാക്ഷേത്രങ്ങൾ. ഇവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ രണ്ടാംഖണ്ഡത്തെ പ്രമാണക്ഷേത്രകോടിയായിരിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച പ്രമാണമാകുന്ന ദ്വിതീയകർണ്ണത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ദ്വിതീയേച്ഛാക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ കോടി. പിന്നെ ഈ കോടിയെ ഭുജയെന്നു കല്പിച്ച് ഇതിന്റെ സംപാതത്തിങ്കന്നു വൃത്തകേന്ദ്രത്തോളമുള്ള ദ്വിതീയകർണ്ണഖണ്ഡം കോടി, ആദ്യകർണ്ണമാകുന്നതു കർണ്ണമാകുന്നത് എന്നും കല്പിപ്പൂ ഇങ്ങനെ മൂന്നാമത് ഒരു ത്ര്യശ്രമുണ്ട് ഇവിടേയും.

ഇങ്ങനെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ കോണോളമുള്ള ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങൾ ഓരോന്നിങ്കലെ മൂന്നു ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രങ്ങളുള്ളൂ. അവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ചതുരശ്രകോണോളമുള്ള ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളെ ഓരോന്നിനെ ദിക്സൂത്രത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അതതു ഖണ്ഡങ്ങളുടെ അഗ്രങ്ങളെ സ്പ

ശിക്കുന്നതിൽ വലിയ കൎണ്ണങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടാകുന്ന ഫലം ഇതിനടുത്തു മുമ്പിലെ കൎണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി അതിനടുത്ത വലിയ കൎണ്ണത്തിന്നു വിപരീതമായിട്ടിരിക്കുന്ന അന്തരാളങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇവ ഇച്ഛാക്ഷേത്രകോടികൾ. ഇവ തന്നെ പിന്നെയും ഭുജകളായിട്ടിരിക്കും. ഈ ഭുജാസംപാതത്തിങ്കന്നുതുടങ്ങി വലിയകൎണ്ണത്തിന്റെ ഖണ്ഡം വൃത്തകേന്ദ്രത്തോളമുള്ളതു കോടി. പിന്നെ ഈ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി അതതു ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളെ സ്പൎശിക്കുന്ന കൎണ്ണങ്ങൾ രണ്ടിൽവെച്ചു ചെറിയതു് ഇവിടക്കു കൎണ്ണമാകുന്നതു്. ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പോ ചിലവ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ. ഇവ പിന്നക്കു പ്രമാണക്ഷേത്രങ്ങളായിരിപ്പോ ചിലവ. ഇവിടയ്ക്കു് ഇച്ഛാക്ഷേത്രങ്ങളാകുന്നവ ഈ പ്രമാണക്ഷേത്രങ്ങളെതന്നെ വൃത്തത്തിന്റെ അന്തൎഭാഗത്തിങ്കൽ കല്പിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നവ. ഇവിടെ ഈ പ്രമാണകൎണ്ണത്തിന്റെ ഏകദേശമായിട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തവ്യാസാൎദ്ധം ഇച്ഛയാകുന്നതു്. ഈ വ്യാസാൎദ്ധാഗ്രത്തിങ്കന്നു വലിയ കൎണ്ണത്തിന്നു വിപരീതമായിട്ടുള്ള അന്തരാളമിച്ഛാഫലം. ഇങ്ങനെ അതതു കൎണ്ണാന്തരാളങ്ങളിലെ പരിധിഭാഗത്തിങ്കലെ അൎദ്ധജ്യാക്കളായിട്ടു് ഉളവാകും ഇച്ചൊല്ലിയ ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ. എന്നാൽ ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങിയുള്ള ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങളതതിനെ വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു രണ്ടുവട്ടം ഗുണിച്ചു് അതതു ഖണ്ഡത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ള കൎണ്ണങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും ഘാതംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം അതതു കൎണ്ണാന്തരാളത്തിങ്കലെ പരിധ്യംശത്തിങ്കലെ അൎദ്ധജ്യാവായിട്ടു വരും. ഇവിടെ ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങൾ പെരികെ ചെറുതു് എങ്കിൽ ഈ അൎദ്ധജ്യാക്കൾതന്നെ ചാപഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടിരിക്കും പ്രായേണ.

[വ എന്നാൽ വ്യാസത്തെ ഇഷ്ടമായിട്ടു കല്പിക്ക. ഇതിനോടു തുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന ബാഹുക്കളോടുകൂടിയ ഒരു ചതുരശ്രത്തെ വരക്ക. വൃത്തനേമി നാലു ഭുജാമദ്ധ്യത്തിങ്കലും സ്പൎശിക്കേണം. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽകൂടി പൂൎവ്വാപരസൂത്രത്തേയും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തേയും ഉണ്ടാക്ക. അവ ബാഹുമദ്ധ്യങ്ങളിൽ സ്പൎശിക്കുന്നു എന്നും കല്പിക്ക. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ കിഴക്കു (കടലാസ്സിന്റെ മുകൾഭാഗം കിഴക്ക് എന്നു സങ്കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു) നിന്നു അഗ്നികോണോളമുള്ള പരിധിഭാഗത്തിന്റെ—പരിധ്യഷ്ടാംശത്തിന്റെ—മാനത്തെയാണ് ആദ്യമായി വരുത്തുന്നതു്. പരിലേഖം 24-ൽ ക്ഷേത്രത്തിന്റെ ഈ ഭാഗത്തെ മാത്രമെ കാണിച്ചിട്ടുള്ളു.

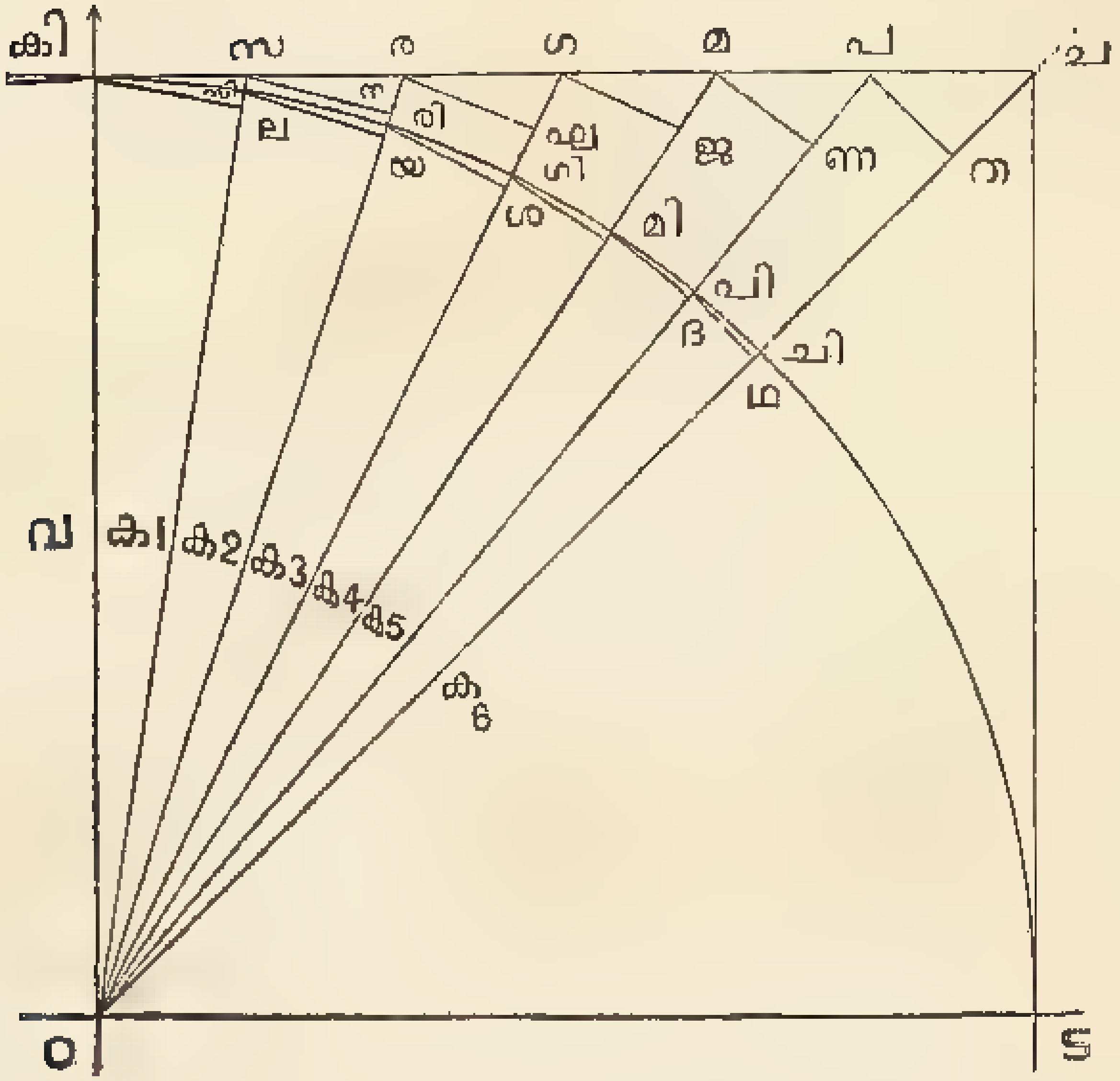
പരിലേഖം 24-ൽ ഠകി=പൂൎവ്വസൂത്രം.

ഠദ=ദക്ഷിണസൂത്രം.

കി, ട ക്രമേണ പൂർവ്വദക്ഷിണബാഹുക്കളുടെ മദ്ധ്യങ്ങൾ.

ഠ = വൃത്തകേന്ദ്രം.

കിച = പൂർവ്വബാഹുവിന്റെ തെക്കെ അർദ്ധം.



പരിലേഖം 24.

കിച എന്നതിനെ കിസ, സര, രഗ, ഗമ എന്നു തുടങ്ങിയ അസംഖ്യം തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടു വിഭജിക്ക.

അപ്പോൾ ഠസ, ഠര, ഠഗ, ഠമ............ഠച ഇവയെല്ലാം ഓരോ കർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും. ഈ കർണ്ണങ്ങളെ $ക_1$, $ക_2$, $ക_3$, $ക_4$............എന്നും കല്പിക്ക.

ഇവയിൽ ഏററവും വലിയ കർണ്ണം ഠച.

കി, സ, ര, ഗ, മ.......എന്ന ഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽനിന്ന് അതാതു് അടുത്ത കർണ്ണത്തിനു വിപരീതദിക്കായിട്ടു കില, സന, രഘ, ഗജ, മണ.........എന്ന ക്രമേണയുള്ള ലംബങ്ങളെ വരക്ക. ഈ കർണ്ണങ്ങൾ വൃത്തത്തെ സി, രി, ഗി, മി.........എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കളിൽനിന്നും അതാതിന്റെ മേലെയുള്ള കർണ്ണത്തിനു വിപരീതദിക്കായിട്ടു സിയ, രിശ.........എന്നു തുടങ്ങിയ ക്രമേണയുള്ള ലംബങ്ങളെയും വരക്ക.

ഒരു ഭുജാഖണ്ഡത്തെ ഖ് എന്നു കല്പിക്ക.

ത്ര്യശ്രങ്ങളുടെ തുല്യാകാരത്വത്തിന്റെ ലക്ഷണങ്ങൾ:—

1. രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ഇതരേതരഭുജാകർണ്ണങ്ങൾക്ക് അന്യോന്യം ദിക്സാമ്യം, ഇതരേതരകോടികർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിഗ്വൈപരീത്യം.
2. രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികർണ്ണങ്ങൾ മൂന്നിനും അന്യോന്യം ദിഗ്വൈപരീത്യം.
3. രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികർണ്ണങ്ങൾ മൂന്നിനും അന്യോന്യം ദിക്സാമ്യം.

ഇങ്ങനെ തുല്യാകാരങ്ങളായിരിക്കുന്ന രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങളിൽ ഒന്നിനെ പ്രമാണക്ഷേത്രമെന്നും മറേറതിനെ ഇച്ഛാക്ഷേത്രമെന്നും കല്പിക്കാം.

എന്നാലവിടെ $\frac{\text{ഇച്ഛാക്ഷേത്രഭുജാ}}{\text{പ്രമാണക്ഷേത്രഭുജം}} = \frac{\text{ഇച്ഛാക്ഷേത്രകോടി}}{\text{പ്രമാണക്ഷേത്രകോടി}} = \frac{\text{ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണം}}{\text{പ്രമാണക്ഷേത്രകർണ്ണം}}$

ഇങ്ങനത്തെ ഒരു ബന്ധമുണ്ടായിരിക്കും. ഇതാണ് തുല്യകാരക്ഷേത്രങ്ങളിലെ ത്രൈരാശികന്യായം.

ഇവിടെ ഠകിസ, കിലസ എന്ന രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളുണ്ട്. ആദ്യത്തേതിൽ കർണ്ണം ഠസ, ഭുജ കിസ, കോടി ഠകി. രണ്ടാമത്തേതിൽ കർണ്ണം കിസ, ഭുജ ലസ, കോടി കില. ത്ര്യശ്രം ഠകിസ ഒരു പ്രമാണക്ഷേത്രം, ത്ര്യശ്രം കിലസ, ഒരിച്ഛാക്ഷേത്രം. ഇച്ഛാക്ഷേത്രഭുജ ലസ പ്രമാണക്ഷേത്രകർണ്ണം ഠസ എന്നതിനോടു തുല്യദിക്; ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണം കിസ പ്രമാണക്ഷേത്രഭുജ കിസ എന്നതിനോടു തുല്യദിക്; ഇങ്ങനെതന്നെ ഇതരേതരകോടികർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിഗ്വൈപരീത്യവുമുണ്ടെന്നു കാണാം. അതുകൊണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾ ഠകിസ, കിലസ രണ്ടും തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\therefore \frac{\text{കില}}{\text{കിസ}} = \frac{\text{ഠകി}}{\text{ക}_1}$$

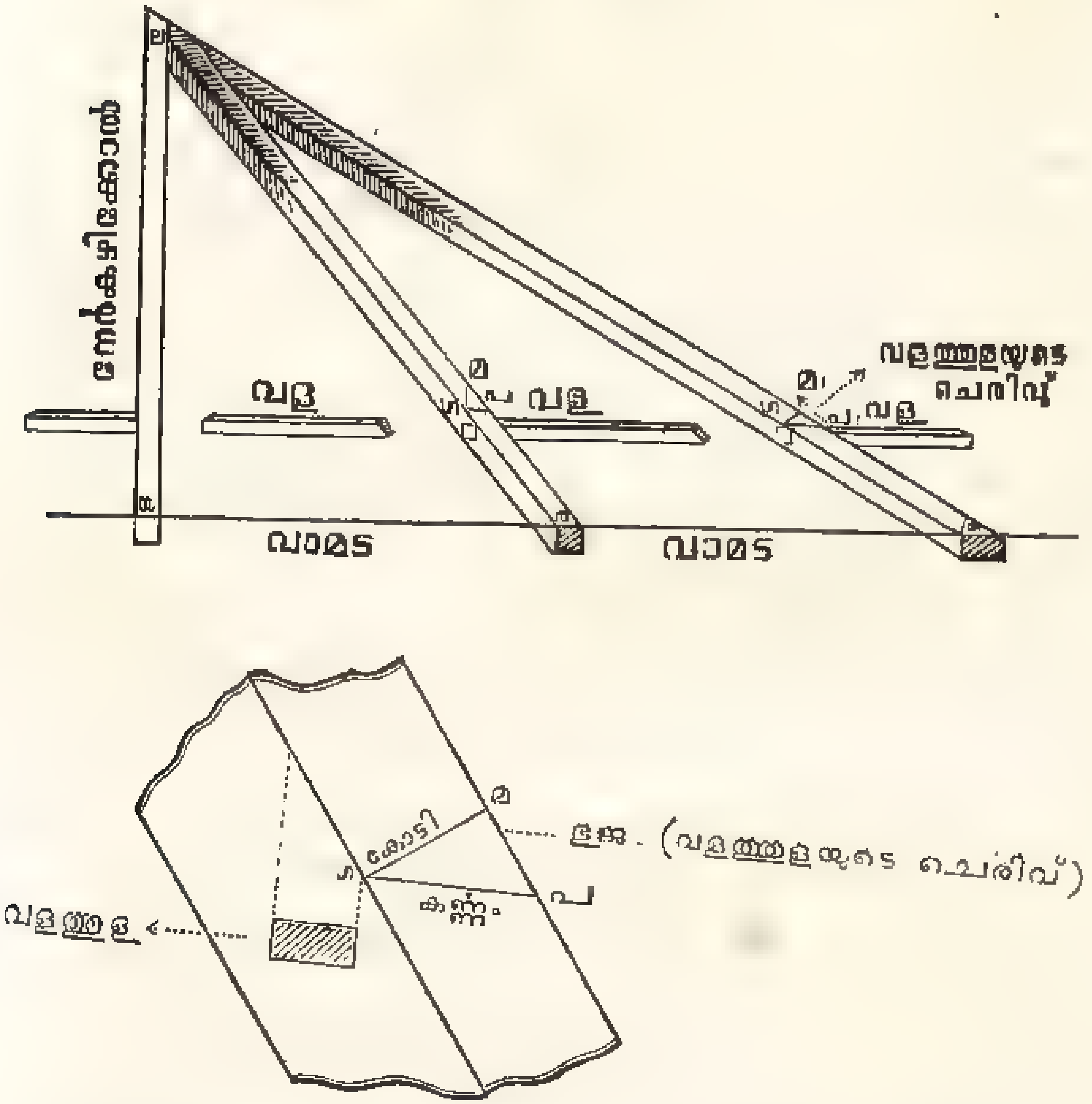
$$\therefore \text{കില} = \frac{\text{കിസ} \times \text{ഠകി}}{\text{ക}_1} = \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}}{\text{ക}_1}.$$

പിന്നെ ഇതരേതരഭുജാകർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിക്സാമ്യംകൊണ്ടും ഇതരേതരകോടികർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിഗ്വൈപരീത്യംകൊണ്ടും, ത്ര്യശ്രങ്ങൾ ഠകിര, സനര രണ്ടും തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\therefore \text{സന} = \frac{\text{കിര} \times \text{ഠകി}}{\text{ക}_2} = \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}}{\text{ക}_2}.$$

ഈ തുല്യാകാരന്യായത്തെ ഒരു സമചതുരശ്രമായ മണ്ഡപത്തിന്റെ കഴുക്കോൽ, വാമട, വളത്തുളയുടെ ചെരിവ് ഇവയെക്കൊണ്ട് ഉദാഹരിച്ചിരിക്കുന്നു. ഒരു പ്രമാണക്ഷേത്രത്തിൽ ആദ്യത്തെ ചെരിഞ്ഞ കഴുക്കോൽ കർണ്ണം, വാമട ഭുജ; അതിന്റെ ഇച്ഛാക്ഷേത്രത്തിൽ ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണമായിരിക്കുന്ന വളത്തുള പ്രമാണക്ഷേത്രഭുജയായിരിക്കുന്ന വാമടയോടു തുല്യദിക്; ഭുജയായി

രിക്കുന്നതു് ആ ചെരിഞ്ഞ കഴുക്കോലിന്റെ പാർശ്വത്തിങ്കലെ വളത്തുളയുടെ ചെരിവു്. ഇങ്ങനെ ഇതരേതരഭുജാകർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിക്സാമ്യം. അതുകൊണ്ടു കഴുക്കോലിന്റെ ചെരിവിന്നു തക്കവണ്ണം വളത്തുളയുടെ ചെരിവുണ്ടാകുന്നു. വളത്തുളയുടെ ചെരിവു ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു വരുത്താം. രണ്ടാംകഴുക്കോൽ പ്രമാണക്ഷേത്രമാകുമ്പോൾ കഴുക്കോൽപന്തികൾ രണ്ടുകൂടിയതു പ്രമാണ



പരിലേഖം 24. (അ)

ക്ഷേത്രഭുജയാകുന്നു. അതിനാൽ അതിന്മേലെ വളത്തുളയുടെ നീളമേറുന്നു. ഈ വളത്തുള വാമടയോടു തുല്യദിക്കാകുന്നു. ഇങ്ങനെ കഴുക്കോൽചെരിവും അതിന്മേലെ വളത്തുളയുടെ ചെരിവും ഒരുപ്രകാരംതന്നെ ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്നു. പരിലേഖം 24 (അ) ൽ നിന്നു ഇവയെല്ലാം മനസ്സിലാക്കാം.

പരിലേഖം 24-ൽ,

ത്ര്യശ്രങ്ങൾ ഷകിഗ, ഖഘഗ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

ത്ര്യശ്രങ്ങൾ ഠകിമ, ഗജമ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

....

....

$$\text{അപ്പോൾ ഷര} = \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}}{\text{ക}_3}$$

$$\text{ജഗ} = \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}}{\text{ക}_4}$$

....

....

പിന്നെ ത്ര്യശ്രം ഠസന എന്നൊരു പ്രമാണക്ഷേത്രം, അതിന്റെ ഇച്ഛാക്ഷേത്രം ഠസിയ. ഇവിടെ രണ്ടിങ്കലും ഭുജാകോടി കർണ്ണങ്ങൾക്ക് അന്യോന്യം ദിക്സാമ്യമുണ്ടാകയാൽ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളും തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\text{അപ്പോൾ } \frac{\text{സിയ}}{\text{വ}} = \frac{\text{സന}}{\text{ക}_1}$$

$$\therefore \text{സിയ} = \frac{\text{സന} \times \text{വ}}{\text{ക}_1} = \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{ക}_1 \times \text{ക}_2}.$$

$$\text{ഇപ്രകാരംതന്നെ രിശ} = \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{ക}_2 \times \text{ക}_3}.$$

....

....

$$\text{പിഥ} = \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{ഠഫ} \times \text{ഠഛ}}.$$

$$\text{ഇവിടെ കില} = \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}}{\text{ക}_1} = \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{വ} \times \text{ക}_1}.$$

ഇവിടെ കില, സിയ, രിശ.......പിഥ ഇവയെല്ലാം കിസി, സിരി, രിശി.......എന്ന ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ ക്രമേണയുള്ള അർദ്ധജ്യാക്കളാകുന്നു.

ഭുജാഖണ്ഡം വളരെ ചെറുതായി കല്പിച്ചാൽ ഈ ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ വളരെ ചെറിയവയായിരിക്കും. അപ്പോൾ ചാപഖണ്ഡങ്ങളോടു തുല്യമർദ്ധജ്യാക്കളെന്നു കല്പിക്കാം.

$$\text{ചാപഖണ്ഡയോഗം} = \text{കിസി} + \text{സിരി} + \text{രിശി} + \ldots\ldots + \text{പിഛി}$$

$$= \text{പരിധ്യഷ്ടാംശം}$$

$$= \text{അർദ്ധജ്യാക്കളുടെ യോഗം}$$

$$\therefore \text{പരിധ്യഷ്ടാംശം} = \text{കില} + \text{സിയ} + \text{രിശ} + \ldots\ldots + \text{പിഥ}.$$

$$= \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{വ} \times \text{ക}_1} + \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{ക}_1 \times \text{ക}_2} + \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{ക}_2 \times \text{ക}_3} + \ldots\ldots + \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{ഠഫ} \times \text{ഠഛ}} \Bigg]$$

അവിടെ ചതുരശ്രഭുജയെ തുല്യമായിട്ടു ഖണ്ഡിക്കയാൽ ഖണ്ഡങ്ങൾ തുല്യങ്ങൾ, വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഒന്നുതന്നെ ഗുണകാരമാകുന്നതും. അതതു ഖണ്ഡത്തിന്ന് അടുത്തു കീഴേയുമ്മീതേയുമുള്ള കർണ്ണങ്ങളുടെ

ഘാതം ഹാരകമാകയാൽ ഹാരകന്നാനാരൂപം. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്ത് ഈ കർണ്ണഘാതത്തെ രണ്ടു കർണ്ണങ്ങളുടേയും വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധമെന്നു കല്പിക്കാം, മിക്കവാറും തങ്ങളിൽ സംഖ്യാസാമ്യമുണ്ട്, എന്നിട്ട്. ഈവണ്ണമാകുമ്പോളത്തെ ഹാര്യത്തെ രണ്ടു കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടും വെവ്വേറെ ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലങ്ങളെ രണ്ടിനേയും കൂട്ടി അർദ്ധിച്ചുകൊള്ളൂ. ഇതിനോടു തുല്യമായിട്ടിരിക്കും വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം.

$$[\text{പരിധ്യഷ്ടാംശം} = \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}\times\text{ക}_1} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1\times\text{ക}_2} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2\times\text{ക}_3} + \cdots\cdots + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഛ}\times\text{ഛ}}.$$

ഇവിടെ എല്ലായിടത്തും ഗുണ്യം ഖ തന്നെ, ഗുണകാരം വ^2 തന്നെ. ഹാരകം നാനാപ്രകാരങ്ങൾ.

ബാഹ്വർദ്ധത്തെ അസംഖ്യമായിട്ടു ഖണ്ഡിക്കയാൽ, അടുത്തുള്ള കർണ്ണങ്ങൾ രണ്ടും തുല്യങ്ങളെന്നുതന്നെ കല്പിക്കാം.

$$\therefore \text{ക}_2 - \text{ക}_1 \to 0$$

$$(\text{ക}_2 - \text{ക}_1)^2 = \text{ക}_2^2 + \text{ക}_1^2 - 2\text{ക}_2\times\text{ക}_1 \to 0$$

$$\therefore \text{ക}_1^2 + \text{ക}_2^2 \to 2\text{ക}_1\text{ക}_2$$

$$\therefore \text{ക}_1\times\text{ക}_2 \to \frac{\text{ക}_1^2+\text{ക}_2^2}{2} \quad (\text{കർണ്ണങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധം} = \text{ഘാതം})$$

$$\frac{1}{\text{ക}_1\times\text{ക}_2} \to \frac{2}{\text{ക}_1^2+\text{ക}_2^2} \to \frac{2(\text{ക}_1^2+\text{ക}_2^2)}{(\text{ക}_1^2+\text{ക}_2^2)^2}$$

$$\to \frac{2(\text{ക}_1^2+\text{ക}_2^2)}{4\text{ക}_1^2\text{ക}_2^2}$$

$$\to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\text{ക}_1^2} + \frac{1}{\text{ക}_2^2}\right)$$

അതുകൊണ്ടു കർണ്ണഘാതംകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നതിന്നു പകരം കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു വെവ്വേറെ ഹരിച്ചുകൂട്ടി അർദ്ധിച്ചാലും ഫലം തുല്യമാകുമെന്നു വന്നു.

$$\therefore \text{പരിധ്യഷ്ടാംശം} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1^2} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2^2} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1^2}\right) +$$

$$\cdots\cdots\cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഛ}^2} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഛ}^2}\right)]$$

അവിടെ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ദോഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ വടക്കെ അഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന കർണ്ണങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു നടേ ഹരിക്കുമാറു നിരൂപിപ്പൂ. അവിടെ നടേത്തേതാകുന്ന ദിക്സൂത്രം, ഇതിന്റെ വർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഗുണകാരവും ഇതുതന്നെ

ഘാതം ഹാരകമാകയാൽ ഹാരകനാനാത്വരൂപം. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്തു് ഈ കൎണ്ണഘാതത്തെ രണ്ടു കൎണ്ണങ്ങളുടെയും വൎഗ്ഗയോഗാൎദ്ധമെന്നു കല്പിക്കാം, മിക്കവാറും തങ്ങളിൽ സംഖ്യാസാമ്യമുണ്ടു്, എന്നിട്ടു്. ഈവണ്ണമാകുമ്പോളതതു ഹാൎയ്യത്തെ രണ്ടു കൎണ്ണവൎഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടും വെവ്വേറെ ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലങ്ങളെ രണ്ടിനേയും കൂട്ടി അൎദ്ധിച്ചുകൊള്ളൂ. ഇതിനോടു തുല്യമായിട്ടിരിക്കും വൎഗ്ഗയോഗാൎദ്ധം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം.

$$[\text{പരിധ്യഷ്ടാംശം} = \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}\times\text{ക}_1} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1\times\text{ക}_2} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2\times\text{ക}_3} + \cdots\cdots + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠപ}\times\text{ഠച}}$$

ഇവിടെ എല്ലായിടത്തും ഗുണ്യം ഖ തന്നെ, ഗുണകാരം വ^2 തന്നെ. ഹാരകം നാനാപ്രകാരങ്ങൾ.

ബാഹ്വൎദ്ധത്തെ അസംഖ്യമായിട്ടു ഖണ്ഡിക്കയാൽ, അടുത്തുള്ള കൎണ്ണങ്ങൾ രണ്ടും തുല്യങ്ങളെന്നുതന്നെ കല്പിക്കാം.

$$\therefore \text{ക}_2 - \text{ക}_1 \to 0$$

$$(\text{ക}_2 - \text{ക}_1)^2 = \text{ക}_2^2 + \text{ക}_1^2 - 2\text{ക}_2\times\text{ക}_1 \to 0$$

$$\therefore \text{ക}_1^2 + \text{ക}_2^2 \to 2\text{ക}_1\text{ക}_2$$

$$\therefore \text{ക}_1\times\text{ക}_2 \to \frac{\text{ക}_1^2+\text{ക}_2^2}{2} \quad (\text{കൎണ്ണങ്ങളുടെ വൎഗ്ഗയോഗാൎദ്ധം} = \text{ഘാതം})$$

$$\frac{1}{\text{ക}_1\times\text{ക}_2} \to \frac{2}{\text{ക}_1^2+\text{ക}_2^2} \to \frac{2(\text{ക}_1^2+\text{ക}_2^2)}{(\text{ക}_1^2+\text{ക}_2^2)^2}$$

$$\to \frac{2(\text{ക}_1^2+\text{ക}_2^2)}{4\text{ക}_1^2\text{ക}_2^2}$$

$$\to \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\text{ക}_1^2} + \frac{1}{\text{ക}_2^2}\right)$$

അതുകൊണ്ടു കൎണ്ണഘാതംകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നതിനു പകരം കൎണ്ണവൎഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു വെവ്വേറെ ഹരിച്ചുകൂട്ടി അൎദ്ധിച്ചാലും ഫലം തുല്യമാകുമെന്നു വന്നു.

$$\therefore \text{പരിധ്യഷ്ടാംശം} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1^2} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}^2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2^2} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1^2}\right) +$$

$$\cdots\cdots\cdots + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠപ}^2} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}\right)]$$

അവിടെ പൂൎവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ദോഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ വടക്കെ അഗ്രത്തെ സ്പൎശിക്കുന്ന കൎണ്ണങ്ങളുടെ വൎഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു നടേ ഹരിക്കുമാറു നിരൂപിപ്പൂ. അവിടെ നടേത്തേതാകുന്ന ദിക്സൂത്രം, ഇതിന്റെ വൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഗുണകാരവും ഇതുതന്നെ

ആകയാൽ ദോഃഖണ്ഡംതന്നെ ഫലമാകുന്നതു്. പിന്നെ ഒടുക്കത്തെ കർണ്ണം കോണസൂത്രം. ഇതിന്റെ വർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ദോഃഖണ്ഡാർദ്ധമായിരിക്കും ഫലം. വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ ഇരട്ടിച്ചതെല്ലൊ അന്ത്യകർണ്ണവർഗ്ഗമാകുന്നതു്, എന്നിട്ടു്. ഗുണകാരത്തിലിരട്ടി ഹാരകമാകുന്നേടത്തു ഗുണ്യത്തിലർദ്ധം ഫലം. ഇവിടെ എല്ലാ ദോഃഖണ്ഡങ്ങളുടേയും ആദ്യദ്വിതീയാഗ്രങ്ങളെ സ്പർശിച്ചിട്ടു് ഈരണ്ടു കർണ്ണങ്ങളുള്ളൂ. ഇവററിൽ ആദ്യകർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുള്ള ഫലങ്ങളുടെ യോഗം യാതൊന്നു്, യാതൊന്നു പിന്നെ ദ്വിതീയകർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലങ്ങളുടെ യോഗം, ഇവ തങ്ങളുടെ അന്തരമാകുന്നതു നടേത്തെ പരിഷയിലെ ആദ്യഫലവും രണ്ടാം പരിഷയിലെ ഒടുക്കത്തെ ഫലവും തങ്ങളിലെ അന്തരം. അവ പിന്നെ ദോഃഖണ്ഡത്തിന്റെ അർദ്ധമായിട്ടിരിക്കും. ഇടയിലെ ഫലങ്ങൾ രണ്ടു വകയിലും ഹാരകങ്ങൾ ഒന്നേ ആകയാൽ ഫലങ്ങളും ഒന്നേ ആയിട്ടിരിക്കും. രണ്ടാമതു തുടങ്ങി ഉപാന്ത്യം ഒടുക്കമായിട്ടുള്ള ഫലങ്ങൾക്കു ഭേദമില്ല. അതു പിന്നെ ദോഃഖണ്ഡത്തിന്റെ അർദ്ധമായിട്ടിരിക്കും. അവിടെ ആദ്യഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ദോഃഖണ്ഡം തന്നെ, അന്ത്യഹാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ദോഃഖണ്ഡാർദ്ധം. കർണ്ണവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്ന പക്ഷത്തിങ്കൽ അന്തരം ദോഃഖണ്ഡത്തിന്റെ നാലൊന്നു്. ദോഃഖണ്ഡം ചെറുതാകുമ്പോൾ ഈ ചതുരംശത്തെ ഉപേക്ഷിക്കാം. ആകയാൽ ഒരു കർണ്ണവർഗ്ഗത്തെ ഹാരകമായിട്ടു കൊള്ളേണമെന്നേ ഉള്ളൂ.

$$[\text{പരിധ്യഷ്ടാംശം} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1^{\,2}} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2^{\,2}} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1^{\,2}}\right) +$$

$$\cdots\cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}^2} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1^{\,2}} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2^{\,2}} + \cdots\cdots + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1^{\,2}} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2^{\,2}} + \cdots\cdots + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}\right)$$

ഇവിടെ രണ്ടു ഫലയോഗാർദ്ധങ്ങളുള്ളതിൽ,

$$\text{പ്രഥമഫലയോഗം} = \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}^2} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1^{\,2}} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2^{\,2}} + \cdots\cdots + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}$$

$$\text{ദ്വിതീയഫലയോഗം} = \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1^{\,2}} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2^{\,2}} + \cdots\cdots + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2} + \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}.$$

$$\text{ഇവയുടെ അന്തരം} = \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}^2} - \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}$$

$$= \frac{ഖ \times വ^2}{വ^2} - \frac{ഖ \times വ^2}{2വ^2} \quad (ഠച^2 = ഠകി^2 + കിച^2 = 2വ^2, \text{ എന്നിട്ട്})$$

$$= ഖ - \frac{ഖ}{[illegible]} = \frac{ഖ}{[illegible]}$$

ഇവറ്റുടെ അന്തരാള്ഗം $= \frac{ഖ}{[illegible]}$

ഖ അതിച്ചെറുതാകയാൽ $\frac{ഖ}{4}$ ശൂന്യപ്രായമെന്നു കല്പിക്കാം.

$$\therefore \tfrac{1}{2}\left(\frac{ഖ \times വ^2}{വ^2} + \frac{ഖ \times വ^2}{ക_1^{\,2}} + \cdots\cdots + \frac{ഖ \times വ^2}{ഠച^2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{ഖ \times വ^2}{ക_1^{\,2}} + \frac{ഖ \times വ^2}{ക_2^{\,2}} + \cdots\cdots + \frac{ഖ \times വ^2}{ഠച^2}\right)$$

അതുകൊണ്ട് ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലുമൊന്നിൻെറ ഇരട്ടിയെ പരിധ്യഷ്ടാംശമെന്നു പറയാമെന്നു വന്നു.

$$\therefore \text{പരിധ്യഷ്ടാംശം} = \frac{ഖ \times വ^2}{ക_1^{\,2}} + \frac{ഖ \times വ^2}{ക_2^{\,2}} + \frac{ഖ \times വ^2}{ക_3^{\,2}} + \cdots\cdots + \frac{ഖ \times വ^2}{ഠച^2}]$$

അവിടെ ദോഃഖണ്ഡത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ളതിൽ വലിയ കർണ്ണവർഗ്ഗത്തെ ഹാരകമായിട്ട് ഇവിടെ നിരൂപിക്കുന്നു. എന്നിട്ടു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ട് അതതു ദോഃഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ച് അതിൻെറ വലിയ കർണ്ണത്തിൻെറ വർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങൾ അതതു കർണ്ണാന്തരാളത്തിങ്കലെ പരിധ്യംശത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാക്കൾ. ഇവിടെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ട് അതതു ദോഃഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ച് അതതു കർണ്ണവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ അതതു ദോഃഖണ്ഡത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷം അതതു കർണ്ണാന്തരാളപരിധ്യംശജ്യാവായിട്ടുതന്നെ ഇരിക്കും. അവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന് അതത് ഇഷ്ടകർണ്ണാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ദോഃഖണ്ഡയോഗത്തിൻെറ വർഗ്ഗം ഗുണഹാരാന്തരമാകുന്നത്. വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഗുണകാരമാകുന്നത്. അവിടെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഗുണകാരംകൊണ്ടുതന്നെ ഹരിക്കുന്നു എങ്കിൽ ഗുണകാരം ഹാരകത്തേക്കാൾ ചെറുതാകയാൽ ഫലം ഏറയുണ്ടാകും. അവിടെ ഫലത്തെ രണ്ടേടത്തുവെച്ച് ഒന്നിനെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ മറേറതിങ്കന്നു കളയേണം. അതു വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലമാകുന്നത്. അവിടെ ശോദ്ധ്യഫലമുണ്ടാക്കുന്നേടത്തും പിന്നെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഗുണകാരംകൊണ്ടു തന്നെ ഹരിക്കുന്നു എങ്കിൽ അപ്പഫലത്തിങ്കന്നും കട്ടുകളയേണം മുമ്പിലെപ്പോലെ ഉണ്ടാക്കീട്ട്, എന്നു വരും. അവിടെ ആ രണ്ടാമതു ശോദ്ധ്യഫലമുണ്ടാ

ക്കിയതിനേയും ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ശോദ്ധ്യഫലത്തിങ്കന്നു ശോദ്ധ്യമായി മൂന്നാമത്തു് ഒരു ഫലമുണ്ടാകും. ഇവിടേയും ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിക്കിൽ അതിന്നു നാലാമത്തു് ഒരു ശോദ്ധ്യഫലമുണ്ടാക്കേണം. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരംകൊണ്ടു് എല്ലാറ്റേയും ഹരിക്കിൽ ശോദ്ധ്യപരമ്പര ഒടുങ്ങുകയില്ല, ഒടുക്കത്തെ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിപ്പോളവും. ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിക്കാഞ്ഞിൽ ഫലപരമ്പര ഒടുങ്ങുകയില്ല. പെരികെ ചെറുതായാൽ ഉപേക്ഷിക്കാമെന്നേ ഉള്ളൂ.

ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കിയാൽ നടേത്തെ ഗുണ്യയോഗം. അതു ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗമാകുന്ന വ്യാസാർദ്ധം. പിന്നെ രണ്ടാമത്തു് ഇതിങ്കന്നും കളയേണ്ടും ഫലം. രണ്ടാമതിങ്കന്നു കളയേണ്ടുവതു മൂന്നാമത്തു്. ഇങ്ങനെ ആകുമ്പോൾ ഓജങ്ങൾ ഒക്ക തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ, യുഗ്മങ്ങൾ തങ്ങളിലും കൂട്ടൂ. പിന്നെ ഓജയോഗത്തിങ്കന്നു യുഗ്മയോഗം കളയൂ. ശേഷം പരിധ്യഷ്ടാംശം. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരം ചെറുതാകയാൽ. ഇവിടെ യാതൊരിടത്തു പിന്നെ ഗുണകാരം വലിയതു് അവിടെ ഗുണ്യത്തിൽ കൂട്ടുകേവേണ്ടൂ ഫലങ്ങൾ എല്ലാം.

ഇവിടെ പിന്നെ കോടികർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങൾ ഗുണഹാരങ്ങളാകയാൽ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങൾ ഗുണഹാരാന്തരങ്ങളാകുന്നവ. അവിടെ പിന്നെ സമമായി പകുത്തിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങളിൽ ഒന്നു നടേത്തെ ഭുജയാകുന്നതു്. രണ്ടു ഖണ്ഡംകൂടിയതു രണ്ടാംഭുജാ. മൂന്നു ഖണ്ഡംകൂടിയതു മൂന്നാംഭുജാ. ഇങ്ങനെ ക്രമേണ ഏകാദ്ധ്യേകോത്തരഖണ്ഡരൂപങ്ങളായിട്ടു് ഇരിക്കും ആ ഭുജകൾ. അവറ്റെ പിന്നെ അണുപരിമാണമായിട്ടു കല്പിക്കേണ്ടൂ, ഫലത്തിന്റെ സൂക്ഷ്മതക്കായിക്കൊണ്ടു്. പിന്നെ ഇവറ്റെ രൂപങ്ങളെന്നും കല്പിച്ചു് ഒന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേറിയ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണ്യമാകുന്ന ബാഹുഖണ്ഡം അണുപരിമിതമായി രൂപമായി കല്പിച്ചിരിക്കുന്നതിനെ ഗുണിച്ചു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലമാദ്യഫലയോഗം. പിന്നെ ദ്വിതീയഫലയോഗത്തിന്നു പ്രഥമഫലം ഗുണ്യമാകയാൽ ഗുണ്യങ്ങൾ നാനാഭൂതങ്ങൾ, ഗുണഹാരാന്തരം ഇഷ്ടമാകുന്ന ഭുജാവർഗ്ഗവും നാനാരൂപങ്ങൾ; ആകയാൽ ഗുണഹാരാന്തരയോഗംകൊണ്ടു ഗുണിപ്പാൻ ഉപായമില്ല. എന്നിട്ടു ഗുണഹാരാന്തരയോഗമായിരിക്കുന്ന ഭുജാവർഗ്ഗസംകലിതത്തെക്കൊണ്ടു രൂപമാകുന്ന നടേത്തെ ഗുണ്യത്തെ രണ്ടു വട്ടം ഗുണിച്ചു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു രണ്ടു വട്ടം

ഹരിപ്പൂ. ഫലം ദ്വിതീയഫലയോഗം. ഇവിടെ ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങളുടെ വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗങ്ങളുടെ സംകലിതം ഗുണകാരം വ്യാസാൎദ്ധവൎഗ്ഗവൎഗ്ഗം ഹാരകം എന്നിരിക്കും. സംകലിതത്തിന്നു വ്യാസാൎദ്ധം പദമാകുന്നതു് ഇവിടെ. പിന്നെ മൂന്നാംഫലയോഗവും ഇവ്വണ്ണംതന്നെ ആദ്യഗുണ്യത്തിങ്കന്നു തന്നെ ഉണ്ടാക്കൂ. അവിടെ ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങളുടെ സമഷഡ്ഘാതസംകലിതം ഗുണകാരം, വ്യാസാൎദ്ധസമഷഡ്ഘാതം ഹാരകം. ഇങ്ങനെ മീത്തെമീത്തെ സമയുഗ്ഘാതം ഹാരകം, അതിന്റെ സംകലിതം ഗുണകാരമായിട്ടുമിരിക്കും. അവിടെ സമത്രിഘാതത്തിങ്കന്നു വൎഗ്ഗസംകലിതം, സമപഞ്ചഘാതത്തിങ്കന്നു വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗസംകലിതം, സമസപ്തഘാതത്തിങ്കന്നു സമഷഡ്ഘാതസംകലിതം ഉണ്ടാകുന്നു. അവിടെ ഗുണകാരമാകുന്ന സമത്രിഘാതത്തെ ഹാരകമാകുന്ന സമദ്വിഘാതത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം വ്യാസാൎദ്ധം തന്നെ. ഇവ്വണ്ണംതന്നെ എല്ലാടവും അതതു ഹാരകത്തെക്കൊണ്ടു് അതതു ഗുണകാരത്തെ ഹരിച്ചാൽ ഫലം വ്യാസാൎദ്ധംതന്നെ ആയിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ സമത്രിഘാതത്തെ മൂന്നിൽ ഹരിക്കേണ്ടുകയാൽ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചുകൊള്ളൂ വ്യാസാൎദ്ധത്തെ. എന്നാൽ വ്യാസാൎദ്ധവൎഗ്ഗസംകലിതത്തെ വ്യാസാൎദ്ധവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ വ്യാസാൎദ്ധത്തെ അഞ്ചിൽ ഹരിച്ചതു സമചതുൎഘാതസംകലിതത്തെ സമചതുൎഘാതംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ വ്യാസാൎദ്ധത്തിങ്കന്നു ത്രിശരാദി വിഷമസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം ഇച്ചൊല്ലിയ ഫലപരമ്പരയിൽ മേലേതു മേലേതായിട്ടിരിക്കും. എന്നിട്ടുചൊല്ലീ—ത്രിശരാദിവിഷമസംഖ്യാഭക്തമൃണം സ്വം പൃഥക്ക്രമാൽ കുൎയ്യാൽ—എന്നു്. അവിടെ ഫലപരമ്പരയിൽ കീഴേതിങ്കന്നു കീഴേതിങ്കന്നു കളയേണ്ടുന്നേടത്തു് രാശികളുടെ യോഗത്തെ ഗുണ്യയോഗത്തിങ്കന്നു കളയൂ, യുഗ്മയോഗത്തെ കൂട്ടൂ, എന്നാകിലുമാം. എന്നിട്ടു ഋണം സ്വം പൃഥക്ക്രമാൽ കുൎയ്യാൽ എന്നു ചൊല്ലീ.

$$\text{പരിധ്യഷ്ടാംശം} = \frac{ഖ \times വ^2}{ക_1^2} + \frac{ഖ \times വ^2}{ക_2^2} + \frac{ഖ \times വ^2}{ക_3^2} + \cdots\cdots + \frac{ഖ \times വ^2}{ദവ^2}.$$

ഇവിടെ ആദ്യഫലത്തിൽ ഗുണ്യം ഖ, ഗുണകാരം $വ^2$, ഹാരകം $ക_1^2$.

ഹാരകത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഗുണകാരംകൊണ്ടുതന്നെ ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഹാരകം ഗുണകാരത്തെക്കാൾ ഏറുകകൊണ്ടു ഫലവും ഏറിപ്പോകും. ഇവിടെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു് ഏറിപ്പോയ അംശം. ഇതു് ഒരു ശോധ്യഫലമാകുന്നതു്. ഈ ശോധ്യഫലം

വരുത്തുന്നേടത്തും ഗുണകാരംകൊണ്ടുതന്നെ ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആദ്യശോധ്യഫലത്തിങ്കന്നും കളയേണ്ടുന്ന ഒരു ശോധ്യഫലമുണ്ടാക്കി സംസ്കരിക്കേണം. ആദ്യശോധ്യഫലത്തെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു രണ്ടാംശോധ്യഫലം. ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെയുള്ള ശോധ്യഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തും ഗുണകാരംകൊണ്ടു തന്നെ ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ ശോധ്യഫലപരമ്പര കെട്ടുകയില്ല. ശോധ്യഫലം അത്യന്തം ചെറുതായാൽ ഉപേക്ഷിക്കാമെന്നേയുള്ളൂ

$$\frac{ഖ \times വ^2}{ക_1^2}.$$

ഇവിടെ ഗുണഹാരാന്തരം $= ക_1^2 - വ^2 =$ കർണ്ണവർഗ്ഗം $-$ കോടിവർഗ്ഗം $=$ ഭുജാവർഗ്ഗം $= ഖ^2$.

$$\frac{ഖ \times വ^2}{വ^2} - \frac{ഖ \times ഖ^2}{ക_1^2}$$

$$= ഖ - \frac{ഖ \times ഖ^2}{ക_1^2}$$

$$= \frac{ഖ(ക_1^2 - ഖ^2)}{ക_1^2}$$

$$= \frac{ഖ \times വ^2}{ക_1^2} \text{(= ആദ്യഫലം തന്നെ).}$$

$$\frac{ഖ \times വ^2}{വ^2} - \left(\frac{ഖ \times ഖ^2}{വ^2} - \frac{ഖ^3(ക_1^2 - വ^2)}{വ^2 \times ക_1^2}\right)$$

$$= ഖ - \left(\frac{ഖ^3}{വ^2} - \frac{ഖ^3 . ഖ^2}{വ^2 . ക_1^2}\right)$$

$$= ഖ - ഖ^3 \left(\frac{ക_1^2 - ഖ^2}{വ^2 . ക_1^2}\right).$$

$$= ഖ - \frac{ഖ^3 . വ^2}{വ^2 ക_1^2}.$$

$$= ഖ - \frac{ഖ \;\; ഖ^2}{ക_1^2}$$

$$= \frac{ഖ \times വ^2}{ക_1^2} \text{(ആദ്യഫലം തന്നെ).}$$

അപ്പോൾ എല്ലാ ഫലങ്ങളേയും ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ,

$$\frac{ഖ \times വ^2}{ക_1^2} = ഖ - \frac{ഖ^3}{വ^2} + \frac{ഖ^5}{വ^4} - \frac{ഖ^7}{വ^6} + \cdots\cdots$$

ഹാരകം ഗുണകാരത്തെക്കാളേറുമ്പോൾ ഓജശോധ്യഫലങ്ങളെ കളയേണം, യുഗ്മശോധ്യഫലങ്ങളെ കൂട്ടേണം. ഹാരകം ഗുണകാരത്തെക്കാൾ കുറയുമ്പോൾ എല്ലാ ശോധ്യഫലങ്ങളേയും കൂട്ടേണം.

$$\therefore \frac{ഖ \times വ^2}{ക_1^2} = ഖ - \frac{ഖ \times ഖ^2}{വ^2} + \frac{ഖ \times ഖ^2 \times ഖ^2}{വ^2 \times വ^2} - \frac{ഖ \times ഖ^2 \times ഖ^2 \times ഖ^2}{വ^2 \times വ^2 \times വ^2} + \cdots\cdots$$

$$\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2{}^2}=\text{ഖ}-\frac{\text{ഖ}\times(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}+\frac{\text{ഖ}\times(2\text{ഖ})^2.(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2.\ \text{വ}^2}-\frac{\text{ഖ}\times(2\text{ഖ})^2.(2\text{ഖ})^2.(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2.\ \text{വ}^2.\ \text{വ}^2}+\cdots\cdots$$

$$\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_3{}^2}=\text{ഖ}-\frac{\text{ഖ}\times(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}+\frac{\text{ഖ}\times(3\text{ഖ})^2.(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2\times\text{വ}^2}-\frac{\text{ഖ}\times(3\text{ഖ})^2\times(3\text{ഖ})^2.(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2.\ \text{വ}^2.\ \text{വ}^2}+\cdots\cdots$$

....

....

$$\therefore \text{ പരിധ്യഷ്ടാംശം}=\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1{}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2{}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_3{}^2}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\left(\text{ഖ}-\text{ഖ}.\frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2}+\text{ഖ}.\frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2}.\frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2}-\text{ഖ}.\frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2}.\frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2}.\frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$+\left(\text{ഖ}-\text{ഖ}.\frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}+\text{ഖ}.\frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}.\frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}-\text{ഖ}.\frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}.\frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}.\frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$+\left(\text{ഖ}-\text{ഖ}\frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}+\text{ഖ}.\frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}.\frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}-\text{ഖ}.\frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}.\frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}.\frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ഇവ ഫലയോഗങ്ങളിൽ ആദ്യത്തെ ഫലയോഗം

= എല്ലാ ഖണ്ഡങ്ങളുടേയും യോഗം

= ചതുരശ്രബാഹു

= വ്യാസാർദ്ധം = വ.

ഇവ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളെ അണുപരിമാണങ്ങളെന്നും രൂപങ്ങളെന്നും കല്പിക്കുക.

അപ്പോൾ ദ്വിതീയഫലയോഗം $=\frac{1}{\text{വ}^2}(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots)$

$=\frac{1}{\text{വ}^2}\times$ ഗുണഹാരാന്തരയോഗം.

തൃതീയഫലയോഗത്തിൽ, $\text{ഖ}.\frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2}$, $\text{ഖ}.\frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}$, $\text{ഖ}\ \frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}$ ....എന്നുള്ള ഗുണ്യങ്ങൾ നാനാരൂപങ്ങൾ; $\frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2}$, $\frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}$, $\frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}$..........എന്നുള്ള ഗുണകാരങ്ങളും നാനാരൂപങ്ങൾ. അപ്പോൾ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ട ഗുണിപ്പാൻ ഉപായമില്ല. എന്നിട്ട് ആദ്യത്തെ ഗുണ്യമായ ഒരു ഭുജാഖണ്ഡത്തെത്തന്നെ ഗുണ്യമായി കല്പിക്ക. അപ്പോൾ,

തൃതീയഫലയോഗം $=\frac{1}{\text{വ}^4}(1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots\cdots)$

ചതുർത്ഥഫലയോഗം $=\frac{1}{\text{വ}^6}(1^6+2^6+3^6+\cdots\cdots)$

....

....

$$\therefore \text{പരിധ്യഷ്ടാംശം} = \text{വ} - \frac{1}{\text{വ}^2}(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots) + \frac{1}{\text{വ}^4}(1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots)$$

$$-\frac{1}{\text{വ}^6}(1^6+2^6+3^6+\ldots\ldots)+\ldots\ \ldots\ldots$$

ഇവിടെ $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots$ = ഏകാദ്യേകോത്തരവൎഗ്ഗസംകലിതം.

$1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots\ldots$ = ഏകാദ്യേകോത്തരവൎഗ്ഗവൎഗ്ഗസംകലിതം.

$1^6+2^6+2^6+\ldots\ldots\ldots$ = ഏകാദ്യേകോത്തരസമഷഡ്ഘാതസംകലിതം.

....

....

ഇവയുടെ ഇടയ്ക്കും ഘനസംകലിതം, സമപഞ്ചഘാതസംകലിതം എന്നെല്ലാമുണ്ട്. ഈ സംകലിതങ്ങൾക്കെല്ലാററിന്നും ഇവിടെ പദം വ്യാസാൎദ്ധംതന്നെ.

(പദം എന്നതിന്ന് ഇവിടെ ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങളിൽ ഒടുക്കത്തെ സംഖ്യ എന്നൎത്ഥം).

അതുകൊണ്ടു $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots = \frac{\text{വ}^3}{3}$.

$$1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots\ldots = \frac{\text{വ}^5}{5}.$$

$$1^6+2^6+3^6+\ldots\ldots\ldots = \frac{\text{വ}^7}{7}.$$

....

....

$$\therefore \text{പരിധ്യഷ്ടാംശം} = \text{വ} - \frac{\text{വ}^3}{3}\cdot\frac{1}{\text{വ}^2} + \frac{\text{വ}^5}{5}\cdot\frac{1}{\text{വ}^4} - \frac{\text{വ}^7}{7}\cdot\frac{1}{\text{വ}^6} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \text{വ} - \frac{\text{വ}}{3} + \frac{\text{വ}}{5} - \frac{\text{വ}}{7} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \text{പരിധി} = 8\text{വ} - \frac{8\text{വ}}{3} + \frac{8\text{വ}}{5} - \frac{8\text{വ}}{7} + \ldots\ldots$$

$$= 4\text{വ്യാ} - \frac{4\text{വ്യാ}}{3} + \frac{4\text{വ്യാ}}{5} - \frac{4\text{വ്യാ}}{7} + \ldots\ldots$$

(ഇവിടെ വ്യാ = വ്യാസം; വ = വ്യാസാൎദ്ധം)

"വ്യാസേ വാരിധിനിഹതേ
    രൂപഹൃതേ വ്യാസസാഗരാഭിഹതേ:
ത്രിശരാദിവിഷമസംഖ്യാഭക്ത-
    മൃണം സ്വം പൃഥക് ക്രമാൽ കുൎയ്യാൽ"॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)]

അനന്തരം സമഘാതസംകലിതാനയനോപായത്തെ ഇവിടെക്ക് ഉപകാരിയായിട്ടു കാട്ടേണ്ടുകയാൽ മൂലവൎഗ്ഗാദ്യേകശേഷസംകലിതത്തെയും കാട്ടുന്നു. പ്രസംഗാൽ ഉത്തരോത്തരസംകലിതൈക്യാനയനോപായത്തെയും ക്രമേണ കാട്ടുന്നു. ഇവിടെ ഭിന്നഗ്രഹവൎഗ്ഗം ഗുണകം

രം, അതതു കർണ്ണരേഖാവർഗ്ഗം ഹാരകം. ആകയാൽ അതതു കർണ്ണാഗ്രത്തോടു ദിഗ്രേഖാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രബാഹുഭാഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗം ഗുണഹാരാന്തരം. പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണാഗ്രത്തിങ്കന്ന് അതിനടുത്ത ചെറിയ കർണ്ണാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡം ഗുണ്യമാകുന്നതു്. ഈ രണ്ടു കർണ്ണാന്തരാളത്തിങ്കലെ പരിധ്യംശത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാവു് ഇഷ്ടഫലം. ഇങ്ങനെ എല്ലാ ഫലവും വരുന്നു. അവിടെ ഗുണ്യങ്ങളെല്ലാം തുല്യം, കർണ്ണരേഖാഗ്രാന്തരം തുല്യമാകയാൽ. ഇങ്ങനെ ഫലങ്ങളുണ്ടാക്കി ഫലായോഗം ചെയ്താൽ ദിക്സൂത്രത്തോടു ചതുരശ്രകോണിങ്കലെ കർണ്ണരേഖയോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ പരിധിഭാഗം വരും. ഇവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിന്നടുത്തുള്ള കർണ്ണത്തിന്നു ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങളിലൊന്നു ഭുജയാകുന്നതു്. രണ്ടാംകർണ്ണത്തിന്നു ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളിൽ രണ്ടു കൂടിയതു ഭുജയാകുന്നതു്. ഇങ്ങനെ ഓരോരോ ഭുജാഖണ്ഡം ഏറിയതു പിന്നെ പിന്നത്തെ കർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജയാകുന്നതു്. എന്നാലൊന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേറി ഇരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗങ്ങൾ ഭുജകളാകുന്നതു്. എന്നാലിവററിന്റെ വർഗ്ഗയോഗങ്ങൾ ഗുണഹാരാന്തരങ്ങളുടെ യോഗമാകുന്നതു്. ഗുണ്യമെല്ലാമൊന്നാകയാൽ അതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണഹാരാന്തരയോഗത്തെ ഗുണിച്ചു ഹാരകമൊന്നെങ്കിൽ അതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലയോഗം വരും. ഇവിടെ ഹാരകമൊന്നെ എന്നു കല്പിപ്പൂ. അതു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംതന്നെ താനും എന്നു കല്പിച്ചിട്ടു ക്രിയ ചെയ്യുന്നു. ഇവിടെ ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കിയ ഫലവും ഗുണഹാരാന്തരവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിച്ചിരിക്കുമ്പോൾ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തോടൊക്കും ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം. ഇതു ശേഷിയാതെ കൂട്ടിപ്പോയി എങ്കിൽ ആ ഫലവും ഗുണഹാരാന്തരവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തെ ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തിങ്കന്നു കളയേണം. എന്നാലും ഫലമൊക്കും. ഇ കളയേണ്ടും ഫലം ഉണ്ടാക്കുമ്പോഴും ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ എങ്കിൽ ഒട്ടേറീട്ടിരിക്കും. എന്നാലതിങ്കന്നുമുണ്ടാക്കേണമൊരു ശോദ്ധ്യഫലം. പിന്നേയുമിവണ്ണമാകിൽ പിന്നെ പിന്നെ ഫലത്തിങ്കന്നും കുറഞ്ഞൊന്നു കുറഞ്ഞൊന്നു കളയേണ്ടി വരും. ആകയാൽ ഒടുക്കത്തിന്നു തുടങ്ങി ഇവ ഒക്ക കളഞ്ഞു കൂട്ടുമ്പോൾ ഫലമൊക്കും. ഇവിടെ ഹാര്യത്തിങ്കൽ സംഖ്യ നൂറു് എന്നു കല്പിപ്പൂ. ഹാരകം പത്തു്, ഗുണകാരം

എട്ട്. ഇതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിട്ടു നൂറ് ഉണ്ടായി എന്നും കല്പിപ്പൂ. ഇവിടെ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം പത്ത് ഉണ്ടാകും. ഇവിടെ പത്തു സംഖ്യയാകുന്ന ഹാരകം ഹാര്യത്തിങ്കൽനിന്ന് ഒരിക്കൽ കളയേണ്ടി ഇരിക്കുന്നേടത്ത് എട്ടുകളയുമ്പോൾ ഗുണഹാരാന്തരമാകുന്ന രണ്ടു ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിക്കും. പിന്നെയുമെത്ര ആവൃത്തി കളഞ്ഞൂ അത്ര ഗുണഹാരാന്തരം ശേഷിക്കും ഹാര്യത്തിങ്കൽ. എന്നാൽ ഫലവും ഗുണഹാരാന്തരവുമുള്ള ഘാതത്തെ ഹാര്യത്തിങ്കൽ കളഞ്ഞ ശേഷത്തെ ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഈ ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തോടു തുല്യമായിരിക്കും. ഇവിടെ അതിനെയുംകൂടെ ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഫലം പന്ത്രണ്ടര. ഈ ഫലത്തെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഇരുപത്തഞ്ച്. ഇതിനെ ഹാരകമാകുന്ന പത്തുകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം രണ്ടര. ഇതിനെ മുമ്പിലെ പന്ത്രണ്ടരയിൽനിന്നു കളയുമ്പോൾ ശേഷം ഫലം പത്തുതന്നെ. ഇവിടെ ഇരുപത്തിഅഞ്ചിനെയും എട്ടിൽ ഹരിക്കിൽ അഷ്ടാംശംകൂടിയ മൂന്നു ഫലം. ഇതു ശോദ്ധ്യം. വാസ്തവത്തിങ്കന്ന് ഏറും. എന്നാൽ ഈ ഫലത്തെയും ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം അഷ്ടാംശത്തോടുകൂടിയ അര. ഇതിനെ രണ്ടാംഫലത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ രണ്ടര. അപ്പോൾ അതു നടേത്തെ ഫലത്തിങ്കന്നു കളവാൻ മതി. ഇങ്ങനെ അതതു ഫലത്തെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം അതിനടുത്തു മുമ്പിലെ ഫലത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ അപ്പലം സൂക്ഷ്മമാകും. എന്നാൽ അത് അതിന്നു കീഴെ ഫലത്തിങ്കന്നു ശോധിക്കാം. പിന്നെ അത് അതിങ്കന്നു കീഴേതിങ്കന്ന്, ഇങ്ങനെ. എന്നാൽ നടേത്തെ ഫലം വാസ്തവത്തോട് ഒക്കും.

[ശോദ്ധ്യഫലത്തെ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തെ യുക്തി പറയുന്നു.

ഹാര്യം = 100.
ഗുണകാരം = 8
ഹാരകം = 10.
∴ ഗുണഹാരാന്തരം = 2.

പത്ത് ഒരാവൃത്തി 100ൽനിന്നും കളഞ്ഞാൽ ശേഷം 90; എട്ട് ഒരാവൃത്തി കളഞ്ഞാൽ ശേഷം 92. അപ്പോൾ ഓരോ ആവൃത്തി കളയുമ്പോൾ, ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിക്കുന്ന 92, ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിക്കുന്ന 90നെക്കാൾ രണ്ടുകൊണ്ട് ഏറും. ഈ രണ്ടു ഗുണഹാരാന്തരമാകുന്നത്.

പത്തിനെ പത്ത് ആവൃത്തി നൂറിൽനിന്നും കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ശൂന്യം. അപ്പോൾ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലം $=10$. ഗുണകാരത്തിനെ പത്താവൃത്തി ഹാര്യത്തിങ്കൽനിന്നു കളയുമ്പോൾ, ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിക്കുന്നത്, $=2\times10=$ വാസ്തവഫലം $\times$ ഗുണഹാരാന്തരം.

“ഇവിടെ ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കിയ ഫലവും ഗുണഹാരാന്തരവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിക്കുമ്പോൾ, ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തോടൊക്കും ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം.”

ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ ശേഷത്തെ ഹാര്യത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു ശേഷത്തെ ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലം വരും.

ഗുണഹാരാന്തരം $\times$ വാസ്തവഫലം $=2\times10=20$.

$$\frac{100-20}{8}=\frac{80}{8}=10.$$

$$\frac{100}{10}\quad=10.$$

ഇങ്ങനെ ഫലങ്ങൾ ഒക്കുന്നു.

ഈ ഇരുപതിനെ ഹാര്യത്തിൽനിന്നും കളയാതെ അതിനേയുംകൂടി ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തിങ്കൽ കൂട്ടിപ്പോയി എങ്കിൽ, ഫലം വാസ്തവത്തിൽനിന്ന് ഏറിയിരിക്കും.

$$\frac{100}{8}=12\tfrac{1}{2}\ (>10)$$

ഈ ഫലത്തെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം മുമ്പിലെ ഫലത്തിൽനിന്നും വാങ്ങിയാൽ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലം വരും.

$$\text{അതായതു വാസ്തഫലം}=12\tfrac{1}{2}-\frac{12\frac{1}{2}\times2}{10}=10$$

$$=12\tfrac{1}{2}-\frac{\frac{12\frac{1}{2}\times2\times8}{10}}{8}$$

$$=\frac{100-20}{8}$$

$$\text{അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ശോധ്യഫലം}=\frac{12\frac{1}{2}\times2}{10}=2\tfrac{1}{2}.$$

ഈ ശോധ്യഫലത്തെ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തും ഗുണകാരത്തെക്കൊണ്ടുതന്നെ ഹരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, ശോധ്യഫലം വാസ്തവത്തിൽനിന്ന് ഏറിയിരിക്കും അപ്പോൾ ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ദ്വിതീയശോധ്യഫലത്തെ ഉണ്ടാക്കി ആദ്യശോധ്യഫലത്തിങ്കന്നു കളയേണം. എന്നാൽ ഫലമൊക്കും.

ആദ്യത്തെ ശോദ്ധ്യഫലം $=\frac{25}{10}$

25നെ എട്ടിൽ ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ, $=\frac{25}{8}=3\frac{1}{8}\ (>2\frac{1}{2})$.

അപ്പോൾ ഇതിനെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം രണ്ടാംശോദ്ധ്യഫലം.

$$\frac{25}{8}\times\frac{2}{10}=\frac{5}{8}$$

ഇതിനെ $3\frac{1}{8}$ൽ നിന്നു കളയുമ്പോൾ ശേഷം $=3\frac{1}{8}-\frac{5}{8}=2\frac{1}{2}$.

$12\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}=10$ (=വാസ്തവഫലം).

ഇപ്രകാരംതന്നെ,

$$\text{വാസ്തവഫലം}=12\tfrac{1}{2}-12\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{8}+12\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{8}\cdot\tfrac{2}{8}-12\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{8}\cdot\tfrac{2}{8}\cdot\tfrac{2}{10}$$
$$=12\tfrac{1}{2}-3\tfrac{1}{8}+\tfrac{25}{32}-\tfrac{5}{32}=10.$$

സാമാന്യേന,

$$\text{ഫലം}=\frac{\text{ഹാര്യം}}{\text{ഹാരകം}}=\text{ഗുണ്യം}-\text{ഗുണ്യം}\times\frac{\text{ഗുണഹാരാന്തരം}}{\text{ഗുണകാരം}}+\text{ഗുണ്യം}\times\frac{\text{ഗുണഹാരാന്തരവർഗ്ഗം}}{\text{ഗുണകാരവർഗ്ഗം}}-\text{ഗുണ്യം}\times\frac{\text{ഗുണഹാരാന്തരഘനം}}{\text{ഗുണകാരഘനം}}+\ldots\ldots$$

ഹാരകംകൊണ്ടു് ഒരിക്കലും ഹരിക്കായ്കിൽ ഇങ്ങനെത്തെ ഒരു ഒടുങ്ങാത്ത ഫലപരമ്പര വരും.

ഹാരകം ഗുണകാരത്തെക്കാൾ ചെറുതെങ്കിൽ, ഈ ന്യായംകൊണ്ടു തന്നെ,

$$\text{ഫലം}=\text{ഗുണ്യം}+\text{ഗുണ്യം}\times\frac{\text{ഗുണഹാരാന്തരം}}{\text{ഗുണകാരം}}+\text{ഗുണ്യം}\times\frac{\text{ഗുണഹാരാന്തരവർഗ്ഗം}}{\text{ഗുണകാരവർഗ്ഗം}}+\text{ഗുണ്യം}\times\frac{\text{ഗുണഹാരാന്തരഘനം}}{\text{ഗുണകാരഘനം}}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$ എന്നു വരും.]

ഇവിടെ പിന്നെ അതതു ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങൾ അതതു ഭുജാഖണ്ഡത്തിനു ഗുണഹാരാന്തരമാകയാൽ അതതിങ്കന്നു് ഉണ്ടായ ഫലത്തെ പിന്നെയും അതതു ഭുജാവർഗ്ഗം തന്നെക്കൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ടൂ. അതിനു ഫലം വേറെ ഇല്ലായ്കയാൽ, നടേത്തെ ഗുണ്യമാകുന്ന ഭുജാഖണ്ഡത്തിങ്കന്നുതന്നെ ഉണ്ടാക്കൂ രണ്ടാംഫലം. അതിന്നു്, രണ്ടു ഫലത്തിന്നും ഭുജാവർഗ്ഗം ഗുണകാരമാകയാൽ, ഭുജാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു രണ്ടുവട്ടം ഗുണിപ്പൂ ഭുജാഖണ്ഡമാകുന്ന ഗുണ്യത്തെപ്പിന്നെ. നടേത്തെ ഫലത്തിന്റെ ഹാരകം വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം. അതിന്റെയും വർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. എന്നാലുണ്ടാം രണ്ടാംഫലം. ഇവിടെ ഗുണ്യങ്ങൾ ഇ

ല്യങ്ങളാകയാൽ ഗുണകാരയോഗത്തെ ഗുണിക്കാം. ഇവിടെ ഗുണകാരങ്ങളാകുന്നതു പിന്നെ ഒന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേറ കൂട്ടിയിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളുടെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗങ്ങൾ. അവററിന്റെ യോഗം ഗുണഹാരാന്തരയോഗ*മാകുന്നതു്. ഈ യോഗത്തിന്നു് ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതമെന്നു പേർ. ഇവിടെ ഹാരകമാകുന്നതു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗവർഗ്ഗം. പിന്നെ ഇവിടെ നടേത്തെ ഫലം ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തു തുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാഭാഗങ്ങൾ രണ്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഗുണകാരം, വ്യാസാർദ്ധം രണ്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഹാരകം. പിന്നെ മൂന്നാംഫലത്തിന്നു സമങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാഭാഗങ്ങൾ നാലു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഗുണകാരം, വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ നാലു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഹാരകം. പിന്നെ മൂന്നാംഫലത്തിന്നു സമങ്ങളായിരിക്കുന്ന ആറു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഗുണകാരവും ഹാരകവും ആകുന്നതു്. ഇങ്ങനെ നാലാമതിന്നു സമങ്ങൾ എട്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഗുണഹാരങ്ങളാകുന്നതു്. ഗുണ്യമാകുന്നതു് എല്ലാടവും ഭുജാഖണ്ഡം തന്നെ. ഇവിടെ എല്ലാടവും ഫലയോഗം വരുത്തുവാൻ ഗുണകാരയോഗം ഗുണകാരമാകുന്നതു്. ഇവിടെ നടേത്തെ ഫലയോഗം വരുത്തുന്നേടത്തു ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ചതുരശ്രകോണസൂത്രത്തോളമുള്ള കർണ്ണങ്ങൾക്കു ഭുജകളാകുന്നതു് ഒരു ഭുജാഖണ്ഡം തുടങ്ങി ഓരോരോ ഖണ്ഡം ഏറക്കൂടി ഒടുക്കത്തേതു വ്യാസാർദ്ധത്തോടു തുല്യമായിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രബാഹുഭാഗം ഭുജയാകുന്നതു്. ഇവററിന്റെ വർഗ്ഗയോഗം ഗുണകാരയോഗമാകുന്നതു്. ഇതിന്നു ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗസംകലിതമെന്നു പേർ. ഇങ്ങനെ രണ്ടാംഫലയോഗം വരുത്തുവാൻ ഒരു ഖണ്ഡം തുടങ്ങി ഓരോന്നേറ കൂടിയിരിക്കുന്ന ഭുജകൾ എല്ലായിലും വലുതു വ്യാസാർദ്ധതുല്യമായിരിക്കുന്നവററിന്റെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം ഗുണകാരയോഗമാകുന്നതു്. ഇങ്ങനെ ആറു്,

---

* ഇവിടെ ഗുണഹാരാന്തരയോഗം എന്നതിന്നു ഗുണഹാരാന്തരയോഗസ്ഥാനീയമെന്നെ അർത്ഥമുള്ളൂ. നടേത്തെ ഫലയോഗം വരുത്തിയപ്പോൾ ഗുണ്യമാകുന്ന ഭുജാഖണ്ഡത്തെ ഗുണഹാരാന്തരയോഗംകൊണ്ടു ഗുണിക്കുവാനാണല്ലൊ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതു്. ഇവിടെ വർഗ്ഗസംകലിതമാകുന്ന ഗുണഹാരാന്തരയോഗത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതംകൊണ്ടു ഗുണ്യമാകുന്ന ഭുജാഖണ്ഡത്തെ ഗുണിക്കുവാനാണു് പറയുന്നതു്. അഥവാ, "ഗുണഹാരാന്തരയോഗം" എന്ന പദത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു "ഗുണകാരയോഗം" എന്ന പദത്തെ ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ അർത്ഥം വ്യക്തമാകും. എന്നാൽ ഗ്രന്ഥങ്ങളിലെല്ലാം "ഗുണഹാരാന്തരയോഗം" എന്ന പാഠമാണു് കാണുന്നതു്.

ഏട്ട് എല്ലാം തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചവററിൻെറ സംകലിതം പിന്നെ പിന്നത്തെ ഗുണകാരയോഗമാകുന്നത്.

സംകലിതങ്ങൾ

ഇവിടെ ഈ സംകലിതങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരത്തെ ഇനി ചൊല്ലുന്നത്. അവിടെ നടേ കേവലസംകലിതത്തെ ചൊല്ലുന്നു. പിന്നെ സമങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിൻെറ സംകലിതം. പിന്നെ ഇവിടെ ഉപയോഗമില്ലാശ്ശില്ലും സമങ്ങൾ മൂന്ന്, അഞ്ച് എന്നിവ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചവററിൻെറ സംകലിതവുംകൂടി ചൊല്ലുന്നുണ്ട്, ഉപയോഗമുള്ളവററിൻെറ നടുവേ ഉണ്ടായിരിക്കയാൽ.

മൂലസംകലിതം: ഇവിടെ മൂലസംകലിതത്തിങ്കൽ കടക്കത്തെ ഭുജാ വ്യാസാൎദ്ധത്തോട് ഒക്കും; അതിന്നു കീഴെ ഒരു ഖണ്ഡം കുറയും; അതിന്നു കീഴെ രണ്ടു ഖണ്ഡം കുറയും എന്നിരിക്കുന്നേടത്ത് എല്ലാ ഭുജകളും വ്യാസാൎദ്ധത്തോടു തുല്യങ്ങൾ എന്നിരിക്കുന്നുതാകിൽ ഭുജാസംഖ്യകൊണ്ടുതന്നെ വ്യാസാൎദ്ധത്തെ ഗുണിച്ചാൽ അതതു സംകലിതഫലമാകുന്നത്. ഇവിടെ ഒരു ഭുജ എല്ലെ്യാ വ്യാസാൎദ്ധതുല്യമായിട്ടുള്ളൂ. അതിങ്കന്നു ക്രമേണ ചെറിയ ചെറിയ കൎണ്ണങ്ങളുടെ ഭുജകൾ ഓരോരൊ സംഖ്യ കുറഞ്ഞിരിക്കുന്നു എല്ലൊ. ഇവിടെ വ്യാസാൎദ്ധം എത്ര സംഖ്യ ആയി കല്പിക്കുന്നു, ഭുജകളുടെ ഖണ്ഡസംഖ്യയും അത്രയായി കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ എളുപ്പമുണ്ട് ഓൎപ്പാൻ. എന്നാലിവിടെ ഉപാന്ത്യഭുജയിങ്കൽ സംഖ്യ ഒന്നു കുറയും, അതിൽ ചെറിയതിങ്കൽ വ്യാസാൎദ്ധസംഖ്യയിങ്കന്നു രണ്ടു കുറയും. ഇക്കുറയുന്ന അംശം ഒന്നു തുടങ്ങി ക്രമേണ ഓരോന്നേറി ഏറി ഇരിക്കും, കടക്കത്തെ ഊനാംശം ചേരായിന്നതു വ്യാസാൎദ്ധത്തോടു മിക്കതും ഒക്കും, ഒരു സംഖ്യ കുറയുമെത്രെ. എന്നാൽ കുറയുന്ന അംശം ഒക്ക കൂട്ടിയാലും ഒന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേറി വ്യാസാൎദ്ധമൊടുക്കമായിരിക്കുന്ന സംകലിതത്തോടു സംഖ്യ പ്രായേണ ഒക്കും, ഒരു വ്യാസാൎദ്ധമേ കുറയൂ. എന്നാൽ ഭുജാസംഖ്യയിൽ ഒന്നു കൂടിയതിനെക്കൊണ്ടു വ്യാസാൎദ്ധസംഖ്യേ ഗുണിച്ച് അതിൻെറ അൎദ്ധം ഭുജാസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. ഭുജാസംകലിതമെന്ന് എല്ലാ കൎണ്ണത്തിൻെറയും ഭുജകളൊക്ക കൂടിയത്. പിന്നെ ഖണ്ഡം ചെറുതായോളം ഫലം സൂക്ഷ്മമാകും. എന്നിട്ടു ഭുജാസംഖ്യ ഓരോന്നിനെ അണുവായി പരാൎദ്ധമായു കല്പിച്ചതിനെക്കൊണ്ടും സംകലിതം ചെയ്വൂ. ഇവിടെ പരാൎദ്ധംകൊണ്ട് അംശിക്കുന്നുതാകിൽ പരാൎദ്ധസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഭുജയിൽ പരാൎദ്ധാംശത്താലൊന്നുകൂട്ടി വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണി

ച്ച് അർദ്ധിപ്പൂ. പിന്നെ പരാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂതും ചെയ്യൂ. അതു മിക്കവാറും വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗാർദ്ധമെത്രെ. മുഴുവൻ സംഖ്യയാവാൻ പിന്നെ പരാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ ഖണ്ഡം ചെറുതായോളം ഭുജയിൽ കുറഞ്ഞൊന്ന് അംശമേ കൂട്ടേണ്ടൂ സംകലിതം വരുത്തുവാൻ. എന്നാൽ ഭുജയിൽ ഒന്നും കൂട്ടാതെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അർദ്ധിച്ചതു് അത്യന്തം സൂക്ഷ്മമായി ഖണ്ഡിച്ചിരിക്കുന്ന ഭുജകളുടെ സംകലിതമെന്നു വന്നിരിക്കും. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗാർദ്ധം സൂക്ഷ്മമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡസംകലിതമാകുന്നതു്.

[സംകലിതങ്ങളെ വരുത്തുവാനുള്ള ഉപായത്തെ പറയുന്നു.

മൂലസംകലിതം: വ്യാസാർദ്ധം വ ഇലി എന്നു കല്പിക്ക. ഇതു് ഒടുക്കത്തെ ഭുജം. ഇതിനു കീഴെയുള്ളതു (വ — 1), ഇതിനും കീഴെയുള്ളതു (വ — 2), ഇങ്ങനെ കീഴതിനു കീഴതിന്നു് ഓരോ സംഖ്യ കുറഞ്ഞ ഭുജകൾ.

$$\text{മൂലസംകലിതം} = \text{വ} + (\text{വ} - 1) + (\text{വ} - 2) + \dots\dots\dots + 3 + 2 + 1.$$

ഈ ഭുജകളെല്ലാം വ്യാസാർദ്ധത്തിനോടു തുല്യമായിരുന്നുവെങ്കിൽ,

$$\text{അവയുടെ സംകലിതം} = \text{വ} + \text{വ} + \text{വ} + \dots\dots + \text{വ} + \text{വ} + \text{വ} = \text{വ} \times \text{വ} = \text{വ}^2.$$

$$\text{ഇവ തമ്മിലുള്ള അന്തരം} = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots\dots + (\text{വ} - 3) + (\text{വ} - 2) + (\text{വ} - 1).$$

$$= \text{മൂലസംകലിതം} - \text{വ}.$$

$$\therefore \text{വ}^2 - \text{മൂലസംകലിതം} = \text{മൂലസംകലിതം} - \text{വ}$$

$$2 \times \text{മൂലസംകലിതം} = \text{വ}^2 + \text{വ}.$$

$$= \text{വ}(\text{വ} + 1).$$

$$\therefore \text{മൂലസംകലിതം} = \frac{\text{വ}(\text{വ}+1)}{2}$$

വ്യാസാർദ്ധത്തെ വ്യാസാർദ്ധസംഖ്യയിലൊന്നു കൂട്ടിയതുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അർദ്ധിച്ചാൽ വ്യാസാർദ്ധം പദമായിട്ടിരിക്കുന്ന മൂലസംകലിതം വരും.

പിന്നെ ഒരു ഇലിയെ പരാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു് ഒരു ഭുജാഖണ്ഡമെന്നു കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളുടെ സംഖ്യ = പ × വ (പരാർദ്ധത്തെ പ എന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു). പദം വ്യാസാർദ്ധം തന്നെ.

$$\text{മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ടു്, മൂലസംകലിതം} = \frac{\text{വ}(\text{വ} \times \text{പ} + 1)}{2}$$

ഇവിടെ ഈ രൂപം പരാർദ്ധാംശത്താലൊന്നാകകൊണ്ടു് അതിനെ ഉപേക്ഷിക്കാം.

$$\therefore \text{മൂലസംകലിതം} = \frac{\text{വ} \times \text{പ. വ}}{2}$$

മുഴുവൻ സംഖ്യകളാകുവാൻ, പരാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിക്കണം; എന്നാൽ $\frac{\text{വ} \times \text{പ} \times \text{വ}}{2}$ പരാർദ്ധാംശത്താലൊന്നുകളാകുന്നു.

$$\text{അപ്പോൾ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളുടെ മൂലസംകലിതം} = \frac{\text{വ} \times \text{വ} \times \text{പ}}{2\,\text{പ.}} = \frac{\text{വ}^2}{2} \Big]$$

വർഗ്ഗസംകലിതം: പിന്നെ വർഗ്ഗസംകലിതത്തെ ചൊല്ലുന്നുണ്ടു്. ഇവിടെ ഇസ്സംകലിതം ചെയ്ത ഭുജകളിൽ ഓരോന്നെ തന്നെത്തന്നെ കൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചതെല്ലൊ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങളാകുന്നതു്. ഇവിടെ ഗുണകാരങ്ങളാകുന്ന ഭുജകളെല്ലാം വ്യാസാർദ്ധത്തോടു് ഒക്കുംഎന്നിരിക്കുന്നതാകിൽവ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംകലിതം വർഗ്ഗസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ പിന്നെ ഒരു ഗുണകാരമെ വ്യാസാർദ്ധത്തോടു തുല്യമായിട്ടുള്ളൂ. അതു് ഒടുക്കത്തേതു്. അതിന്നു നടേത്തേതിന്നു വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒന്നു കുറയും ഗുണകാരഭുജാസംഖ്യാ. അതിനേയും വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിക്കിൽ ഒന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഉപാന്ത്യഭുജാ ഏറും വർഗ്ഗസംകലിതത്തിങ്കന്നു്. പിന്നെ അതിന്നു കീഴേത്തു് ഒടുക്കത്തേതിന്നു മൂന്നാമതു്. അതു വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കന്നു രണ്ടു ഖണ്ഡം കുറയും. എന്നാൽ ഭുജയെ രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചതു് ഏറും. ഇങ്ങനെ ക്രമേണ ചെറിയ ചെറിയ ഭുജകളെ ക്രമേണ ഏറിയ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംകലിതത്തിൽ വർഗ്ഗസംകലിതത്തിങ്കന്നു് ഏറിപ്പോയ ഭാഗമാകുന്നതു്. അതു കളഞ്ഞാൽ വർഗ്ഗസംകലിതമായിട്ടു വരും വ്യാസാർദ്ധഗുണിതമായിട്ടിരിക്കുന്ന സംകലിതം. ഇവിടെ ദിക‌സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു് അടുത്ത ഭുജയിൽ കുറഞ്ഞതു് ഒന്നു കുറഞ്ഞ വ്യാസാർദ്ധമാകയാൽ, ഇവിടെ ഏറിപ്പോകുന്ന അംശം ഒക്ക കൂട്ടിയാൽ മൂലത്തിന്റെ സംകലിതസംകലിതമായിട്ടു വരും. എങ്കിലൊ സംകലിതങ്ങളുടെ യോഗമല്ലൊ സംകലിതസംകലിതമാകുന്നതു്. അവിടെ ഒടുക്കത്തെ സംകലിതം എല്ലാം ഭുജകളും കൂടിയതു്. അന്ത്യത്തിന്നടുത്തു കീഴെസ്സംകലിതം പിന്നെ. ഒടുക്കത്തെ ഭുജ ഒന്നു കൂടാതെ മറ്റെ ഭുജകളെല്ലാം കൂടിയതു് ഒടുക്കത്തേതിങ്കന്നു കീഴ്. മൂന്നാംസംകലിതത്തിങ്കൽ ഭുജകൾ രണ്ടു കൂടാതെ മറ്റുള്ള ഭുജകളുടെ യോഗം അതിന്റെ കീഴെ സംകലിതമാകുന്നതു്. അതു് ഒടുക്കമായിരിക്കുന്ന ഭുജകളെല്ലാറ്റിന്റേയും യോഗം ഇവ്വണ്ണം കീഴോട്ടുള്ളതൊക്ക ഓരോരോ ഭുജ കുറഞ്ഞിരിക്കും, നടേത്തെ നടേത്തെ സംകലിതത്തിങ്കന്നു്. എന്നാൽ എല്ലാറ്റിലും വലിയ ഭുജക്കു് ഒരു സംകലിതത്തിങ്കലെ യോഗമുള്ളൂ. പിന്നെ ഒടുക്കത്തേതിന്നു് അടുത്തു കീഴെ ഭുജക്കു് ഒടുക്കത്തെ സംകലിതത്തിലും അതിന്നടുത്തു കീഴേതിലും യോഗമുണ്ടു്. അവിടുന്നു കീഴെ കീഴെ ഭുജകൾക്ക ക്രമേണ മൂന്നു്, നാലു തുടങ്ങിയുള്ള സംകലിതങ്ങളിൽ യോഗമുണ്ടു്. എന്നാൽ ഒടുക്കത്തെ ഭുജക്കടുത്തു കീഴെ ഭുജ തുടങ്ങിയുള്ള ചെറിയ ചെറിയ ഭുജകളെ ഒന്നു തുടങ്ങിയുള്ള സംഖ്യകളെ

കൊണ്ടു ക്രമേണ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്നതു സംകലിതസംകലിതമെന്നു വന്നുകൂടി. ഇപ്പോളിവിടെ അതിസൂക്ഷ്മമായി ഖണ്ഡിച്ചിരിക്കുന്ന ഭുജകളുടെ സംകലിതമാകുന്നതു് ഒടുക്കത്തെ ഭുജയുടെ വൎഗ്ഗത്തിൽ പാതി എന്നോ മുമ്പേ ചൊല്ലിയെല്ലോ. എന്നാലതതു ഭുജ ഒടുക്കമായിരിക്കുന്ന സംകലിതമുണ്ടാവാൻ അതതു ഭുജയെ വൎഗ്ഗിച്ചൎദ്ധിക്കേവേണ്ടുവതു് എന്നുവന്നു. എന്നാൽ എല്ലാ ഭുജകളുടേയും വൎഗ്ഗയോഗത്തെ അൎദ്ധിച്ചാൽ സംകലിതസംകലിതമുണ്ടാം. എന്നാൽ വൎഗ്ഗസംകലിതത്തിന്റെ പാതി മൂലത്തിന്റെ സംകലിതസംകലിതമാകുന്നതെന്നു വന്നു. എന്നാൽ സംകലിതത്തെ വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ തന്നിൽ പാതി കൂട്ടിയിരിക്കുന്ന വൎഗ്ഗസംകലിതമായിട്ടിരിക്കുമതു്. വൎഗ്ഗാൎദ്ധസംകലിതംകൂടി ഇരിക്കുന്നു എന്നും ചൊല്ലാമതിനെ. എന്നാൽ വ്യാസാൎദ്ധവൎഗ്ഗത്തിന്റെ അൎദ്ധത്തെ വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച തന്നിലെ മൂന്നൊന്നു കളഞ്ഞാൽ ശേഷിക്കുന്നതു മുഴുവനിൽ മൂന്നൊന്നായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ വ്യാസാൎദ്ധഘനത്തിൽ മൂന്നൊന്നു വൎഗ്ഗസംകലിതമാകുന്നതു് എന്നും വരും.

[വൎഗ്ഗസംകലിതം:—

$$\text{വൎഗ്ഗസംകലിതം} = 1\times 1 + 2\times 2 + 3\times 3 + \dots\dots + (\text{വ}-2)(\text{വ}-2) + (\text{വ}-1)(\text{വ}-1) + \text{വ}\times\text{വ}.$$

'വ' എല്ലായിടത്തും ഗുണകാരമായിട്ടെടുക്കുമ്പോൾ

$$\text{സംകലിതം} = \text{വ}\times 1 + \text{വ}\times 2 + \text{വ}\times 3 + \dots\dots + \text{വ}(\text{വ}-2) + \text{വ}(\text{വ}-1) + \text{വ}\times\text{വ}$$

$$= \frac{\text{വ}^2}{2}\cdot \text{വ} = \frac{\text{വ}^3}{2}.$$

$$\text{ഇവതമ്മിലുള്ള അന്തരം} = 1\times(\text{വ}-1) + 2(\text{വ}-2) + 3(\text{വ}-3) + \dots\dots + (\text{വ}-2)\times 2 + (\text{വ}-1)\times 1.$$

$1+2+3+\dots\dots+(\text{വ}-3)+(\text{വ}-2)+(\text{വ}-1).$

$1+2+3+\dots\dots+(\text{വ}-3)+(\text{വ}-2).$

$1+2+3+\dots\dots+(\text{വ}-3)$

....

....

$1+2+3.$

$1+2.$

$1.$

$$\text{ഇവയുടെ യോഗം} = 1\times(\text{വ}-1) + 2(\text{വ}-2) + \dots\dots + (\text{വ}-3)\times 3 + (\text{വ}-2)\times 2 + (\text{വ}-1)\times 1.$$

ഇതു മുമ്പിലത്തെ അന്തരം തന്നെ. ഇവ $\text{വ}-1,\ \text{വ}-2,\ \text{വ}-3, \dots\dots, 1, 2, 3$

എന്ന പദങ്ങളാദിയായിട്ടുള്ള മൂലസംകലിതങ്ങളുടെ യോഗം. ഈ യോഗത്തിനു മൂല സംകലിതസംകലിതമെന്നു പേർ,

$$\text{ഈ മൂലസംകലിതങ്ങളുടെ യോഗം} = \frac{(\text{വ}-1)^2}{2} + \frac{(\text{വ}-2)^2}{2} + \cdots\cdots$$

$$= \text{വർഗ്ഗസംകലിതാർദ്ധം (പ്രായേണ)}$$

ഇവിടെ വാസ്തവത്തിൽ വർഗ്ഗസംകലിതത്തിങ്കന്നു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗാർദ്ധ സംഖ്യ പോരാതെയുണ്ട്. എന്നാൽ വർഗ്ഗസംകലിതസംഖ്യയെ അപേക്ഷിച്ചു വർഗ്ഗസംഖ്യയെ ഉപേക്ഷിക്കാം.

$$\text{അപ്പോൾ } \frac{\text{വ}^3}{2} - \text{വർഗ്ഗസംകലിതം} = \text{വർഗ്ഗസംകലിതാർദ്ധം}.$$

$$\frac{3}{2}\,\text{വർഗ്ഗസംകലിതം} = \frac{\text{വ}^3}{2}.$$

$$\therefore \tfrac{3}{2}\,\text{വർഗ്ഗസംകലിതം} - \tfrac{1}{3} \times \tfrac{3}{2}\,\text{വർഗ്ഗസംകലിതം} = \frac{\text{വ}^3}{2} - \tfrac{1}{3} \times \frac{\text{വ}^3}{2}.$$

$$\therefore \text{വർഗ്ഗസംകലിതം} = \frac{\text{വ}^3}{3}.$$

$$\text{മൂലസംകലിതസംകലിതം} = \text{വർഗ്ഗസംകലിതാർദ്ധം} = \frac{\text{വ}^3}{6}\;]$$

ഘനസംകലിതാദി: പിന്നെ ഘനസംകലിതത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരം. ഈ വർഗ്ഗസംകലിതത്തിങ്കലെ അതതു ഭുജാവർഗ്ഗത്തെ അതതു ഭുജതന്നെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതെല്ലൊ ഘനസംകലിതമാകുന്നതു്. ഇവിടെ എല്ലാറ്റേയും വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു തന്നെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ എത്ര ഉണ്ടു് ഘനസംകലിതത്തിങ്കന്നു് ഏറുവതു് എന്നു് ഓക്കുംപ്രകാരം. ഇവിടെ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു തന്നെ കടക്കത്തേതിന്നടുത്തു കീഴെ ഭുജാവർഗ്ഗം ഒന്നിൽ ഗുണിച്ചതു് ഏറും. പിന്നെ അവിടുന്നു മുമ്പിലെ മുമ്പിലെ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങളെ രണ്ടു്, മൂന്നു തുടങ്ങിയുള്ള സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ക്രമേണ ഗുണിച്ചതു് ഏറും. അതു വർഗ്ഗസംകലിതസംകലിതമെന്നും വരും. ഘനത്ര്യംശം വർഗ്ഗസംകലിതമെന്നൊ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയല്ലൊ. എന്നാലതതു ഭുജാഘനത്തിന്റെ ത്ര്യംശം അതതു ഭുജ കടക്കമായിരിക്കുന്ന വർഗ്ഗസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ ഘനസംകലിതത്തിന്റെ മൂന്നൊന്നു വർഗ്ഗസംകലിതസംകലിതമെന്നും വരും. എന്നാൽ വർഗ്ഗസംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ തന്നിൽ മൂന്നൊന്നു കൂടിയിരിക്കുന്ന ഘനസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ ഇതു തന്നിൽ നാലൊന്നു കളഞ്ഞാൽ ഘനസംകലിതം ശേഷിക്കും. എന്നാൽ വർഗ്ഗവർഗ്ഗത്തിന്റെ നാലൊന്നു ഘനസംകലിതമെന്നും വന്നു. പിന്നെ ഈ ഘനസംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗു

ണിച്ചാൽ വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതവും ഘനസംകലിതസംകലിതവുംകൂടി വരും എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു വന്നിരിക്കുന്നു. വർഗ്ഗവർഗ്ഗത്തിൽ നാലൊന്നു ഘനസംകലിതം എന്നും ചൊല്ലീ. ഇതു ഹേതുവായിട്ടു വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതത്തിൽ നാലൊന്നു ഘനസംകലിതസംകലിതം എന്നുംവരും, ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു്. എന്നാൽ ചതുരംശം കൂടിയിരിക്കുന്നതിങ്കന്നു പഞ്ചാംശം കളഞ്ഞാൽ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ അഞ്ചു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിന്റെ അഞ്ചൊന്നായിട്ടിരിക്കും വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം എന്നും വന്നു.

[ഘനസംകലിതം $=1^3+2^3+3^3\ldots\ldots+വ^3$.

$$1^2.\ വ+3^2.\ വ+3^2.\ വ+\ldots\ldots+വ^2.\ വ=\frac{വ^3}{3}.\quad വ=\frac{വ^4}{3}.$$

ഇവയുടെ അന്തരം $=1^2(വ-1)+2^2(വ-2)+\ldots\ldots(വ-2)^2\times2+(വ-1)^2\times1$.

$=$ വർഗ്ഗസംകലിതസംകലിതം.

$=\frac{\text{ഘനസംകലിതം}}{3}$ (മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു്)

$\frac{4}{3}\times$ ഘനസംകലിതം $=\frac{വ^4}{3}$.

$\frac{4}{3}\times$ ഘനസംകലിതം $-\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\times$ ഘനസംകലിതം $=\frac{വ^4}{3}-\frac{1}{4}\times\frac{വ^4}{3}$

∴ ഘനസംകലിതം $=\frac{വ^4}{4}$.

ഇതുപോലെതന്നെ,

ഘനസംകലിതസംകലിതം $=വ\times\frac{വ^4}{4}-$ വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം.

ഘനസംകലിതസംകലിതം $=\frac{\text{വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം}}{4}$

അപ്പോൾ $\frac{5}{4}\times$ വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം $=\frac{വ^5}{4}$.

∴ വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം $=\frac{വ^5}{5}$.

ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെയുള്ള സംകലിതങ്ങളെ വരുത്താം]

സംകലിതാനയനസാമാന്യന്യായം: പിന്നെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗത്തെ തന്നെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ സമപഞ്ചാഘാതമെന്നു പേർ. ഇങ്ങനെ സമപഞ്ചാദി ഘാതസംകലിതം എന്നു മീത്തെ മീത്തെ സംകലിതങ്ങൾക്കു പേർ. അതിന്നു മുമ്പിലത്തെ സംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു് അഗ്ഗുണ്യത്തിന്റെ സംകലിതസംകലിതവും അതിന്നു മീത്തെ സമഘാതസംകലിതവുംകൂടി വരും. എന്നാൽ മീത്തെ മീത്തെ

സമഘാതസംകലിതമുണ്ടാകുവാൻ അതതു സംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിങ്കന്ന് ഓരോന്നേറിയ സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ കളഞ്ഞാൽ മേലെ മേലെ സമഘാതസംകലിതമുണ്ടാകും. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെ രണ്ടിൽ ഹരിപ്പൂ. ഘനമെങ്കിൽ മൂന്നിൽ ഹരിപ്പൂ. വർഗ്ഗവർഗ്ഗമെങ്കിൽ നാലിൽ. സമപഞ്ചഘാതത്തെ അഞ്ചിൽ. എന്നിങ്ങനെ ഏകൈകോത്തരസമഘാതത്തെ ഏകൈകോത്തരസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങൾ ക്രമേണ ഉള്ള സമഘാതസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു മൂലസംകലിതം, ഘനത്തിങ്കന്നു വർഗ്ഗസംകലിതം, വർഗ്ഗവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ഘനസംകലിതം എന്നിങ്ങനെ രാശികളെ തന്നെക്കൊണ്ട് എത്ര ആവൃത്തി ഗുണിച്ചതിങ്കന്ന് ഏകാദിസംഖ്യകളിൽ അത്രാമതുകൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം യാതൊന്ന് ആ രാശിയെ ഒരാവൃത്തി കുറച്ചു ഗുണിച്ചതിന്റെ സംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ മൂലവർഗ്ഗാദിസംകലിതങ്ങളെ വരുത്തുംപ്രകാരം.

[മൂലവർഗ്ഗാദിസംകലിതങ്ങളെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ സാമാന്യേന പറയുന്നു.

$$\text{മൂലസംകലിതം} = \frac{വ^2}{2}.$$

$$\text{വർഗ്ഗസംകലിതം} = വ.\ \frac{വ^2}{2} - \frac{1}{3}.\ \frac{വ^3}{2} = \frac{വ^3}{3}.$$

$$\text{ഘനസംകലിതം} = വ.\ \frac{വ^3}{3} - \frac{1}{4}.\ \frac{വ^4}{3} = \frac{വ^4}{4}.$$

$$\text{വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം} = വ.\ \frac{വ^4}{4} - \frac{1}{5}.\ \frac{വ^5}{4} = \frac{വ^5}{5}$$

$$\text{സമപഞ്ചഘാതസംകലിതം} = വ.\ \frac{വ^5}{5} - \frac{1}{6}.\ \frac{വ^6}{5} = \frac{വ^6}{6}$$

....

....

ആദ്യദ്വിതീയാദിസംകലിതങ്ങൾ: അനന്തരം ആദ്യദ്വിതീയാദി സംകലിതത്തെ കാട്ടുന്നു. അവിടെ ആദ്യസംകലിതമാകുന്നതു മൂലസംകലിതം തന്നെ. അതു പദവർഗ്ഗാർദ്ധമെന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയെല്ലോ. ദ്വിതീയം പിന്നെ മൂലസംകലിതൈക്യം. അതും പിന്നെ വർഗ്ഗസംകലിതാർദ്ധത്തോടു തുല്യം എന്നു ചൊല്ലീതായി. അതാകുന്നതു പദത്തിന്റെ ഘനത്തിൽ ആറൊന്നായിരിക്കും. തൃതീയസംകലിതം പിന്നെ. ദ്വിതീയസംകലിതം അന്ത്യമെന്നു കല്പിച്ചിട്ട്, പിന്നെ പദത്തിൽ ഒരു സംഖ്യ കുറച്ചിട്ട്, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയപോ

ലെ ഒരു സംകലിതൈക്യത്തെ ഉണ്ടാക്കൂ. അതിനെ ഉപാന്ത്യമെന്നു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ പദത്തിങ്കന്നു രണ്ടു സംഖ്യ കുറച്ചിട്ട് ഒരു സംകലിതൈക്യത്തെ വരുത്തൂ. അത് ഉപാന്ത്യത്തിങ്കന്നു കീഴേതായിട്ടിരിക്കും. എന്നിങ്ങനെ ഏകൈകോനങ്ങളുടെ സംകലിതൈക്യത്തെ ഉണ്ടാക്കുവാൻ ഏകൈകോനങ്ങളുടെ ഘനഷഷ്ഠാംശങ്ങളുടെ യോഗത്തെ ഉണ്ടാക്കേണം. അതു ഘനഷഷ്ഠാംശസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. അതു ഘനസംകലിതത്തിന്റെ ആറൊന്നായിട്ടിരിക്കും. ഘനസംകലിതം പിന്നെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗചതുരംശമായിട്ടിരിക്കും എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിതായിഎല്ലൊ. എന്നാൽ വർഗ്ഗവർഗ്ഗചതുരംശത്തിന്റെ ഷഷ്ഠാംശം ഘനഷഷ്ഠാംശസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ വർഗ്ഗവർഗ്ഗചതുർവ്വിംശാംശം ഘനഷഷ്ഠാംശസംകലിതമാകുന്നത് എന്നു വരും. പിന്നെ നാലാമത് ഈ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം വർഗ്ഗവർഗ്ഗചതുർവ്വിംശാംശസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. ഇതു പിന്നെ സമപഞ്ചഘാതപഞ്ചാംശത്തിന്റെ ചതുർവ്വിംശാംശം എന്നു വരും. ആകയാൽ പദത്തെ എത്ര ആവൃത്തി പദത്തെ തന്നെക്കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ അതിങ്കന്ന് ഏകദ്വിത്ര്യാദി അത്ര സംഖ്യകൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ആദ്യദ്വിതീയാദി സംകലിതത്തിൽ അത്രാമതായിട്ടിരിക്കും. എന്നതു തൽപ്രകാരം.

[ആദ്യസംകലിതം മൂലസംകലിതം തന്നെ. ദ്വിതീയസംകലിതം മൂലസംകലിതസംകലിതം. തൃതീയസംകലിതം ഘനസംകലിതസംകലിതം. എന്നിങ്ങനെ മേല്പോട്ടു നിരൂപിച്ചുകൊള്ളൂ. യുക്തി മുമ്പിൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലൊ. മുകളിൽ ജ്യാപ്രകരണത്തിലും ഇതിനെ വിസ്തരിക്കുന്നുണ്ട്.

$$\text{ആദ്യസംകലിതം} = \frac{\text{വ}^2}{1\times 2} = \frac{\text{വ}^2}{\angle 2}$$

$$\text{ദ്വിതീയസംകലിതം} = \frac{\text{വ}^3}{1\times 2\times 3} = \frac{\text{വ}^3}{\angle 3}.$$

$$\text{തൃതീയസംകലിതം} = \frac{\text{വ}^4}{1\times 2\times 3\times 4} = \frac{\text{വ}^4}{\angle 4}.$$

$$\text{ചതുർത്ഥസംകലിതം} = \frac{\text{വ}^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} = \frac{\text{വ}^5}{\angle 5}.$$

....

....]

ഉപസംഹാരം:

ഇവിടെ പിന്നെ വർഗ്ഗസംകലിതം, വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം, സമഷൾഘാതസംകലിതം എന്നിവറെറ ഉണ്ടാക്കേണ്ടു. എന്നിട്ട് മൂന്ന്

അഞ്ചു തുടങ്ങിയുള്ള സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പാൻ ചൊല്ലി. ഇവററിന്നു ഹാരകങ്ങളാകുന്നതു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം, പിന്നെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗം എന്നിവ. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു വ്യാസാർദ്ധഘനത്തെ ഹരിച്ചാൽ ഫലം വ്യാസാർദ്ധം തന്നെ. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധത്തെ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചതു നടേത്തെ ഫലയോഗമാകുന്നതു്. ഇതു പിന്നെ അതതു ഗുണ്യവും അതതു ഫലവും തങ്ങളിലെ അന്തരങ്ങളുടെ യോഗത്താൻ. എന്നാലതിനെ ഗുണ്യയോഗത്തിങ്കന്നു കളയൂ. അതാകുന്നതു ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി കോണോളമുള്ളതു ചതുരശ്രബാഹുവിൻെറ പാതി. ഇവ്വണ്ണം സമപഞ്ചഘാതത്തെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും വ്യാസാർദ്ധംതന്നെ ഫലം. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധത്തെ അഞ്ചിൽ ഹരിച്ചതു രണ്ടാംഫലം. ഇങ്ങനെ ഏഴ്, ഒമ്പതു് തുടങ്ങിയുള്ള ഒററപ്പെട്ട സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു വ്യാസാർദ്ധത്തെ ഹരിച്ചാൽ മീത്തെ മീത്തെ ഫലം വരും. ഉണ്ടായ ഫലത്തെ ക്രമേണ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ കളയുകയും കൂട്ടുകയും ചെയ്വൂ. എന്നാൽ പരിധീടെ എട്ടൊന്നുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരം ഹാരകത്തേക്കാൾ ചെറുതാകുന്നേടത്തു പിന്നെ പിന്നെ ഫലം കുറകകൊണ്ടു പെരികെ കുറഞ്ഞാൽ പിന്നെ ഫലങ്ങളെ ഉപേക്ഷിച്ചു് ഒടുക്കാം ക്രിയ. എന്നാൽ മിക്കതും സൂക്ഷ്മമാകും. എന്നാൽ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോടു കോണസൂത്രത്തോടു് ഇടയിലെ വൃത്തഭാഗം വരും. ഇതിനെ എട്ടിൽ ഗുണിച്ചാൽ വൃത്തം മുഴുവനായിട്ടിരിക്കും. ഹാര്യമാകുന്ന വ്യാസാർദ്ധത്തെ എട്ടിൽ ഗുണിക്കിലുമാം നടേ. എന്നാൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച വ്യാസമതു്. അപ്പോൾ അതിങ്കൽതന്നെ ഫലം സംസ്കരിക്കേണ്ടതും. എന്നാൽ വൃത്തം വരും.

["വ്യാസേ വാരിധിനിഹതേ......." എന്ന ക്രിയയുടെ യുക്തിയെ ഇവിടെ ഉപസംഹരിക്കുന്നു. ഈ ഭാഗം മുമ്പിൽ വ്യാഖ്യാനിച്ചിട്ടുണ്ടു്.]

ചാപീകരണം.

ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ജ്യാവിനെ ചാപിക്കാം.

ഇഷ്ടജ്യാത്രിജ്യയോർഘാതാൽ കോട്യാപ്തം പ്രഥമം ഫലം ।
ജ്യാവർഗ്ഗം ഗുണകം കൃത്വാ കോടിവർഗ്ഗഞ്ച ഹാരകം ॥
പ്രഥമാദിഫലേഭ്യോഥ നേയാ ഫലതതിർമ്മുഹുഃ ।
ഏകത്ര്യാദ്യോജസംഖ്യാഭിർഭക്തേഷ്വേതേഷ്വനുക്രമാൽ ॥
ഓജാനാം സംയുതേസ്ത്യക്ത്വാ യുഗ്മയോഗം ധനുർഭവേൽ ।
ദോഃകോട്യോരല്പമേവേഷ്ടം കല്പനീയമിഹ സ്മൃതം ॥

ലബ്ധീനാമവസാനം സ്യാന്നാന്യഥാപി മുഹുഃ കൃതേ ।
വ്യാസവൎഗ്ഗാദ്രവിഹതാൽ പദം സ്യാൽ പ്രഥമം ഫലം ॥
തദാദിതസ്ത്രിസംഖ്യാപ്തം ഫലം സ്യാദുത്തരോത്തരം ।
രൂപാദ്യയുഗ്മസംഖ്യാഭിൎഹൃതേഷ്വേഷു യഥാക്രമം ॥
വിഷമാണാം യുതേസ്ത്യക്ത്വാ സമം ഹി പരിധിൎഭവേൽ ॥

(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഇവിടെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളിൽ കുറഞ്ഞതു യാതൊന്ന് അതിനെ ചാപിക്കുംപ്രകാരം ചൊല്ലുന്നതു്. അവിടേയും ഭുജ ചെറുത് എന്നു നടേ കല്പിക്കുന്നതു്. ഈ ഇഷ്ടജ്യാവിനെ വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കോടിജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചതു നടേത്തെ ഫലമാകുന്നതു്. പിന്നെ ഈ ഫലത്തെത്തന്നെ ഭുജാവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കോടിവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു രണ്ടാംഫലമാകുന്നതു്. പിന്നെ ഈ രണ്ടാംഫലത്തെ ഭുജാവൎഗ്ഗംതന്നെകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കോടിവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചു രണ്ടാംഫലം ഉണ്ടാക്കിയപോലെ മൂന്നാംഫലത്തേയുമുണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ അതതിങ്കന്നു മീത്തെ മീത്തെ ഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കൂ, ഈ ഗുണകാരഹാരകങ്ങളെക്കൊണ്ടുതന്നെ. ഉണ്ടായഫലപരമ്പരക്രമത്താൽ ഒന്ന്, മൂന്ന്, അഞ്ച് എന്ന ഓററപ്പെട്ട സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങളിൽ നടേത്തേതു്, മൂന്നാമതു്, അഞ്ചാമതു് എന്നിവ കക്കത്തങ്ങളിൽക്കൂട്ടി ഇതിങ്കന്നു രണ്ടാമതു്, നാലാമതു്, തുടങ്ങിയുള്ളവററിന്റെ യോഗം കളയൂ. ശേഷം ചാപം. അതിനെ മൂന്നു രാശിയിൽനിന്നു കളഞ്ഞതു കോടി ചാപം. കോടി ചാപം ചെറുതാകിൽ നടേ കോടി ചാപം ഉണ്ടാക്കൂ. *

ഇവിടക്ക് ഉപപത്തിയാകുന്നതു്. വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു വൃത്തം വരുത്തുവാൻ ചൊല്ലിയപോലെ തന്നെ ഇവിടെ ചതുരശ്രമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ വൃത്തത്തിങ്കൽ ദിക്സൂത്രത്തിങ്കൽ ശരവും വരുമാറു ജ്യാവു കല്പിക്കുന്നു. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു ജ്യാവിന്റെ തലയ്ക്കൽ സ്പൎശിക്കുന്ന കൎണ്ണസൂത്രം വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തെ ചതുരശ്രത്തോളം നീളെ കല്പിപ്പൂ. ഇതു് ഇവിടക്ക് എല്ലായിലും വലിയ കൎണ്ണസൂത്രമാകുന്നതു്. ഇക്കൎണ്ണ

---

* This is the so called Gregory's general series for any arc,

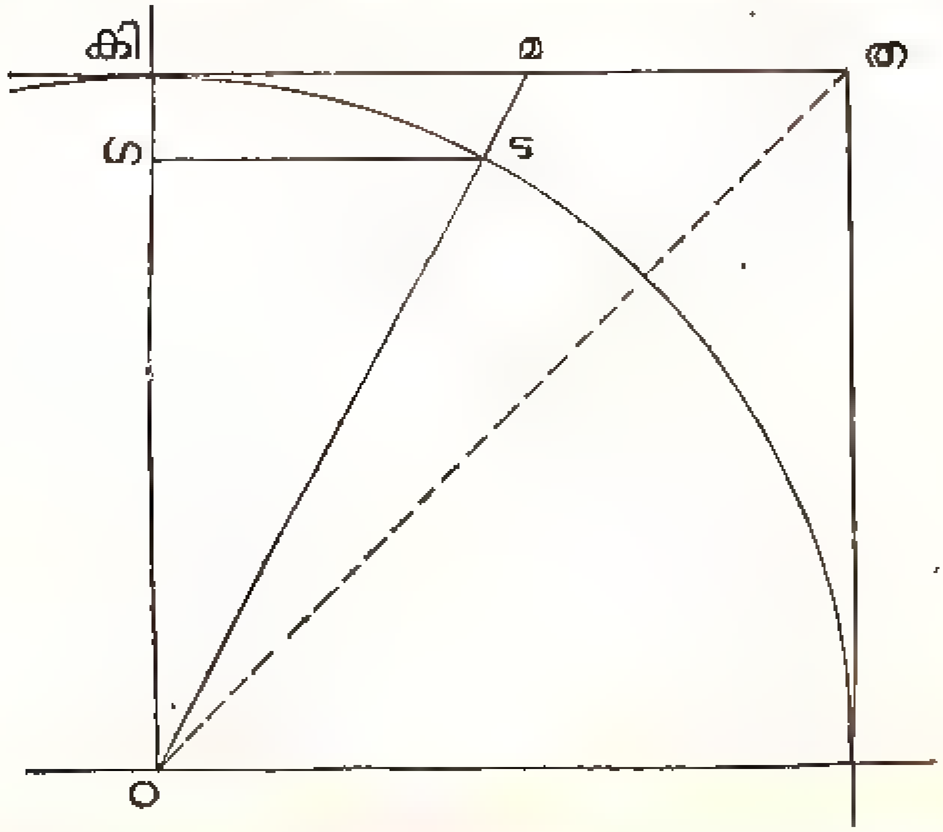
For arc tan $t \leq \frac{\pi}{4}$, arc tan $t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \ldots\ldots\ldots\ldots$

For arc tan $t = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\text{Circumference}}{8} = (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots\ldots\ldots) \times R$

where R is the radius.

സൂത്രാഗ്രത്തോട് ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രഭുജാഭാഗം ഇവിടെ നടേത്തെ ഫലമായിട്ടു വരുത്തിയത്. പിന്നെ ഇതു ശൂന്യമായി ഇതിന്റെ വർഗ്ഗം ഗുണകാരമായി ദിക്സൂത്രവർഗ്ഗം ഹാരകമായിട്ടു മീത്തെ മീത്തെ ഫലങ്ങളെ വരുത്തുവാൻ നടേ ചൊല്ലീ. അവിടെ എല്ലാ ഫലത്തിന്നും ഭുജാഭാഗംതന്നെ ശൂന്യമായി കല്പിക്കുമ്പോൾ, ഗുണഹാരങ്ങൾ തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. അതു ഹേതുവായിട്ടു ശൂന്യം തന്നെ ഫലമായിട്ടിരിക്കും എല്ലാടവും. എന്നിട്ടു ശൂന്യത്തെത്തന്നെ ഓജസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കേന്ത ഇവിടെ പിന്നെ ഭുജാകോടികളാകുന്ന ഗുണഹാരങ്ങൾ തുല്യങ്ങളല്ലായ്കയാൽ ഫലങ്ങൾ പിന്നെ പിന്നെ കുറഞ്ഞിട്ടേ വരൂ. എന്നിട്ടു ഫലങ്ങളെല്ലാററവും ക്രമേണ ഉണ്ടാക്കേണം. എന്നാലൊ ചെറിയ ഗുണഹാരങ്ങളെ കൊള്ളുക എല്ലൊ എളിയത്. എന്നിട്ട് ഒടുക്കത്തെ കർണ്ണവും ദിക്സൂത്രവും ഉള്ള അന്തരാളം ചതുരശ്രഭുജാഭാഗമല്ല ഇവിടെ ഗുണകാരമായിട്ടു കൊള്ളുന്നത്, വൃത്തത്തിന്റെ അകത്തൂടെ അന്തരാളം. അതു ജ്യാവാകുന്നത്. അപ്പോൾ അതിന്റെ കോടി ഹാരകവും അതു ഫലം ശൂന്യവും എന്നിവിടെ വിശേഷമാകുന്നത്. ഇവിടേയും ഓജസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കേന്ത, വർഗ്ഗസംകലിതാദി വരുത്തുവാൻ. ഇങ്ങനെ ചാപീകരണം.

[പരിധിയെ വരുത്തുവാൻ പറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ഭുജാകോടികളിൽവെച്ചു ചെറിയതിന്റെ ചാപീകരണപ്രകാരത്തെ പറയുന്നു. ചാപിക്കു



പരിലേഖം 25.

എന്നു വെച്ചാൽ അല്പജ്യാവിന്റെ ചാപത്തെ വരുത്തുക എന്നർത്ഥം. സമചതുരശ്രമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ ഒരു വൃത്തത്തെ കല്പിക്ക. ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ കിഗ എന്ന ശരം വരുമാറു ഗട എന്ന ജ്യാവിനെ കല്പിക്ക. ഇതു വൃത്താഷ്ടമാംശത്തിന്റെ ജ്യാവിനേക്കാൾ ചെറിയതെന്നും കല്പിക്ക. ഠട എന്ന വ്യാസാർദ്ധത്തെ കിത എന്ന ബാഹ്വർദ്ധത്തിൽ മ എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കത്തക്കവണ്ണം നീട്ടികല്പിക്ക. ഇവിടെ ടഗ എന്ന ജ്യാവിനെ ജ എന്നും വ്യാസാർദ്ധത്തെ വ എന്നും കല്പിക്ക.

പരിധ്യാനയനത്തിലും ചാപീകരണത്തിലും ക്രിയ സാമാന്യേന ഒന്നു തന്നെ. പരിധ്യാനയനത്തിൽ വ്യാസാർദ്ധത്തേയും ചാപീകരണത്തിൽ കിമ എന്ന ബാഹുഭാഗത്തേയും അണുപ്രായഖണ്ഡങ്ങളായി രൂപങ്ങളായിട്ടു കല്പിക്കുന്നു. അപ്പോൾ ഖണ്ഡയോഗം ആദ്യത്തേതിൽ വ്യാസാർദ്ധവും രണ്ടാമത്തേതിൽ ബാഹുഭാഗം കിമയും ആകുന്നു.

സങ്കലിതങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തും പരിധ്യാനയനത്തിൽ പദം വ്യാസാർദ്ധസംഖ്യ, ചാപീകരണത്തിൽ പദം കിമ എന്ന സംഖ്യ. ഹാരകമായിട്ടു കല്പിക്കുന്നതു രണ്ടേടത്തും കോടിവർഗ്ഗമാകുന്ന വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം തന്നെ.

ഇവിടെ കിമ എന്നതിനെ ബ എന്നു കല്പിക്ക.

$$\text{അപ്പോൾ പരിധ്യഷ്ടാംശം} = വ - \frac{വ^3}{3വ^2} + \frac{വ^5}{5വ^4} - \frac{വ^7}{7വ^6} + \ldots\ldots$$

$$\text{ഇതുന്യായേന ചാപം} = ബ - \frac{ബ^3}{3വ^2} + \frac{ബ^5}{5വ^4} - \frac{ബ^7}{7വ^6} + \ldots\ldots$$

ഇവിടെ ഠമകി, ഠടഗ ഈ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളും തുല്യാകാരങ്ങളാകയാൽ

$$കിമ = \frac{ടഗ \times ഠകി}{ഠഗ}.$$

$$\text{അതായതു } ബ = \frac{ജ \times വ}{ക} \text{ (ഇവിടെ ക = ഇഷ്ടജ്യാവിന്റെ കോടി.)}$$

$$\text{അപ്പോൾ ചാപം} = \frac{ജ \times വ}{ക} - \frac{ജ^3 . വ^3}{3ക^3 . വ^2} + \frac{ജ^5 . വ^5}{5ക^5 . വ^4} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{ജ \times വ}{ക} - \frac{ജ . വ}{3ക} . \frac{ജ^2}{ക^2} + \frac{ജ \times വ}{5ക} . \frac{ജ^2}{ക^2} . \frac{ജ^2}{ക^2} - \ldots\ldots]$$

പ്രകാരാന്തരേണ പരിധ്യാനയനം.

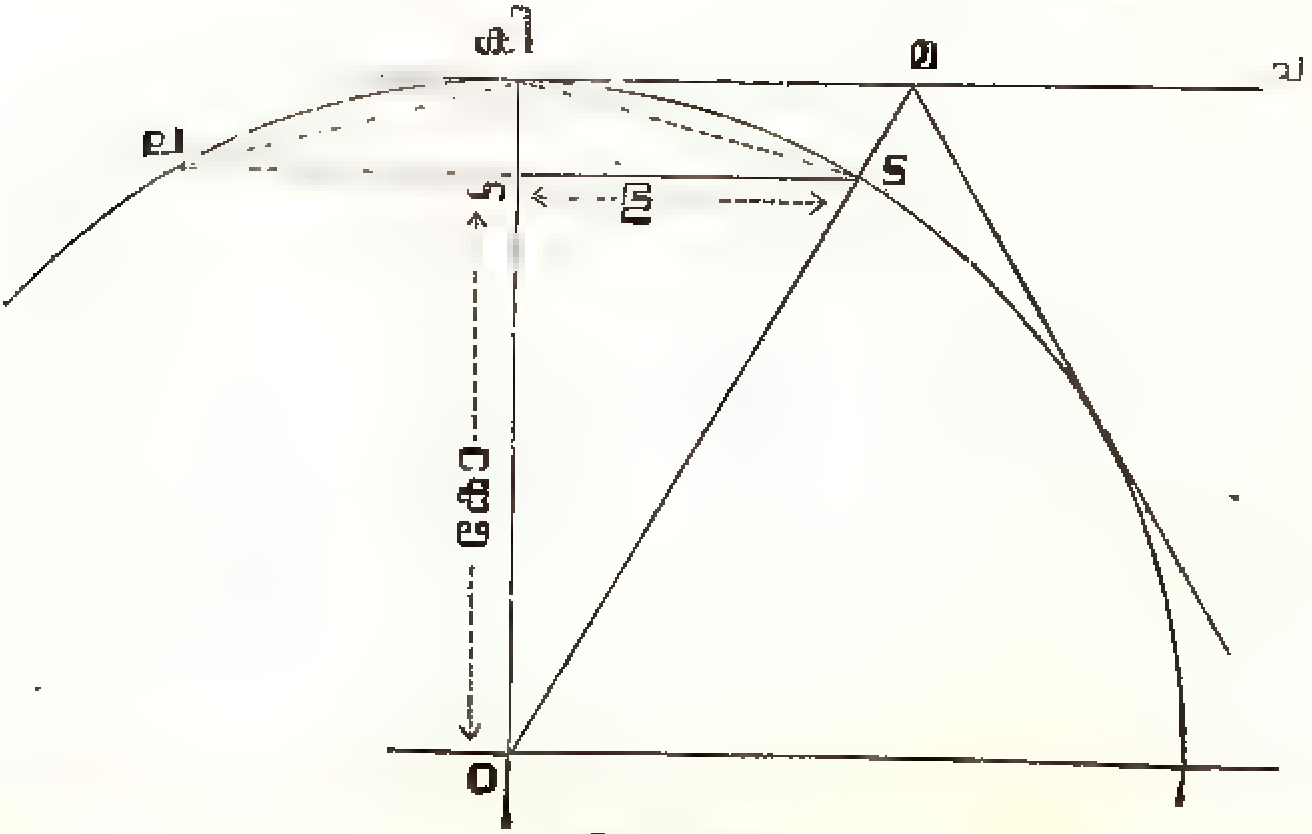
അനന്തരം ഈ വിശേഷന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം വ്യാസംകൊണ്ടു വൃത്തംവരുത്തുംപ്രകാരം. ഇവിടെ ഇഷ്ടവ്യാസവർഗ്ഗത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചു മൂലിച്ചതു നടേത്തെ ഫലം. ഇതിനെ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചതു രണ്ടാംഫലം. രണ്ടാംഫലത്തെ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചതു മൂന്നാമത്. പിന്നെ അതിനെ അതിനെ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചതു മീത്തെ മീത്തെ ഫലം. പിന്നെ ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കിയ ഫലങ്ങളെ ക്രമേണ ഒന്നു,

മൂന്ന് എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള ഓജസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങൾ നടേത്തത്, മൂന്നാമത്തേതു തുടങ്ങിയുള്ളവററെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയതിങ്കന്നു രണ്ടാമത്, നാലാമത്, തുടങ്ങിയുള്ള യോഗത്തെ കളയൂ. ശേഷം പരിധി*. ഇവിടെ വൃത്തത്തിൽ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നു നടേ ഉണ്ടാകുന്നത്. പിന്നെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിപ്പൂ. യാതൊരുപ്രകാരം നടേ വൃത്തത്തിൽ എട്ടൊന്നിനെ ഉണ്ടാക്കി അവ്വണ്ണമിവിടേയും. മുമ്പിൽ ചാപീകരണത്തിങ്കൽ ചൊല്ലിയപോലെ വൃത്തത്തിങ്കൽ ജ്യാവു കല്പിപ്പൂ. ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്ന് ഇരുപുറവും വൃത്തത്തിൽ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നു ചെന്നേടത്തു ജ്യാവിന്റെ രണ്ടഗ്രവും വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ അതു വൃത്തത്തിന്റെ ആറൊന്നിന്റെ സമസ്തജ്യാവായിട്ട് ഇരിക്കും. ദിക്സൂത്രത്തിങ്കൽ നടുവ്. ഇതിൽ പാതി പന്ത്രണ്ടാലൊന്നിന്റെ അർദ്ധജ്യാവ്. അതു വ്യാസത്തിന്റെ നാലൊന്ന് എന്നു നിയതം, ആറൊന്നിന്റെ സമസ്തജ്യാവു വ്യാസാർദ്ധത്തോടു തുല്യം എന്നിട്ട്. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിട്ട് ആറു ജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം തികയും. ഇവിടെ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു ജ്യാവിന്റെ തലക്കൽ വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന കർണ്ണസൂത്രം യാതൊരിടത്തു ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്നു അവിടന്നു ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോളമുള്ള ചതുരശ്രബാഹുഭാഗം ഇവിടെ നടേത്തെ ഫലം; എന്നിട്ടു വരുത്തുന്നു. ഇതിനെക്കൊണ്ടു പിന്നെ ഇക്കർണ്ണസൂത്രാഗ്രത്തോടു ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ വൃത്തഭാഗത്തെ വരുത്തുന്നു. അതിനെ പിന്നെ പന്ത്രണ്ടിൽ പെരുക്കേണ്ടുകയാൽ നടേത്തെ ഫലത്തെ തന്നെ പന്ത്രണ്ടിൽ പെരുക്കിയതിനെ നടേ ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഇവിടെ വ്യാസത്തിൽ നാലൊന്നു പരിധിദ്വാദശാംശജ്യാവ് എന്നിരിക്കയാൽ ഈ ജ്യാവർഗ്ഗം വ്യാസവർഗ്ഗത്തിൽ പതിനാറാലൊന്ന്. ഈ ജ്യാവർഗ്ഗത്തിന്റെ നാന്മടങ്ങു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം. വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ നാലൊന്നു പോയശേഷം മുക്കൂറും കോടിവർഗ്ഗം. ഇവിടെ ഈ കോടിവർഗ്ഗം ഹാരകം, വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഗുണകാരം ഈ ജ്യാവർഗ്ഗത്തിന്. എന്നിട്ട് അപവർത്തിച്ചാൽ നാലു ഗുണകാരം, മൂന്നു ഹാരകം എന്നു വരും. വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ പതിനാറിൽ ഹരിച്ചിരിക്കുന്ന ജ്യാവർഗ്ഗം ഗുണ്യം. ഫലം കർണ്ണാഗ്രത്തോടു ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രബാഹുഭാഗവർഗ്ഗം. അതിനെ പന്ത്ര

---

* This is a particular case of Gregory's Series when $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

ങ്ങിന്റെ വർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു മൂലിപ്പൂ. എന്നാലിവിടെ പന്ത്രണ്ടിന്റെ വർഗ്ഗവും നാലും ഗുണകാരം. തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ ഇരുപത്തിനാലിന്റെ വർഗ്ഗം. പതിനാറും മൂന്നും ഹാരകം തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച നാല്പത്തെട്ടുകൊണ്ട് ഇരുപത്തിനാലിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ ഹരിച്ചാൽ ഫലം പന്ത്രണ്ട്. എന്നിട്ടു പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിപ്പാൻ ചൊല്ലീ വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ. ഇതിന്റെ മൂലം വൃത്തത്തിന്നു പുറമേ ഒരു ഷഡശ്രബാഹ്വർദ്ധം. ഇവിടെ വൃത്തത്തിന്നകത്തെ ഷഡശ്രകോണികൾ. സ്പർശിക്കുന്ന കർണ്ണസൂത്രവും പുറത്തെ ഷഡശ്രകോണികളും സ്പർശിക്കും. ഇങ്ങനെ സംസ്ഥാനം. പിന്നെ പുറത്തെ ഷഡശ്രബാഹുവിന്റെ അർദ്ധം ഗുണ്യം, ജ്യാവർഗ്ഗം ഗുണകാരം, കോടിവർഗ്ഗം ഹാരകം, ഇങ്ങനെ രണ്ടാംഫലം വരുത്തൂ, ചാപീകരണത്തിങ്കൽ ചൊല്ലിയതുപോലെ. പിന്നെ ഈ രണ്ടാമതു തുടങ്ങിയുള്ള ഫലങ്ങളെ ഗുണ്യമാക്കി ഇഗ്ഗുണഹാരങ്ങളെക്കൊണ്ടുതന്നെ മീത്തെ മീത്തെ ഫലങ്ങളേയും ഉണ്ടാക്കൂ. ഇവിടെ പിന്നെ ഗുണഹാരങ്ങളെ അപവർത്തിക്കുമ്പോൾ ഒന്നു ഗുണകാരം, മൂന്നു ഹാരകം എന്നുവരും, ഏകരാശിജ്യാവു വ്യാസത്തിൽനാലൊന്ന് എന്നിട്ട്. എന്നാൽ അതതു ഫലത്തെ മൂന്നിൽതന്നെ ഹരിച്ചാൽ മീത്തെ മീത്തെ ഫലം വരും. പിന്നെ ഒന്ന്, മൂന്നു തുടങ്ങിയുള്ള ഓജസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. പിന്നെ ഫലങ്ങളിൽ ഓജങ്ങളുടെ യോഗത്തിങ്കന്നു യുഗ്മങ്ങളുടെ യോഗത്തെ കളയൂ. ശേഷം പരിധി. ഇങ്ങനെ വ്യാസംകൊണ്ടു പരിധിഭാഗാംശത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരം.



പരിലേഖം 26.

[പരിച്ഛേദം 26ൽ കിട=കില=പരിധി ദ്വാദശാംശം.

ഗട=ഗല=പരിധി ദ്വാദശാംശത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവ്=ഭ.

ഠഗ=പരിധി ദ്വാദശാംശത്തിന്റെ കോടി=കോ.

ലട=പരിധി ഷഡംശത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവു=വ.

(വ=വ്യാസാർദ്ധം)

=വൃത്തത്തിന്റെ അകത്തുള്ള ഷഡശ്രബാഹു.

ഠട എന്ന കർണ്ണത്തെ നീട്ടി കല്പിച്ചാൽ അതു വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തെ ഷഡശ്രകോണമായ മ യിൽ സ്പർശിക്കും.

$$\text{ചാപം കിട} = \frac{1}{12} \times \text{വൃത്തപരിധി}$$

$$\therefore \text{പരിധി} = 12 \times \text{ചാപം കിട.}$$

മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ട്,

$$\text{ചാപംകിട} = \text{വ} \times \frac{\text{ഭ}}{\text{കോ}} - \text{വ}.\frac{\text{ഭ}}{3\,\text{കോ}}.\frac{\text{ഭ}^2}{\text{കോ}^2} + \text{വ}\,\frac{\text{ഭ}}{5\,\text{കോ}}.\frac{\text{ഭ}^2}{\text{കോ}^2}.\frac{\text{ഭ}^2}{\text{കോ}^2} - \ldots\ldots$$

$$\therefore \text{പരിധി} = 12\text{വ}.\frac{\text{ഭ}}{\text{കോ}} - 12\text{വ}.\frac{\text{ഭ}}{3\,\text{കോ}}.\frac{\text{ഭ}^2}{\text{കോ}^2} + 12\text{വ}.\frac{\text{ഭ}}{5\,\text{കോ}}.\frac{\text{ഭ}^2}{\text{കോ}^2}.\frac{\text{ഭ}^2}{\text{കോ}^2} - \ldots\ldots$$

വ്യാസത്തെ വ്യ എന്നു കല്പിക്ക.

$$\text{ഭ} = \frac{\text{വ്യ}}{4};\ \text{ഭ}^2 = \frac{\text{വ്യ}^2}{16};\ \text{വ}^2 = \frac{\text{വ്യ}^2}{4}.$$

$$\therefore \text{കോ}^2 = \frac{\text{വ്യ}^2}{4} - \frac{\text{വ്യ}^2}{16} = \frac{12\text{വ്യ}^2}{54} = \frac{3\text{വ്യ}^2}{16}.$$

$$\therefore \frac{\text{വ}^2}{\text{കോ}^2} = \frac{\text{വ്യ}^2}{4} \times \frac{16}{3\text{വ്യ}^2} = \frac{4}{3}.$$

$$\left(12\ \text{വ}.\frac{\text{ഭ}}{\text{കോ}}\right)^2 = 144 \times \frac{\text{വ}^2}{\text{കോ}^2}.\text{ഭ}^2.$$

$$= \frac{144 \times 4}{3 \times 16}.\text{വ്യ}^2$$

$$= 12\ \text{വ്യ}^2.$$

$$\therefore \text{ആദ്യഫലവർഗ്ഗം} = \left(12.\ \text{വ}.\ \frac{\text{ഭ}}{\text{കോ}}\right)^2 = 12\ \text{വ്യ}^2.$$

$$\therefore \text{ആദ്യഫലം} = \sqrt{12\ \text{വ്യ}^2}.$$

$$\frac{\text{ഭ}^2}{\text{കോ}^2} = \frac{\text{വ്യ}^2}{16} \times \frac{16}{3\text{വ്യ}^2} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{അപ്പോൾ പരിധി} = \sqrt{12\text{വ്യ}^2} - \frac{\sqrt{12\text{വ്യ}^2}}{3.3} + \frac{\sqrt{12\text{വ്യ}^2}}{3^2.5} - \ldots\ldots\ldots$$

“വ്യാസവർഗ്ഗാദ്രവിഹതാൽ.......”എന്ന ക്രിയയുടെ ഉപപത്തിയാണിവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു്.]

പരിധ്യാനയനത്തിങ്കൽ ക്രിയാലാഘവത്തിന്നാവശ്യമായ സംസ്കാരം—അതിന്റെ ഉപപത്തിയും സൂക്ഷ്മതയും

എങ്ങനെ പിന്നെ ഇവിടെ പിന്നയും പിന്നയും മീത്തെ മീത്തെയുള്ള വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലങ്ങളെ സംസ്കരിച്ചിരിക്കുന്നതു പരിധിയോട് അടുത്തു വന്നു ഒടുക്കത്തെ സംസ്കാരം ചെയ്താൽ എന്ന പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ ഇച്ചൊല്ലിയ സംസ്കാരംതന്നെ സൂക്ഷ്മമോ അല്ലയോ എന്നു നടേ നിരൂപിക്കേണ്ടുവതു്. അതിനായിക്കൊണ്ടു് ഏതാനും ഒരു വിഷമസംഖ്യയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം സംസ്കരിച്ചനന്തരം വേറെ വെച്ചു സംസ്കാരം ചെയ്വൂ. അനന്തരം വേറെ ഇരിക്കുന്നതിൽ മീത്തെ വിഷമസംഖ്യാഹൃതഫലത്തെ സംസ്കരിച്ചു് അതിനു മീത്തെ സമസംഖ്യകൊണ്ടു സംസ്കാരം ചെയ്വൂ. എന്നാലുണ്ടാകുന്ന പരിധികൾ രണ്ടും തുല്യങ്ങൾ എന്നായ്വൂ ഇരിപ്പതു് എങ്കിൽ സംസ്കാരം സൂക്ഷ്മമെന്നു കല്പിച്ചാലും. എങ്ങനെ എന്നു്. രണ്ടു പരിധിക്കും സംഖ്യാസാമ്യമുണ്ടു് എന്നായ്വൂ ഇരിപ്പതു് എങ്കിൽ സംസ്കാരത്തിനു സർവ്വസാധാരണത്വമുണ്ടു്. എന്നാൽ മീത്തെ മീത്തെ വിഷമസംഖ്യാഹരണാനന്തരം സംസ്കാരം ചെയ്താലും അവ്വണ്ണം വരുമെത്രെ. എന്നാൽ മുമ്പിലെ സംഖ്യകൾകൊണ്ടു സംസ്കാരം ചെയ്തതു തന്നെ സൂക്ഷ്മമെത്രെ എന്നു് അറിയേണം. അവ്വണ്ണം വരു പിന്നെ.

മീത്തെ വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലവും അതിന്റെ സംസ്കാരഫലവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരവും മുമ്പിലെ സംസ്കാരത്തോടു തുല്യം എങ്കിലേ പരിധികൾ രണ്ടും തുല്യമായിട്ടു വരൂ. എന്നാൽ ഏതാനും ഒരു വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തോടു തുല്യമായിട്ടിരിപ്പൂ കീഴെ സംസ്കാരഫലവും മീത്തെ സംസ്കാരഫലവും ഉള്ള യോഗം. യാതൊരുപ്രകാരം തുല്യമായിട്ടു വരൂ അവ്വണ്ണം സംസ്കാരം ചെയ്യേണം.

ഇവിടെ രണ്ടു സംസ്കാരഹാരകങ്ങളും ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയോടു് ഒത്തുവരും എന്നായ്വൂ ഇരിപ്പതു് എങ്കിൽ രണ്ടു സംസ്കാരഫലങ്ങളുടെ യോഗം വിഷമസംഖ്യാഫലത്തോടു് ഒത്തിരിക്കും. ഇവിടെ രണ്ടു സംസ്കാരഹാരകവുംകൂടി ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയോടു തുല്യമായിട്ടു് ഒരിക്കലും സംഭവിക്കയില്ല. അതു് എങ്ങനെ എന്നു്. ഇവിടെ വിഷമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതിനോടു തുല്യമാകേണമെല്ലോ സംസ്കാരഹാരം. എന്നിട്ടു് ഇവിടെ ഏതൊരു വിഷമസംഖ്യയെ ഒടുക്കത്തെ ഹാ

രകമായിക്കൊണ്ടതു് അതിനു മീത്തെ വിഷമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതു നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകം എന്നു ചൊല്ലൂ എങ്കിൽ രണ്ടാംസംസ്കാരഹാരകം അതിനു മീത്തെ വിഷമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതു് എന്നു വരം; ഒരുപ്രകാരം ചൊല്ലേണമെല്ലോ എന്നിട്ട്. അപ്പോൾ ഇതു കീഴെ വിഷമസംഖ്യ ഇരട്ടിച്ചതിൽ നാലേറീട്ടിരിക്കും. എന്നിയെ ഇതു ഛിന്നവിഷമസംഖ്യയോടു തുല്യമാകുന്നതു എന്നാവൂ കല്പിച്ചതു് എങ്കിൽ കീഴേതു നാലു കുറഞ്ഞിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ രണ്ടു സംസ്കാരഹാരകവുംകൂടി ഛിന്നവിഷമസംഖ്യയോട് ഒത്തിരിക്കുമാറു വരാ ഒരു പ്രകാരവും സംസ്കാരഹാരകം.

എന്നിട്ടു രണ്ടു സംസ്കാരഹാരകവും ഒരു ഛിന്നവിഷമസംഖ്യയോട് അണവ് ഉണ്ടാവൂ എവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ അവ്വണ്ണം ചൊല്ലുകെ അപ്പോളുള്ളൂ. എന്നിട്ടിവിടെ രണ്ടു സംഖ്യകൊണ്ടു് അന്തരമുള്ളവറ്റെ ഇരട്ടിച്ചാൽ തങ്ങളിൽ നാലു് അന്തരിച്ചിരിക്കും. ഇവറ്റിൽ ഏതാനും കൂട്ടിത്താൻ കളഞ്ഞുതാനിരിക്കുന്നവറ്റെ ഇരട്ടിച്ചാലുമവ്വണ്ണംതന്നെ അന്തരമായിട്ടിരിക്കുമെത്രെ. എന്നിട്ട് ഒരു ഹാരകം ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയിങ്കന്നു രണ്ടു കുറഞ്ഞിരിപ്പൂ, മറേതു രണ്ടേറീട്ടുമിരിപ്പൂ. അവ്വണ്ണം വരേണമെന്നതിന്നായിക്കൊണ്ടു മീത്തെ സമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതു സംസ്കാരഹാരകമെന്നു ചൊല്ലീ.

അനന്തരമീവണ്ണമുണ്ടാകുമ്പോളെത്രയുണ്ടു് സംസ്കാരത്തിന്നു സ്ഥൗല്യമുള്ളതു് എന്നു് അറിവാനായിക്കൊണ്ടു രണ്ടു സംസ്കാരഫലങ്ങളുടെ യോഗവും നടുവിലെ വിഷമസംഖ്യാഫലവും തങ്ങളിലെ അന്തരാളത്തെ ഉണ്ടാക്കുവാനായിക്കൊണ്ടു സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ രണ്ടിനേയും വിഷമസംഖ്യയും ഇവ മൂന്നിനേയും സമച്ഛേദങ്ങളാക്കിച്ചമക്കൂ. എന്നാൽ തങ്ങളിൽ അന്തരിക്കാം.

[“യൽസംഖ്യയാത്ര ഹരണേ കൃതേ നിവൃത്താഹൃതിസ്തു ജാമിതയാ ।
തസ്യാ ഊർധ്വഗതാ യാ സമസംഖ്യാ തദ്ദലം ഗുണോന്തേ സ്യാൽ ॥
തദ്വർഗ്ഗോ രൂപയുതോ ഹാരോ വ്യാസാബ്ധിഘാതതഃ പ്രാഗ്വൽ ।
താഭ്യാമാപ്തം സ്വമൃണേ കൃതേ ധനേ ശോധനഞ്ച കരണീയം ॥
സൂക്ഷ്മഃ പരിധിസ്സസ്യാൽ ബഹുകൃത്വോ ഹരണതോതിസൂക്ഷ്മശ്ച” ॥ ഇതി.
(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

മൂലത്തിൽ ഒടുക്കത്തെ സംസ്കാരം എന്നു പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതു് ഈ ക്രിയയാണ്. ഏതാനും ഓജസംഖ്യാഹൃതമായിരിക്കുന്ന ഫലങ്ങളെ സംസ്കരിച്ചതിന്റെ ശേഷം ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യയുടെ മേലെയുള്ള സമസംഖ്യ

കൊണ്ടു് സംസ്കാരം ചെയ്താൽ സൂക്ഷ്മമായിരിക്കുന്ന പരിധി വരും. ഈ സംസ്കാരംതന്നെ എത്രത്തോളം സൂക്ഷ്മമാണെന്നും അവിടെയും സ്ഥൌല്യമെത്രയുണ്ടാവുമെന്നുമാണ് ഇവിടെ ചിന്തിക്കുവാനുള്ളത്.

ഇവിടെ ക − 2, ക എന്നു രണ്ടു് ഓജസംഖ്യകളെന്നും, സ_1, സ_2 ക്രമേണ ഉള്ള സംസ്കാരഹാരകങ്ങളെന്നും കല്പിക്കുക. വ്യ എന്നതു വ്യാസമെന്നും കല്പിക്ക.

അപ്പോൾ $\text{പരിധി} = 4\text{വ്യ}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\cdots + \frac{1}{\text{ക} - 2} - \frac{1}{\text{സ}_1}\right)$ എന്നും

$$\text{പരിധി} = 4\text{വ്യ}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\cdots + \frac{1}{\text{ക} - 2} - \frac{1}{\text{ക}} + \frac{1}{\text{സ}_2}\right)$$ എന്നും വരും.

ഈ പരിധികൾ രണ്ടും തുല്യങ്ങൾ എന്നു സങ്കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\cdots + \frac{1}{\text{ക} - 2} - \frac{1}{\text{സ}_1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\cdots + \frac{1}{\text{ക} - 2} - \frac{1}{\text{ക}} + \frac{1}{\text{സ}_2}$$

അതായതു് $\frac{1}{\text{സ}_2} - \frac{1}{\text{ക}} = -\frac{1}{\text{സ}_1}$ എന്നു വരും.

$$\frac{1}{\text{ക}} = \frac{1}{\text{സ}_2} + \frac{1}{\text{സ}_1}.$$

ഇങ്ങനെയിരിക്കുന്നേടത്തു മേലെ മേലെയുള്ള സംസ്കാരങ്ങൾ ചെയ്യേണമെന്നില്ല. എന്തെന്നാൽ ആദ്യത്തെ സംസ്കാരം സൂക്ഷ്മമാകുന്നു. അതായതു സംസ്കാരത്തിന്നു സർവ്വസാധാരണതയുണ്ടു്.

ഇവിടെ സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യയുടെ ഇരട്ടിയാണെങ്കിൽ, $\frac{1}{\text{സ}_2} + \frac{1}{\text{സ}_1} = \frac{1}{2\text{ക}} + \frac{1}{2\text{ക}} = \frac{1}{\text{ക}}$.

അപ്പോൾ സംസ്കാരം സൂക്ഷ്മമാകണമെങ്കിൽ സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യയുടെ ഇരട്ടിയാകണമെന്നു വന്നു.

എന്നാൽ പ്രകൃതവിഷയത്തിൽ ഇതൊരിക്കലും സംഭവിക്കുകയില്ല. ക എന്നൊരു വിഷമസംഖ്യയെ അപേക്ഷിച്ച സംസ്കാരഹാരകം 2ക എന്നാണെങ്കിൽ അതിനു മീതെയുള്ള ക + 2 എന്ന വിഷമസംഖ്യയെ അപേക്ഷിച്ച സംസ്കാരഹാരകം 2ക + 4 ആകണമല്ലോ. "ഒരുപ്രകാരംതന്നെ ചൊല്ലേണമല്ലോ" എന്നു പറഞ്ഞതിന്റെ അർത്ഥം ഇങ്ങനെയാണു്. അപ്പോൾ ഒരു വിഷമസംഖ്യയെ അപേക്ഷിച്ച് അതിന്റെ ഇരുപുറവുമുള്ള സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ ഒരിക്കലും വിഷമസംഖ്യയുടെ ഇരട്ടിയാവുകയില്ല. സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിലൊന്നു് ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയിൽനിന്നു രണ്ടുകുറഞ്ഞിരിക്കും, മറ്റേതു രണ്ടേറിയുമിരിക്കും. ഇവതമ്മിലുള്ള അന്തരവും നാലായിട്ടിരിക്കും. ഈ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിലും ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്താലും അന്തരം നാലുതന്നെയായിട്ടിരിക്കും. അപ്പോൾ ഇവിടെ സംസ്കാരത്തിന്നു സർവ്വസാധാരണതയില്ല. അതുകൊണ്ടു മേലെ മേലെ സംസ്കാരങ്ങളെ ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ ഫലങ്ങൾ സൂക്ഷ്മതരങ്ങളായിട്ടു വരും എന്നേ ഉള്ളൂ. ചിറ്റ്ല്ലൂ

വിഷമസംഖ്യയോടു തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന സംസ്കാരഹാരകങ്ങളെ കല്പിക്കുവാൻ സാധിക്കാത്ത സ്ഥിതിക്ക്, അതിനോട് അടുത്തുള്ള സംസ്കാരഹാരകങ്ങളെ കല്പിക്കുവാനേ നിവൃത്തിയുള്ളൂ. ഇങ്ങനെ കല്പിച്ചിരിക്കുന്ന സംസ്കാരത്തിൽ സ്ഥൗല്യമെത്രയുണ്ടെന്നറിവാൻ സംസ്കാരഫലയോഗവും വിഷമസംഖ്യാഫലവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം കാണേണ്ടുകയാൽ, അവയെ സമച്ഛേദങ്ങളാക്കേണം. അജ്ഞാതങ്ങളായിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ സമച്ഛേദങ്ങളാക്കുവാനുള്ള ഉപായത്തെ മേല്പോട്ടു പറയുന്നു.]

ഇവിടെ സംഖ്യ അറിഞ്ഞേ സമച്ഛേദങ്ങളാക്കാവൂ. സംഖ്യ ഇങ്ങനെ എന്നു വരുകിൽ എല്ലാടത്തേയ്ക്കും കൊള്ളരുതെന്നു വരും. എന്നേടത്തേയ്ക്കു സംഖ്യ അറിയാതേയും സമച്ഛേദങ്ങളാക്കുവാനുമുണ്ടുപായം, ധനർണ്ണപരികല്പനംകൊണ്ട്. അത് എങ്ങനെ എന്ന്. അതിനുണ്ട് ചൊല്ലീട്ട്—

"ഋണമൃണധനയോർഘാതോ
ധനമൃണയോർധനവധോ ധനം ഭവതി" എന്നു തുടങ്ങീട്ട്.

യാതൊരു രാശി ഋണഭൂതമായിരിക്കുന്നൂ, യാതൊരു രാശി ധനഭൂതമായിട്ടും ഇരിക്കുന്നൂതും അവ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചുണ്ടായ സംഖ്യയെ ഋണമായിട്ടിരിപ്പൊന്ന് എന്നറിയേണം. പിന്നെ ധനമായിട്ടിരിക്കുന്ന രണ്ടു രാശികൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ധനങ്ങളായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്, പിന്നെ ഋണങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ധനമായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്, എന്നിങ്ങനെ അറിയേണം.

പിന്നെ സംഖ്യ അറിയാതെ രാശിവെക്കംപ്രകാരം ഇങ്ങനെ എന്നും അറിയേണം. അത് എങ്ങനെ എന്ന്. ഇവിടെ സംഖ്യ അറിയാത്ത രാശി എത്ര സംഖ്യയായിട്ടുള്ളൂ എന്നുണ്ടല്ലോ ഉള്ളൂ അത്ര സംഖ്യകൊണ്ട് അതതു സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു മീത്തെ സ്ഥാനത്തു കരേറുന്നു എന്നു കല്പിക്കുന്നത്, മറ്റെല്ലാംപോലെ ഒന്ന്, പത്ത്, നൂറ് എന്നിങ്ങനെ പതിന്മടങ്ങല്ല സ്ഥാനാന്തരങ്ങളെ കല്പിക്കുന്നൂ. ഈവണ്ണമാകുമ്പോളാദിയിങ്കലെ രൂപസ്ഥാനം. അവിടെ ആ രാശിയിങ്കലെ സംഖ്യയോളം തികഞ്ഞാൽ രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു കരേറും. എന്നിട്ടു രണ്ടാമതു രാശിസ്ഥാനം. രണ്ടാംസ്ഥാനത്ത് ഒന്നുണ്ടാകുമ്പോൾ രാശിതുല്യസംഖ്യ അത് എന്ന് അറിയേണ്ടൂ. എന്നിട്ടു രണ്ടാംസ്ഥാനത്തിന്നും അത്ര സംഖ്യകൊണ്ടു കരേറുകയാൽ മൂന്നാംസ്ഥാനം രാശിയുടെ വർഗ്ഗസ്ഥാനം. പിന്നേയുമവ്വണ്ണമാകയാൽ നാലാമതു ഘനസ്ഥാനം. പിന്നെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗസ്ഥാനം. അവ്വണ്ണം സമപഞ്ചഘാതസമഷൾഘാ

താദി സ്ഥാനങ്ങൾ മീത്തെ മീത്തേത്ത് എന്നു അറിയേണ്ടു. അതുണ്ടു ചൊല്ലീട്ട് —

"അവ്യക്തവർഗ്ഗഘനവർഗ്ഗവർഗ്ഗപഞ്ചഘാതഷട്ഘാതാദീനാം സ്ഥാനാനി" എന്നു തുടങ്ങീട്ട്.

ഇവിടെ ഒട്ടക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യേ രാശി എന്നു കല്പിച്ചുവെക്കുംപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു. അവിടെ രണ്ടു വരിയായി ചില ഖണ്ഡങ്ങളെ എഴുത്തു, ഓരോ സ്ഥാനം ഓരോ ഖണ്ഡത്തിൽ അകപ്പെടുമാറ്. അതിൽ മീത്തെ വരി അംശകോഷ്ഠങ്ങൾ, കീഴെ വരി ഛേദകോഷ്ഠങ്ങൾ എന്നിങ്ങനെ കല്പിച്ചുവെക്കുംപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു. വിഷമസംഖ്യ | 1 | 0 |. ഇവിടെ ഋണഭൂതമായിരിക്കുന്ന രാശിക്ക് ഏതാനും ഒരു അടയാളം കൂടി വെച്ചുകൊള്ളണം. ശൂന്യത്തിന്നു യാതൊരവസ്ഥ വെക്കുന്നത് അതു താൻ. ഇവിടെ നടേത്തെ സംസ്കാരഘാതകം രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിങ്കന്നു രണ്ടു കറയും. അതിന്നു രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു രണ്ട്, നടേത്തെ സ്ഥാനത്ത് ഋണരൂപമായിട്ടു രണ്ട് | 2° | 2° |. പിന്നെ രണ്ടാം സംസ്കാരഘാതകം രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിങ്കന്നു രണ്ടേറും. അതിന്നു രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു രാശി ഇരട്ടി എന്നിട്ടു രണ്ട്, നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ധനരൂപമായിട്ടു രണ്ടു രൂപവും | 2 | 2 | ഇങ്ങനെ വെക്കും പ്രകാരം.

[അവ്യക്തരാശിയെ വെച്ചു ക്രിയ ചെയ്യുമ്പോൾ രണ്ടു സംഗതികൾ മനസ്സിലാക്കുവാനുണ്ട്. (1) ധനർണ്ണപരികല്പനം. (2) സംഖ്യയെ വെക്കുംപ്രകാരം (കവടികൊണ്ടു ക്രിയ ചെയ്യുന്നേടത്ത്).

(1) ധനർണ്ണപരികല്പനം:—

ധനം × ഋണം = ഋണം.

ധനം × ധനം = ധനം.

ഋണം × ഋണം = ധനം.

(2) സംഖ്യയെ വെക്കുംപ്രകാരം:—ഒരു സംഖ്യയെ വെക്കുമ്പോൾ ഏകം, ദശം, ശതം എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള സ്ഥാനങ്ങളെ കല്പിക്കുന്നു. സംഖ്യകൾ പത്തിൽ പത്തിൽ ഓരോ സ്ഥാനം കരേറുന്നതായിട്ടു സാധാരണ കല്പിക്കുന്നു. ഇവിടെ ആദ്യത്തെ സ്ഥാനം രൂപസ്ഥാനം; രണ്ടാംസ്ഥാനം പത്താകുന്ന രാശിസ്ഥാനം; മൂന്നാമത്തേതു പത്തിന്റെ വർഗ്ഗ(നൂറ്)സ്ഥാനം; നാലാമത്തേതു പത്തിന്റെ ഘന(സഹസ്ര)സ്ഥാനം. ഇങ്ങനെ സംഖ്യകളുടെ സംസ്ഥാനം വ്യവഹാരാർത്ഥമായി കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ പ്രകാരംതന്നെ സംഖ്യകളെ എട്ടിൽ എട്ടിൽ കരേറുന്നതായിട്ടു കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആദ്യത്തേതു രൂപസ്ഥാനം. അവിടെ എട്ടു സംഖ്യ ഉണ്ടാകുമ്പോൾ എട്ടാകുന്ന രാശിസ്ഥാനത്തു

ഒന്നുണ്ടാകും. അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തേത് എട്ടാകുന്ന രാശിസ്ഥാനം. മൂന്നാമത്തേത് എട്ടിന്റെ വർഗ്ഗസ്ഥാനം ഇങ്ങനെ. പത്തിന്റെയും എട്ടിന്റെയും സ്ഥാനത്ത് ഒരു വ്യക്തിരാശി(ര)യെ കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, ആദ്യത്തേതു രൂപസ്ഥാനം തന്നെ. രണ്ടാമത്തേതു ര എന്ന രാശിസ്ഥാനം. മൂന്നാമത്തേതു ര^2 എന്ന വർഗ്ഗസ്ഥാനം. നാലാമത്തേതു ര^3 എന്ന ഘനസ്ഥാനം. പിന്നെ ഇവറ്റെ വെക്കുംപ്രകാരം. രണ്ടു വരിയായിട്ടു ചില ഖണ്ഡങ്ങളെ വരക്ക. മുകളിലെ വരി അംശം, താഴത്തേതു ഛേദം. ഓരോ ഖണ്ഡം ഓരോ സ്ഥാനമെന്നും കല്പിക്കുക. ആദ്യത്തെ ഖണ്ഡം രൂപസ്ഥാനം, രണ്ടാംഖണ്ഡം രാശിസ്ഥാനം, മൂന്നാംഖണ്ഡം രാശിവർഗ്ഗസ്ഥാനം. ഇങ്ങനെ മേല്പോട്ടുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ. സംഖ്യ ഋണമെന്നു കാണിക്കുവാൻ സംഖ്യയുടെ മീതെ ഒരു ഠംവെച്ചാൽ മതി.]

പിന്നെ ഇവ മൂന്നും ഛേദങ്ങൾ എന്നു കല്പിച്ച് ഇവറ്റിന്ന് ഓരോ രൂപം അംശമെന്നും കല്പിച്ച് അന്യോന്യഹാരാഭിഹതൌ ഹരാംശൌ രാശ്യോസ്സമച്ഛേദവിധാനമേവം, എന്നതിന്നു തക്കവണ്ണം സമച്ഛേദങ്ങളാക്കുമ്പോൾ ഇവറ്റെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലങ്ങൾ സമച്ഛേദങ്ങളായിട്ടുണ്ടാകും. ഛേദമൊന്നെ വരും. അതാകുന്നതു നടേത്തേതു ശൂന്യം, രണ്ടാം സ്ഥാനത്തു ഋണമായിട്ടു നാല്, മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു ഋണവും ധനവും നന്നാലുണ്ടാകകൊണ്ടു തങ്ങളിൽ മാറീട്ടു ശൂന്യം, നാലാംസ്ഥാനത്ത് നാല്. ഇങ്ങനെ ഛേദസംഖ്യ. പിന്നെ വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച അംശം നടേത്തെ സ്ഥാനത്ത് ഋണമായിട്ടു നാല്, രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു ശൂന്യം, മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു നാല്. രണ്ടാംസംസ്കാരഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തിങ്കലെ അംശം പിന്നെ. നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം, രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു ഋണമായിട്ടു രണ്ട്, മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു ധനമായിട്ടു രണ്ട്. പിന്നെ നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തിങ്കലെ അംശത്തിന്നു നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം, രണ്ടാംസ്ഥാനത്തും മൂന്നാംസ്ഥാനത്തും ഈരണ്ട്. സംസ്കാരഫലയോഗം പിന്നെ നടേത്തെ സ്ഥാനങ്ങൾ രണ്ടിങ്കലും ശൂന്യം മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു നാല്. വിഷമസംഖ്യാഫലം $\underline{4}\,\Big|\,\frac{4}{0}\,\frac{0}{4^{\circ}}\,\Big|\,\frac{4^{\circ}}{0}$; പ്രഥമഹാരഫലം $\underline{4}\,\Big|\,\frac{2}{0}\,\Big|\,\frac{2}{4^{\circ}}\,\Big|\,\frac{0}{0}$; ദ്വിതീയഹാരഫലം $\underline{4}\,\Big|\,\frac{2}{0}\,\Big|\,\frac{2^{\circ}}{4^{\circ}}\,\Big|\,\frac{0}{0}$; സംസ്കാരഫലയോഗം $\underline{4}\,\frac{4}{0}\,\Big|\,\frac{0}{4^{\circ}}\,\Big|\,\frac{0}{0}$. എന്നാൽ സംസ്കാരഫലയോഗം വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തിൽ നാലേറും. എന്നാൽ മീതെത്തസ്സമസംഖ്യ ഇരട്ടിച്ചതു സംസ്കാരഹാരകമെന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യാഫലത്തെ തന്റെ മൂലം കളഞ്ഞിരിക്കുന്നതുകൊണ്ടു നാലിൽ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന

വ്യാസത്തെ ഹരിച്ച ഫലം സ്ഥൌല്യമാകുന്ന അംശം എന്ന് അറിയേണ്ടുവത്. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ സംസ്കാരഫലം വേണ്ടതിങ്കന്ന് ഏറിപ്പോയെല്ലോ.

എന്നിട്ടു സംസ്കാരാന്തരത്തെ ചൊല്ലുംപ്രകാരം. ഇവിടെ രണ്ടു ഹാരകത്തിലും ഓരോന്നു കൂട്ടിക്കൊള്ളൂ എന്നു കല്പിക്കുന്നത്. ഇവിടെ മൂന്നു ഹാരകങ്ങളും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതെല്ലോ സമച്ഛേദമാകുന്നത്; അതതിന്റെ അംശമാകുന്നതു മററ ഹാരകങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചത്. അവിടെ വിഷമസംഖ്യാംശമാകുന്നതു സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചത്. ഇവിടെ അസ്സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ രണ്ടിങ്കലും ഓരോ സംഖ്യ കൂട്ടി തങ്ങളിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ എത്ര ഉണ്ട് ഏറുവതു നടേത്തേതിൽ എന്നു ചൊല്ലുന്നത്. അവിടെ ഒന്നിൽ കൂട്ടിയ ഒന്നിനെ മററെ ഹാരകംകൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. അവിടെ കൂട്ടിയതിനെ മററെ ഹാരകത്തിൽ ഒന്നു കൂട്ടിയതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ അവ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. അതു് ഓരോന്നു കൂട്ടിയാൽ ഏറുന്ന അംശമാകുന്നത്. ഇവിടെ രണ്ടു ഹാരകങ്ങളേയും ഒരു രൂപംകൊണ്ടെല്ലൊ ഗുണിക്കേണ്ടൂ. എന്നിട്ട് ഈ സംസ്കാരഹാരയോഗത്തെ രൂപത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചുകൊള്ളാം. സംസ്കാരഹാരയോഗം പിന്നെ നാലിൽ ഗുണിച്ച രാശിയോടൊക്കും, ഒരു ഹാരകം രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിൽ രണ്ടു കുറയും മററതു രണ്ടേറും എന്നിട്ട്. എന്നാൽ സമച്ഛേദമായിരിക്കുന്ന വിഷമസംഖ്യേടെ അംശത്തിങ്കൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച രാശിയും ഒരു രൂപവുമേറും. നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചത്. അവിടെ രണ്ടാംഹാരകത്തിൽ ഒന്നേറുകകൊണ്ടു രാശിതന്നെ ഏറുമെത്രെ. ദ്വിതീയഹാരാംശത്തിങ്കലും ഇത്രതന്നെ ഏറുമെത്രെ. എന്നാൽ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളുടെ അംശയോഗത്തിങ്കൽ മുമ്പിലേതിൽ രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതു് ഏറും. വിഷമസംഖ്യാംശത്തിങ്കൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച രാശിയും ഒരു രൂപവും ഏറും. എന്നാൽ ഇപ്പോൾ രാശി സ്ഥാനത്തിങ്കലുംകൂടി സ്ഥൌല്യമുണ്ടായി എന്നു വന്നു. മുമ്പിൽ രൂപസ്ഥാനത്തിങ്കലേ സ്ഥൌല്യമുള്ളൂ.

[ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യ=ര.

ആദ്യത്തെ സംസ്കാരഹാരകം=2ര – 2.

രണ്ടാമത്തെ സംസ്കാരഹാരകം=2ര + 2.

ഇവയുടെ അംശം നാലിൽ ഗുണിച്ച വ്യാസമാണെങ്കിലും, എളുപ്പത്തിനുവേണ്ടി അംശത്തെ രൂപം എന്നു കല്പിക്കുന്നു.

$$\text{സ്ഥൗല്യം} = \frac{1}{2\text{ര}-2} - \frac{1}{\text{ര}} + \frac{1}{2\text{ര}+2}.$$

$$\text{ഇവയുടെ സമച്ഛേദം} = \text{ര}(2\text{ര}-2)\ (2\text{ര}+2)$$

ഛേദങ്ങളുടെ ഘാതം സമച്ഛേദമാകുന്നു. അതതിന്റെ അംശം മറ്റേവ രണ്ടിന്റേയും ഛേദങ്ങളുടെ ഘാതമായിരിക്കും.

$$\text{സമച്ഛേദം} = \text{ര}(2\text{ര}-2)\ (2\text{ര}+2)$$
$$= \text{ര}(4\text{ര}^2 - 4\text{ര} + 4\text{ര} - 4)$$
$$= 4\text{ര}^3 - 4\text{ര}^2 + 4\text{ര}^2 - 4\text{ര}.$$
$$= 4\text{ര}^3 - 4\text{ര}.$$

4	0	4°	0

$$\text{ആദ്യസംസ്കാരഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം} = \frac{\text{ര}(2\text{ര}+2)}{4\text{ര}^3-4\text{ര}}$$
$$= \frac{2\text{ര}^2+2\text{ര}}{4\text{ര}^3-4\text{ര}}.$$

	2	2	0
4	0	4°	0

$$\text{ദ്വിതീയഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം} = \frac{\text{ര}(2\text{ര}-2)}{4\text{ര}^3-4\text{ര}}$$
$$= \frac{2\text{ര}^2-2\text{ര}}{4\text{ര}^3-4\text{ര}}$$

	2	2°	0
4	0	4°	0

$$\text{വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലം} = \frac{(2\text{ര}+2)\ (2\text{ര}-2)}{4\text{ര}^3-4\text{ര}}$$
$$= \frac{4\text{ര}^2-4}{4\text{ര}^3-4\text{ര}}$$

	4	0	4°
4	0	4°	0

$$\text{സംസ്കാരഹാരഫലയോഗം} = \frac{2\text{ര}^2+2\text{ര}+2\text{ര}^2-2\text{ര}}{4\text{ര}^3-4\text{ര}}$$
$$= \frac{4\text{ര}^2}{4\text{ര}^3-4\text{ര}}$$

	4	0	0
4	0	4°	0

$$\text{സംസ്കാരഫലയോഗം} - \text{വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലം} = \frac{4\text{ര}^2-4\text{ര}^2+4}{4\text{ര}^3-4\text{ര}} = \frac{4}{4\text{ര}^3-4\text{ര}}$$

അപ്പോൾ സംസ്കാരഫലയോഗം വേണ്ടതിലധികം ഏറിപ്പോയി. സംസ്കാരഹാരകങ്ങളെ വർദ്ധിപ്പിക്കേണം. അതുകൊണ്ടു രണ്ടിലും ഓരോന്നു കൂട്ടും.

$$\text{അപ്പോൾ ആദ്യസംസ്കാരഹാരകം} = 2\text{ര}-2+1 = 2\text{ര}-1$$
$$\text{രണ്ടാംസംസ്കാരഹാരകം} = 2\text{ര}+2+1 = 2\text{ര}+3$$
$$\text{വിഷമസംഖ്യ} = \text{ര}.$$
$$\text{ഇവയുടെ സമച്ഛേദം} = \text{ര}(2\text{ര}-1)\ (2\text{ര}+3).$$

വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലാംശത്തിൽ മുമ്പിലത്തേതിൽ ഏറുന്ന അംശം.

$$= (2\text{ര}+3)\ (2\text{ര}-1) - (2\text{ര}+2)\ (2\text{ര}-2)$$
$$= (2\text{ര}+3)\ (2\text{ര}-2) + 1\times(2\text{ര}+3) - (2\text{ര}+2)\ (2\text{ര}-2).$$
$$= (2\text{ര}+2)\ (2\text{ര}-2) + 1\times(2\text{ര}+3) + 1\times(2\text{ര}-2) - (2\text{ര}+2)\ (2\text{ര}-2)$$
$$= 1\times(2\text{ര}-2) + 1\times(2\text{ര}+3).$$

ഒരു ഹാരകത്തിലേറിയ ഒന്നുകൊണ്ടു മററ ഹാരകത്തെ ഗുണിക്ക.

$$1\times(2\text{ര}-2)=2\text{ര}-2.$$

$(2\text{ര}-2)$ എന്ന ഹാരകത്തിൽ കൂട്ടിയ ഒന്നുകൊണ്ടു മററ ഹാരകത്തിൽ ഒന്നു കൂട്ടിയതിനെ ഗുണിക്ക.

$$1\times(2\text{ര}+3)=2\text{ര}+3.$$

ഇവയുടെ യോഗം $=2\text{ര}-2+2\text{ര}+3=4\text{ര}+1.$

ഇതു് ഏറിയ ഭാഗമാകുന്നതു്.

$\therefore$ വിഷമസംഖ്യാഫലാംശത്തിൽ മുഖിലത്തേതിൽ ഏറിയ ഭാഗം $=4\text{ര}+1.$

ആദ്യസംസ്കാരഫലാംശം $=\text{ര}(2\text{ര}+3)$

ദ്വിതീയസംസ്കാരഫലാംശം $=\text{ര}(2\text{ര}-1)$

ആദ്യസംസ്കാരഫലാംശത്തിൽ ഏറുന്ന അംശം $=\text{ര}(2\text{ര}+3)-\text{ര}(2\text{ര}+2)=\text{ര}.$

ദ്വിതീയസംസ്കാരഫലാംശത്തിലേറുന്ന അംശം $=\text{ര}(2\text{ര}-1)-\text{ര}\times(2\text{ര}-2)=\text{ര}.$

സംസ്കാരഫലയോഗാംശത്തിലേറുന്ന അംശം $=2\text{ര}.$

ഇവിടെ വിഷമസംഖ്യാംശഫലം സംസ്കാരഫലയോഗത്തെക്കാളേറുന്നു.

ഇഃ ഏറുന്ന അംശം $=4\text{ര}+1-2\text{ര}=2\text{ര}+1.$

അപ്പോൾ രാശിസ്ഥാനത്തുംകൂടി സ്ഥൌല്യം വന്നു. മുമ്പിൽ രൂപസ്ഥാനത്തു മാത്രമേ സ്ഥൌല്യമുണ്ടായിരുന്നുള്ളൂ.]

എന്നാൽ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ ഒന്നു തികയെ കൂട്ടരുതെന്നു വന്നു. എങ്കിൽ പിന്നെ എത്ര കൂട്ടീ? എന്നിട്ടു് ഒന്നു തികയെ കൂട്ടിയാരെ വിഷമസംഖ്യേടെ അംശത്തിങ്കൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച രാശി ഏറും, മറെറവററിന്റെ യോഗത്തിങ്കൽ രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചതു് ഏറും. ഇവിടെ പിന്നെ, തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപത്തെ കൂട്ടുമ്പോൾ ഇതിൽ പാതി രൂപമേ ഏറി ഇരിപ്പൂ, സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ ഇരട്ടിച്ച രാശിയോടു മിക്കതും തുല്യമെല്ലോ, എന്നിട്ടു്. ഇവിടെ രൂപാന്തരം ഒന്നേ ഉള്ളൂ. നാലു രൂപാന്തരം ഉണ്ടാകയും വേണം, വിഷമസംഖ്യാംശത്തിങ്കൽ മറെറവ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തിങ്കന്നു നാലു കുറയുമെല്ലോ, എന്നിട്ടു്. എന്നാൽ മുമ്പിൽ കല്പിച്ച സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ, തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലു രൂപങ്ങൾ കൂട്ടേണം. അപ്പോൾ വിഷമസംഖ്യയിങ്കലെ അംശത്തിങ്കൽ മിക്കവാറും എട്ടുരൂപമേറും, മറെറവ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തിങ്കൽ നാലുരൂപമേറും. എന്നാൽ ഇപ്പോൾ മിക്കതും സൂക്ഷ്മമായി എന്നു കല്പിച്ചിട്ടു്, തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലു രൂപങ്ങൾ കൂട്ടുവാൻ ചൊല്ലീ ആചാര്യൻ.

ഇവിടെ ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയിൽ രണ്ടു കുറഞ്ഞതും രണ്ടു് ഏറിയതും എല്ലോ മുമ്പിൽ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളായിട്ടു കല്പിച്ചതു്. വിഷമസംഖ്യയുടെ അടുത്തു് ഇരുപുറവുമുള്ള സമസംഖ്യകളെ ഇരട്ടി

ഷ്ടവ. പിന്നെവ ആകുന്നതു്. എന്നാലിവറെറ സമാനജാതികളാക്കുമ്പോൾ ഇരട്ടിച്ച സമസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ നാലു് ഏറിയതു ഛേദം, ഇരട്ടിച്ച സമസംഖ്യതന്നെ അംശമാകുന്നതു്. ഇവ രണ്ടിനേയും നാലിൽ അപവർത്തിച്ചാൽ സമസംഖ്യേടെ അർദ്ധം അംശമാകുന്നതു്, സമസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ രൂപം കൂടിയതു ഛേദമാകുന്നതു്. എന്നിട്ടു ചൊല്ലീ.

“തസ്യാ ഊർദ്ധ്വഗതാ യാ
സമസംഖ്യാ തദ്ദളം ഗുണോന്തേ സ്യാൽ ।
തദ്വർഗ്ഗോ രൂപയുതോ ഹാരഃ” ॥ എന്നിങ്ങനെ.

[മുമ്പിലത്തെ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ ഒന്നു തികയക്കൂട്ടിയാൽ സ്ഥൗല്യം വർദ്ധിക്കുന്നു. അപ്പോൾ ഒന്നു കൂട്ടുവാൻ വയ്യ. രാശിസ്ഥാനത്തും സ്ഥൗല്യമുണ്ടാകയാൽ രാശിസ്ഥാനത്തും സംഖ്യയുള്ള ഒരു സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപത്തെ കൂട്ടേണമെന്നും വന്നു. അതുകൊണ്ടു സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ, തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപത്തെ കൂട്ടി പരീക്ഷിക്കാം.

അപ്പോൾ സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ $\left(2ര-2+\frac{1}{2ര-2}\right)$, $\left(2ര+2+\frac{1}{2ര+2}\right)$ ആയിട്ടു തീരും. “എല്ലായിടത്തും ഒരു പ്രകാരംതന്നെ ചൊല്ലേണമല്ലോ.” എന്നിട്ടു് $(2ര-2)$ എന്ന ഹാരകത്തിൽ $\frac{1}{2ര-2}$ കൂട്ടി. $(2ര+2)$ എന്ന ഹാരകത്തിൽ $\frac{1}{2ര+2}$ എന്നു കൂട്ടി. ഹാരകങ്ങളിൽ ഓരോന്നു കൂട്ടിയപ്പോൾ, വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലാംശത്തിൽ ഏകദേശം നാലുരാശിയും സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലയോഗത്തിൽ രണ്ടു രാശിയുമാണല്ലോ ഏറിയ അംശങ്ങളായിരുന്നതു്. എന്നാൽ തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപം കൂട്ടുമ്പോൾ സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ രാശിയുടെ മിക്കവാറും ഇരട്ടിയാകകൊണ്ടു്, അംശങ്ങളിൽ ഏറിയ ഭാഗങ്ങളും മുമ്പിലത്തേവററിൽ പകുതി രൂപങ്ങൾ ആയിട്ടിരിക്കും. അപ്പോൾ വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലാംശത്തിൽ ഏറിയഭാഗം രണ്ടു രൂപമെന്നും സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലയോഗാംശത്തിൽ ഏറിയ ഭാഗം ഒരു രൂപമെന്നും വരും. വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലാംശത്തിൽ സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലാംശത്തേക്കാൾ ഏറുന്നതു് ഒരു രൂപം. $\frac{4}{4ര^3+4ര}$ എന്ന സ്ഥൗല്യത്തിങ്കൽ സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലയോഗാംശം വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലാംശത്തിങ്കന്നു നാലു രൂപംകൊണ്ടു് ഏറിയിരിക്കുന്നു. ഈ സ്ഥൗല്യത്തെ പരിഹരിക്കുവാൻ വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലാംശത്തിങ്കൽ നാലു രൂപമേറിയിരിക്കണം. അപ്പോൾ, തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപങ്ങൾ അതാതു ഹാരകങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാൽ പോരാ എന്നും തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലുരൂപങ്ങൾ കൂട്ടേണമെന്നും വന്നു. ഇപ്പോൾ മിക്കതും സൂക്ഷ്മമായി എന്നു കല്പിക്കാം. ഇവിടെ സ്ഥൗല്യങ്ങൾ വരുത്തുന്നേടത്തെ

ല്യം, സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ അവയെ അപേക്ഷിച്ച വളരെ ചെറിയ സംഖ്യ കൂട്ടുമ്പോൾ ഛേദങ്ങൾക്ക വ്യത്യാസം വരികയില്ലെന്നു സങ്കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഈ വിഷയത്തെ പ്രകാരാന്തരേണയും വിശദീകരിക്കാം. ആദ്യം സംസ്കാരഹാരകങ്ങളെ സമസംഖ്യയിഷ്ടിരട്ടി എന്നു കല്പിച്ചു. അവിടെ സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലയോഗം വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലത്തേക്കാൾ $\frac{4}{4ര^3-4ര}$ കൊണ്ട് ഏറിപ്പോയി. അപ്പോൾ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ രൂപത്തെ കൂട്ടി.

അപ്പോൾ സ്ഥൌല്യം $=\frac{1}{2ര-1}-\frac{1}{ര}+\frac{1}{2ര+3}$

$$=\frac{ര(2ര+3)-(2ര-1)(2ര+3)+ര(2ര-1)}{ര(2ര-1)(2ര+3)}$$

$$=\frac{2ര^2+3ര-4ര^2-6ര+2ര+3+2ര^2-ര}{ര(2ര-1)(2ര+3)}$$

$$=\frac{-2ര+3}{ര(2ര-1)(2ര+3)} \text{ (ഋണരൂപം)}$$

ഇവിടെ വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലം സംസ്കാരഫലയോഗത്തേക്കാളേറി. രാശിസ്ഥാനത്തും സ്ഥൌല്യം വന്നു.

അപ്പോൾ തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപത്തെ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ കൂട്ടുവാൻ നിശ്ചയിച്ചു.

അവിടെ സ്ഥൌല്യം $=\dfrac{1}{2ര-2+\frac{1}{2ര-2}}-\frac{1}{ര}+\dfrac{1}{2ര+2+\frac{1}{2ര+2}}$

$$=\left\{ര\left(2ര+2+\frac{1}{2ര+2}\right)-\left(2ര-2+\frac{1}{2ര-2}\right)\times\left(2ര+2+\frac{1}{2ര+2}\right)+ര\left(2ര-2+\frac{1}{2ര-2}\right)\right\}\div\text{ഛേദം}$$

$$=\frac{2ര^2+2ര+\frac{1}{2}-4ര^2+4-1-1+2ര^2-2ര+\frac{1}{2}}{\text{ഛേദം}}$$

$$=\frac{1}{\text{ഛേദം}} \text{ (മിക്കവാറും)}$$

ഇവിടെ വിഷമസംഖ്യയെ ഒഴിച്ചുള്ള സമസംഖ്യയുടെ പകുതിയെന്നും സംസ്കാരഹാരകഘാതാപ്തമായിരിക്കുന്ന രൂപം വളരെ ചെറുതാകകൊണ്ടുപേക്ഷിക്കാമെന്നും കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഇവിടെ സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലയോഗം വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലത്തേക്കാൾ ഏറിപ്പോയി. ആദ്യം സ്ഥൌല്യം $\frac{4}{\text{ഛേദം}}$. സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപം ചേർത്താൽ സ്ഥൌല്യം $\frac{3}{\text{ഛേദം}}$. അപ്പോൾ തന്നെ

ക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലു രൂപം ചേർത്താൽ സ്ഥൌല്യം മിക്കവാറും ശൂന്യമാകുവാൻ ന്യായമുണ്ട്. അപ്പോൾ അങ്ങനെ കല്പിക്ക. ഇവിടെ ഛേദത്തിൽ വ്യത്യാസം വരുന്നില്ലെന്നു സങ്കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$\text{ഇവിടെ സ്ഥൌല്യം} = \frac{1}{2\text{ര}-2+\frac{4}{2\text{ര}-2}} - \frac{1}{\text{ര}} + \frac{1}{2\text{ര}+2+\frac{4}{2\text{ര}+2}}$$

$$= \left\{ \text{ര}\left(2\text{ര}+2+\frac{4}{2\text{ര}+2}\right) - \left(2\text{ര}-2+\frac{4}{2\text{ര}-2}\right) \times \left(2\text{ര}+2+\frac{4}{2\text{ര}+2}\right) + \text{ര}\left(2\text{ര}-2+\frac{1}{2\text{ര}-2}\right) \right\} \div \text{ഛേദം}$$

$$= \frac{2\text{ര}^2+2\text{ര}+2-4\text{ര}^2+4-4-4+2\text{ര}^2-2\text{ര}+2}{\text{ഛേദം}} \text{(മിക്കവാറും)}$$

$$= \text{ശൂന്യം}$$

$$\text{അപ്പോൾ സംസ്കാരം} = 4\text{വ്യാസം} \times \frac{1}{(2\text{ര}+2)+\frac{4}{2\text{ര}+2}}$$

$$= \frac{4\text{വ്യാസം}\times(2\text{ര}+2)}{(2\text{ര}+2)^2+4}$$

$$= 4\text{വ്യാസം} \times \frac{\frac{\text{ര}+1}{2}}{(\text{ര}+1)^2+1}$$

പിന്നെ ഇസ്സംസ്കാരത്തിന്നും എത്രയുണ്ടു സ്ഥൌല്യം എന്ന് അറിയേണ്ടുകിൽ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയവണ്ണം തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലുരൂപം കൂട്ടിയ സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾക്കും വിഷമസംഖ്യകൾക്കും സമച്ഛേദമുണ്ടാക്കൂ. ഇവ വെക്കുംപ്രകാരം. നടേ കല്പിച്ച സംസ്കാരഹാരകം ഇരട്ടിച്ച രാശിയിൽ രണ്ടു കുറകകൊണ്ടു രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു രണ്ട്, നടേത്തെ സ്ഥാനത്ത് ഋണമായിട്ടു രണ്ട്. ഇങ്ങനെ നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകം. രണ്ടാമത്തു പിന്നെ ഛിന്നരാശിയിൽ രണ്ടേറുകയാൽ രണ്ടു സ്ഥാനത്തും ധനമായിട്ടു രണ്ട്. ഇവററിന്ന് അംശം ഓരോന്ന്. പിന്നെ ഈ ഛേദങ്ങളിൽ തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലു രൂപം കൂട്ടുമ്പോൾ ഛേദവർഗ്ഗത്തിൽ നാലു കൂടിയതു ഛേദം, നടേത്തെ ഛേദത്തോടു തുല്യം അംശം. പിന്നെ ഛേദാംശങ്ങളെ അഴിക്കാം. എന്നാൽ പ്രഥമസംസ്കാരഹാരകച്ഛേദത്തിങ്കൽ മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു രണ്ട്, രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു ഋണമായിട്ടു നാല്, നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ധനമായിട്ടു നാല്. രണ്ടാമതിങ്കൽ പിന്നെ വിശേഷം രണ്ടാംസ്ഥാ

നത്തെ നാലുംകൂടി ധനം എന്നു്. അംശങ്ങൾ പിന്നെ രണ്ടിനും രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളിലും ഓരോന്നു്. അവിടെ നടേത്തേതിന്റെ നടേത്തെ സ്ഥാനത്തേത്തു് ഋണം എന്നു വിശേഷം. പിന്നെ വിഷമസംഖ്യാഭേദം രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു് ഒന്നു നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം. അംശമൊന്നു്. പിന്നെ ഇവ മൂന്നിനും "അന്യോന്യഹാരാഭിഹതൌ ഹരാംശൌ" എന്നു സമച്ഛേദമാക്കൂ. അപ്പോൾ സമച്ഛേദത്തിന്നു് ആറുസ്ഥാനം, ആറുഖണ്ഡത്തിൽ. ഇവിടെ നടേത്തെ ഖണ്ഡത്തിൽ ശൂന്യം, രണ്ടാംഖണ്ഡത്തിൽ പതിനാറു്, പിന്നെ മൂന്നിലും ശൂന്യം, പിന്നെ ആറാംഖണ്ഡത്തിൽ നാലു്. ഇവിടെ നടേത്തെ സ്ഥാനം കൂടായ്യുമ്പോൾ* വിഷമസംഖ്യാംശം. ഇവിടെ ഒരു ഖണ്ഡത്തിലെ സംഖ്യ മീത്തെ ഖണ്ഡത്തിൽ കരേറുകയില്ല. പത്തിലേറിയാലും പത്തിലെല്ലോ കരേറുണ്ടു. എന്നിട്ടു് അസ്സംഖ്യ അറിയാത്തെ രാശി ആകയാൽ രാശിതുല്യസംഖ്യകൊണ്ടു കരേറുവാനൊ ഉപായമില്ലല്ലോ. എന്നിട്ടു് ഇവിടേയും ഒരു സ്ഥാനത്തു വരുന്ന സംഖ്യകൾ ധനങ്ങും ഒന്നെങ്കിൽ കൂട്ടേണം, രണ്ടു് എങ്കിൽ അന്തരിക്കാം. അത്രേ ആവൂ. ഇവിടത്തെ നടേത്തെ സംസ്കാരാംശം പിന്നെ. ഇതിന്നും അഞ്ചുസ്ഥാനം. നടേത്തേതു ശൂന്യം, രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു് ഋണനാലു്, മൂന്നാമതു ശൂന്യം, പിന്നെ രണ്ടു സ്ഥാനത്തും ഈ രണ്ടു്. ദ്വിതീയ സംസ്കാരഹാരകത്തിന്റെ അംശം പിന്നെ. നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം, രണ്ടാമേടത്തു നാലു്, പിന്നെ ശൂന്യം, പിന്നെ ഋണം രണ്ടു്, പിന്നെ അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തു ധനമായിട്ടു രണ്ടു്. ഇങ്ങനെ ക്രമം. സംസ്കാരഫലയോഗം പിന്നെ. അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തു നാലു്, മറ്റേവ ശൂന്യം. ഇതിനെ വിഷമസംഖ്യാഫലത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു പതിനാറു ശേഷിക്കുമത്രെ. പിന്നെ ശേഷിച്ച അംശത്തേയും ഛേദത്തേയും നാലിൽ അപവർത്തിച്ചാൽ അംശം നാലും, ഛേദം ആറാംസ്ഥാനത്തു് ഒന്നും, രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു നാലു്, മറ്റേവ ശൂന്യം. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ വിഷമസംഖ്യയുടെ പഞ്ചാഹതിയിൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച മൂലം കൂട്ടിയതു ഛേദം. ഇതിലിറങ്ങിയ നാലംശം സ്ഥൌല്യമാകുന്നതു് എന്നു വന്നു.

---

* ഇവിടെ നടേത്തെ ഖണ്ഡം മാച്ചുകളയുകയാണെങ്കിൽ, മുമ്പിലത്തെ രണ്ടാം സ്ഥാനം അപ്പോഴത്തെ ആദ്യസ്ഥാനമായിട്ടു വരും. ഇങ്ങനെ എല്ലാ സംഖ്യകളും ഓരോ സ്ഥാനം ഇറങ്ങിയിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാകുന്ന സംഖ്യ വിഷമസംഖ്യാംശം.

[ഇവിടെ സ്ഥാനമൂല്യം

$$=\frac{1}{ന}-\left\{\frac{1}{2ന-2+\frac{4}{2ന-2}}+\frac{1}{2ന+2+\frac{4}{2ന+2}}\right\}$$

$$\frac{1}{2ന-2+\frac{4}{2ന-2}}=\frac{1}{\frac{(2ന-2)^2+4}{2ന-2}}$$

$$=\frac{2ന-2}{(2ന-2)^2+4}$$

$$=\frac{2ന-2}{4ന^2-8ന+4+4}$$

$$=\frac{ന-1}{2ന^2-4ന+4}$$

$$\frac{1}{2ന+2+\frac{4}{2ന+2}}=\frac{2ന+2}{4ന^2+8ന+8}$$

$$=\frac{ന+1}{2ന^2+4ന+4}$$

അപ്പോൾ സ്ഥാനമൂല്യം $=\frac{1}{ന}-\left\{\frac{ന-1}{2ന^2-4ന+4}+\frac{ന+1}{2ന^2+4ന+4}\right\}$

സമച്ഛേദം $=ന(2ന^2+4ന+4)(2ന^2-4ന+4)$

$=ന\{(4ന^4-8ന^3+8ന^2)+(8ന^3-16ന^2+16ന)+(8ന^2-16ന+16)\}$

$=ന(4ന^4+16)$

$=4ന^5+16ന.$

വിഷമസംഖ്യാംശം $=4ന^4+16$

പ്രഥമസംസ്കാരഹാരകാംശം

$=ന(ന-1)(2ന^2+4ന+4)$

$=ന(2ന^3+4ന^2+4ന-2ന^2-4ന-4)$

$=2ന^4+2ന^3-4ന.$

4	8°	8			
	8	16°	16		
		8	16°	16	
4	0	0	0	16	0

ദ്വിതീയഹാരകാംശം

$=ന(ന+1)(2ന^2-4ന+4)$

$=ന(2ന^3-4ന^2+4ന+2ന^2-4ന+4)$

$=2ന^4-2ന^3+4ന$

∴ സംസ്കാരഫലയോഗാംശം

$=(2ന^4+2ന^3-4ന)+(2ന^4-2ന^3+4ന)$

$=4ന^4.$

വിഷമസംഖ്യാംശവും സംസ്കാരഫലയോഗാംശവും തമ്മിലുള്ള അന്തരം

$=4ന^4+16-4ന^4$

$=16.$

$$\text{അപ്പോൾ സ്ഥൌല്യം} = \frac{16}{4ര^5+16ര}$$

$$= \frac{4}{ര^5+4ര} \Big]$$

പരിധ്യാനയനപ്രകാരാന്തരങ്ങൾ

ഇപ്പോൾ ഇതിന്നു തക്കവണ്ണം പരിധിയെ വരുത്താം. അതിന്റെ പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

"സമപഞ്ചാഹതയോ യാ
രൂപാദ്യയുജാഞ്ചതുർഘ്നമൂലയുതാഃ ।
താഭിഃ ഷോഡശഗുണിതാൽ
വ്യാസാൽ പൃഥഗാഹതേഷു വിഷമയുതേഃ ॥
സമഫലയുതിമപഹായ
സ്യാദിഷ്ടവ്യാസസംഭവഃ പരിധിഃ" । ഇതി
(തന്ത്രസംഗ്രഹം).

ഇവിടെ പരിധി വരുത്തുവാൻ അതിന്റെ പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ പ്രായികമായിരിക്കുന്ന പരിധിക്ക് ഇസ്സംസ്കാരം ചെയ്താൽ ഇത്ര സ്ഥൌല്യമുണ്ടെന്നറിഞ്ഞാൽ അതു കൂട്ടീതാകിൽ ഏറിപ്പോയി എന്നാലതിനു മീതെ വിഷമസംഖ്യകൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കിയ സംസ്കാരഫലം കളഞ്ഞാൽ ഒട്ടു സൂക്ഷ്മമാകും. പിന്നയും പിന്നയും സംസ്കാരം ചെയ്താൽ സൂക്ഷ്മമാകും എന്നു വന്നിരിക്കുമ്പോൾ ആദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങീട്ടു തന്നെ ഈ സംസ്കാരം ചെയ്തുകൊണ്ടാലും. പരിധി സൂക്ഷ്മമാകുമെന്നു വരും. എന്ന് ഇതിന്ന് ഉപപത്തി.

$$[\text{പരിധി} = 4\text{വ്യ} - \frac{4\text{വ്യ}}{3} + \frac{4\text{വ്യ}}{5} - \frac{4\text{വ്യ}}{7} + \cdots\cdots$$

$$= \left(4\text{വ്യ} - \frac{4\text{വ്യ}}{2\cdot1+2+\frac{4}{2\cdot1+2}}\right) + \left(\frac{4\text{വ്യ}}{2\cdot1+2+\frac{4}{2\cdot1+2}} - \frac{4\text{വ്യ}}{3} + \frac{4\text{വ്യ}}{2\cdot3+2+\frac{4}{2\cdot3+2}}\right)$$

$$- \left(\frac{4\text{വ്യ}}{2\cdot3+4+\frac{4}{2\cdot3+2}} - \frac{4\text{വ്യ}}{5} + \frac{4\text{വ്യ}}{2\cdot5+2+\frac{4}{2\cdot5+2}}\right)$$

$$+ \left(\frac{4\text{വ്യ}}{2\cdot5+2+\frac{4}{2\cdot5+2}} - \frac{4\text{വ്യ}}{7} + \frac{4\text{വ്യ}}{2\cdot7+2+\frac{4}{2\cdot7+2}}\right)$$

$$- \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{ഇവിടെ } 4\text{വ്യാ} - \frac{4\text{വ്യാ}}{2\cdot1+2+\frac{4}{2\cdot1+2}}$$

$$= 4\text{വ്യാ} - \frac{4\text{വ്യാ}}{5} = \frac{16\text{വ്യാ}}{5} = \frac{16\text{വ്യാ}}{1^5+4\cdot1}$$

$$\left(\frac{1}{2\cdot1+2+\frac{4}{2\cdot1+2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot3+2+\frac{4}{2\cdot3+2}}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2\cdot3+2+\frac{4}{2\cdot3+2}} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2\cdot5+2+\frac{4}{2\cdot5+2}}\right),\ldots\ldots$$

ഇങ്ങിനെയുള്ളവ എല്ലാം അതാതു ദിക്കിലെ സ്ഥൌല്യങ്ങളാണല്ലൊ.

$$\text{അപ്പോൾ } \frac{1}{2\cdot1+2+\frac{4}{2\cdot1+2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot3+2+\frac{4}{2\cdot3+2}} = -\frac{4}{3^5+4\cdot3}$$

$$\frac{1}{2\cdot3+2+\frac{4}{2\cdot3+2}} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2\cdot5+2+\frac{4}{2\cdot5+2}} = -\frac{4}{5^5+4\cdot5}$$

....

....

വിഷമസംഖ്യാഫലം സംസ്കാരഫലയോഗത്തെക്കാൾ ഏറുന്നു. അതു കൊണ്ടാണ് ഈ സ്ഥൌല്യങ്ങൾ ഋണങ്ങളായിട്ടു വന്നിരിക്കുന്നതു്.

$$\therefore\ \text{പരിധി} = \frac{16\text{വ്യാ}}{1^5+4\cdot1} - \frac{16\text{വ്യാ}}{3^5+4\cdot3} + \frac{16\text{വ്യാ}}{5^5+4\cdot5} - \ldots\ldots\Big]$$

കേവലം വിഷമ*സംഖ്യ ഇരട്ടിച്ചതു തന്നെ സംസ്കാരഹാരകം എന്നു കല്പിച്ചാൽ അവിടത്തെ സ്ഥൌല്യാംശത്തെ പരിഹരിച്ചു പരിധി വരുത്തുംപ്രകാരം.

"വ്യാസാദ്വാരിധിനിഹതാൽ
പൃഥഗാപ്തം ത്ര്യാദ്യയുഗ്വിമൂലഘനൈഃ |
ത്രിഘ്നവ്യാസേ സ്വമൃണം
ക്രമശഃ കൃത്വാ പരിധിരാനേയഃ" || ഇതി

എന്നിയെ ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യാഫലത്തിന്റെ അർദ്ധം സംസ്കരിക്കുന്നതു് എന്നാവു ഇരിപ്പതു് എങ്കിൽ ആ വഴിയുണ്ടു പരിധിവരുത്തുംപ്രകാരം.

---

* 'കേവലം വിഷമസംഖ്യ' എന്നാണ് ഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ മിക്കതിലും പാഠം കാണുന്നതു്. എന്നാൽ ശ്ലോകത്തിൽ സമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതു തന്നെ സംസ്കാരഹാരകം എന്നു കല്പിച്ചിട്ടാണ് പരിധിയെ വരുത്തിയിരിക്കുന്നതു്. ഒരു ഗ്രന്ഥത്തിൽ 'കേവലമവിഷമസംഖ്യ' എന്നു തിരുത്തി എഴുതിക്കാണുന്നുണ്ടു്. "കേവലമവിഷമസംഖ്യ" എന്നോ "കേവലം സമസംഖ്യ" എന്നോ ആക്കിയാൽ മാത്രമേ ശ്ലോകത്തിന്റെ അർത്ഥത്തിനോടു യോജിക്കയുള്ളു.

"ദ്വ്യാദിയുജാം വാ കൃതയോ
വ്യേകാ ഹാരാ ദ്വിനിഘ്നവിഷ്കംഭേ ।
ധനമൃണമന്തേഽന്ത്യോർദ്ധ്വഗതൌജ-
കൃതിർദ്ദ്വിസഹിതാ ഹരസ്യാർദ്ധം"* ॥ ഇതി.

പിന്നേയുമുണ്ടു്.

"ദ്വ്യാദേശ്ചതുരാദേർവ്വാ ।
ചതുരധികാനാം നിരേകവർഗ്ഗാശ്ചേൽ ॥
ഹാരാഃ കുഞ്ജരഗുണിതോ ।
വിഷ്കംഭസ്യാമിതി കല്പിതോ ഭാജ്യഃ ॥
ഫലയുതിരേകത്ര വ്യതി-
ർഭാജ്യദളം ഫലഹീനമന്യത്ര" ॥ ഇതി.

എന്നിങ്ങനെ തുടങ്ങി.

സൂക്ഷ്മതരമായൊരു സംസ്കാരം

അനന്തരം വിഷമസംഖ്യാഹരണാനന്തരം ചൊല്ലിയ സംസ്കാരം നടേത്തേതിൽ സൂക്ഷ്മതരമായിരിപ്പോരു സംസ്കാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു പിന്നെ.

"അന്തേ സമസംഖ്യാദള-
വർഗ്ഗസ്സൈകോ ഗുണസ്സ ഏവ പുനഃ ।
യുഗഗുണിതോ രൂപയുത-
സ്സമസംഖ്യാദളഹതോ ഭവേദ്ധാരഃ" ॥ ഇതി§.

["വ്യാസാദ്വാരിധിനിഹതാൽ......."

ഇവിടെ സംസ്കാരം $=\frac{4\text{വ്യ}}{2\text{ന}+2}$

$$\therefore \text{സ്ഥൌല്യം}=\frac{4\text{വ്യ}}{2\text{ന}-2}-\frac{4\text{വ്യ}}{\text{ന}}+\frac{4\text{വ്യ}}{2\text{ന}+2}$$

$$=4\text{വ്യ}\left\{\frac{\text{ന}(2\text{ന}+2)-(2\text{ന}+2)(2\text{ന}-2)+\text{ന}(2\text{ന}-2)}{\text{ന}(2\text{ന}-2)(2\text{ന}+2)}\right\}$$

$$=4\text{വ്യ}\times\frac{2\text{ന}^2+2\text{ന}-4\text{ന}^2+4+2\text{ന}^2-2\text{ന}}{4\text{ന}^3-4\text{ന}}.$$

$$=4\text{വ്യ}\times\frac{4}{4\text{ന}^3-4\text{ന}}$$

$$=\frac{4\text{വ്യ}}{\text{ന}^3-\text{ന}}$$

---

* "ദ്വിസഹിതാ ഹരോ ദ്വിഘ്നഃ" എന്ന പാഠഭേദമുണ്ടു്.

§ ഇവിടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വാക്യങ്ങളെല്ലാം തന്ത്രസംഗ്രഹത്തിൽനിന്നു് ഉദ്ധരിച്ചിട്ടുള്ളവയാകുന്നു.

$$\therefore \text{പരിധി} = 4\text{വ്യ} - \frac{4\text{വ്യ}}{2\cdot1+2} + \frac{4\text{വ്യ}}{3^3-3} - \frac{4\text{വ്യ}}{5^3-6} + \cdots\cdots\cdots$$

$$= 8\text{വ്യ} + \frac{4\text{വ്യ}}{3^3-3} - \frac{4\text{വ്യ}}{5^3-5} + \frac{4\text{വ്യ}}{7^3-7} - \cdots\cdots\cdots$$

"ദ്വ്യാദിയുജാം വാ കൃതയോ..............."

ഇവിടെ $\text{സംസ്കാരം} = \frac{4\text{വ്യ}}{2\text{ര}}$

$$\therefore \text{സ്ഥൌല്യം} = \frac{4\text{വ്യ}}{2(\text{ര}-2)} - \frac{4\text{വ്യ}}{\text{ര}} + \frac{4\text{വ്യ}}{2\text{ര}}$$

$$= 4\text{വ്യ}\left(\frac{2\text{ര}^2 - 4\text{ര}^2 + 8\text{ര} + 2\text{ര}^2 - 4\text{ര}}{4\text{ര}^2(\text{ര}-2)}\right)$$

$$= 4\text{വ്യ}\frac{4\text{ര}}{4\text{ര}^2(\text{ര}-2)}$$

$$= 4\text{വ്യ}\frac{1}{\text{ര}^2 - 2\text{ര}}$$

$$= 4\text{വ്യ}\frac{1}{(\text{ര}-1)^2 - 1}$$

$$\therefore \text{പരിധി} = 4\text{വ്യ} - \frac{4\text{വ്യ}}{2} + \frac{4\text{വ്യ}}{2^2-1} - \frac{4\text{വ്യ}}{4^2-1} + \frac{4\text{വ്യ}}{6^2-1} - \cdots\cdots$$

$$= 2\text{വ്യ} + \frac{4\text{വ്യ}}{2^2-1} - \frac{4\text{വ്യ}}{4^2-1} + \frac{4\text{വ്യ}}{6^2-1} - \cdots\cdots$$

ഇതിൽ അന്ത്യയുഗ്മസംഖ്യയുടെ മേലെയുള്ള ഓജസംഖ്യയെവെച്ച് ഒരു സംസ്കാരം ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ സൂക്ഷ്മതരമായിരിക്കുന്ന പരിധി വരും.

ഒടുക്കത്തെ സമസംഖ്യയുടെ മീതെയുള്ള വിഷമസംഖ്യയെ ര എന്നു കല്പിക്ക.

$$\text{സംസ്കാരം} = \frac{4\text{വ്യ}}{2(\text{ര}^2+2)}$$

ഇവിടത്തെ സ്ഥൌല്യം:—

$$\text{സംസ്കാരഫലയോഗം} = \frac{1}{2(\text{ര}^2+2)} + \frac{1}{2\{(\text{ര}-2)^2+2\}}$$

$$= \frac{1}{2(\text{ര}^2+2)} + \frac{1}{2(\text{ര}^2 - 4\text{ര} + 6)}$$

$$= \frac{\text{ര}^2 - 4\text{ര} + 6 + \text{ര}^2 + 2}{2(\text{ര}^2+2)(\text{ര}^2 - 4\text{ര} + 6)}$$

$$= \frac{2\text{ര}^2 - 4\text{ര} + 8}{2(\text{ര}^2+2)(\text{ര}^2 - 4\text{ര} + 6)} = \frac{\text{ര}^2 - 2\text{ര} + 4}{(\text{ര}^2+2)(\text{ര}^2 - 4\text{ര} + 6)}$$

$$\therefore \text{സ്ഥൌല്യം} = \frac{1}{\text{ര}^2 - 2\text{ര}} - \frac{\text{ര}^2 - 2\text{ര} + 4}{(\text{ര}^2+2)(\text{ര}^2 - 4\text{ര} + 6)}$$

$$=\frac{\text{ര}^4-4\text{ര}^3+6\text{ര}^2+2\text{ര}^2-8\text{ര}+12-\text{ര}^4+2\text{ര}^3-4\text{ര}^2+2\text{ര}^3-4\text{ര}^2+8\text{ര}}{(\text{ര}^2-2\text{ര})(\text{ര}^2+2)(\text{ര}^2-4\text{ര}+6)}$$

$$=\frac{12}{(\text{ര}^2-2\text{ര})(\text{ര}^2+2)(\text{ര}^2-4\text{ര}+6)}$$

=ശൂന്യപ്രായം.

"ദ്വ്യാദേശ്ചതുരാദേ........."

ഇവിടെ എല്ലാ സംസ്കാരഫലങ്ങളും ധനഭൂതങ്ങൾ. രണ്ടാമത്തേതിൽ എല്ലാം ഋണഭൂതങ്ങൾ.

ആദ്യത്തേല്:

$$\text{പരിധി}=4\text{വ്യ}(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}+\cdots\cdots)$$

$$=4\text{വ്യ}\{(1-\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7})+(\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11})+\cdots\cdots$$

$$=4\text{വ്യ}(\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{35}+\tfrac{2}{99}+\cdots\cdots)$$

$$=8\text{വ്യ}\left(\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{10^2-1}+\cdots\cdots\right)$$

രണ്ടാമത്തേല്:

$$\text{പരിധി}=4\text{വ്യ}(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{17}-\cdots\cdots)$$

$$=4\text{വ്യ}\{1-(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5})-(\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{9})-(\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{13})-(\tfrac{1}{15}-\tfrac{1}{17})-\cdots\cdots\}$$

$$=4\text{വ്യ}(1-\tfrac{2}{15}-\tfrac{2}{63}-\tfrac{2}{143}-\tfrac{2}{255}-\cdots\cdots)$$

$$=4\text{വ്യ}(1-\frac{2}{4^2-1}-\frac{2}{8^2-1}-\frac{2}{12^2-1}-\frac{2}{16^2-1}-\cdots\cdots)$$

$$=4\text{വ്യ}-\frac{8\text{വ്യ}}{4^2-1}-\frac{8\text{വ്യ}}{8^2-1}-\frac{8\text{വ്യ}}{12^2-1}-\frac{8\text{വ്യ}}{16^2-1}-\cdots\cdots$$

"അന്ത്യസമസംഖ്യാദള........"

ഇവിടെ സൂക്ഷ്മതരമായിരിക്കുന്ന ഒരു സംസ്കാരത്തെ പറയുന്നു.

ര=അന്ത്യവിഷമസംഖ്യ.

$$\text{സംസ്കാരഗുണകാരം}=\left(\frac{\text{ര}+1}{2}\right)^2+1$$

$$=\frac{(\text{ര}+1)^2+4}{4}$$

$$=\frac{\text{ര}^2+2\text{ര}+5}{4}$$

$$\text{ഹാരകം}=(4\times\text{ഗുണകാരം}+1)\times\text{സമസംഖ്യാദളം}$$

$$=\left\{\frac{4(\text{ര}^2+2\text{ര}+5)}{4}+1\right\}\times\frac{\text{ര}+1}{2}=\frac{(\text{ര}^2+2\text{ര}+6)(\text{ര}+1)}{2}$$

$$\therefore\ \text{സംസ്കാരം}=\frac{\text{ര}^2+2\text{ര}+5}{4}\times\frac{2}{(\text{ര}^2+2\text{ര}+6)(\text{ര}+1)}$$

$$=\frac{\text{ര}^2+2\text{ര}+5}{2(\text{ര}^2+2\text{ര}+6)(\text{ര}+1)}$$

$$=\frac{ര^2+2ര+5}{(2ര+2)(ര^2+2ര+6)}$$

$$=\frac{1}{(2ര+2)+\left(\frac{1}{1+ര^2+2ര+5}\right)}$$

$$=\frac{1}{2ര+2+\frac{2ര+2}{ര^2+2ര+5}}$$

$$=\frac{1}{2ര+2+\frac{2}{\frac{ര^2+2ര+5}{ര+1}}}$$

$$=\frac{1}{2ര+2+\frac{2}{ര+1+\frac{4}{ര+1}}}$$

$$=\frac{1}{2ര+2+\frac{4}{2ര+2+\frac{8}{ര+1}}}$$

$$=\frac{1}{(2ര+2)+\frac{4}{2ര+2+\frac{16}{2ര+2}}}$$

ഈ സംസ്കാരം മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ, അവിടത്തെ സ്ഥൌല്യമായ $\frac{16}{4ര^5+16ര}$ എന്നതിൽനിന്നും വരുത്തിയതാണെന്നു വരുന്നുണ്ടല്ലോ. ഈ സ്ഥൌല്യത്തേയും പരിഹരിപ്പാനായിക്കൊണ്ട് ഇരട്ടിച്ച സമസംഖ്യയിൽ തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചിരിക്കുന്ന 16-നെ തന്നിൽ കൂട്ടി അതുകൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലു രൂപങ്ങൾ ഇരട്ടിച്ച സമസംഖ്യയിൽ കൂട്ടിയതു സംസ്കാരഹാരകമെന്നു കല്പിക്കേണം. മുമ്പിൽ സംസ്കാരഫലത്തിങ്കന്നു വിഷമസംഖ്യാഫലത്തിൽ ഏറുന്ന അംശം $\frac{16}{4ര^5+16ര}$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ ഇരട്ടിച്ച സമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലു രൂപങ്ങൾ മുഴുവൻ കൂട്ടുവാൻ വയ്യാ എന്നു വന്നു. അപ്പോൾ നാലിന്റെ ഛേദത്തിൽ $\frac{16}{2ര+2}$ കൂട്ടിയാൽ സൂക്ഷ്മതരമായിട്ടുള്ള സംസ്കാരമുണ്ടാകും.

മുമ്പിലത്തെ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ഈ സംസ്കാരത്തിങ്കലും സ്ഥൌല്യത്തെ വരുത്തിയാൽ അതുകൊണ്ടും പരിധിയെ വരുത്തുവാനുള്ള ശ്രേഢിയെ ഉണ്ടാക്കാം. ഈ സ്ഥൌല്യത്തിൽനിന്നു പിന്നേയും സൂക്ഷ്മതരങ്ങളായിട്ടുള്ള സംസ്കാരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം. ഇങ്ങനെ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ടു തന്നെ മേലെ മേലെയുള്ള സംസ്കാരങ്ങളേയും ശ്രേഢികളേയും വരുത്താം.

ഈ സംസ്കാരങ്ങളെക്കൊണ്ടു പരിധി എത്ര സൂക്ഷ്മമാകും എന്നതിനെ കാണിപ്പാനായിക്കൊണ്ട് ഒരുദാഹരണത്തെ കാണിക്കാം.

'അനൂനനൂന്നാനനനുന്നനിത്യം' (10000000000) എന്ന വ്യാസത്തിന്നു പരിധിയെ വരുത്തുക.

പരിധി$=(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\cdots\cdots)\times 4$വ്യ.

ഇവിടെ വ്യ$=1000000000000$ എന്നു കല്പിക്ക.

4വ്യ$=400000000000$	$\frac{4\text{വ്യ}}{3}=133333333333$
$\frac{4\text{വ്യ}}{5}=800000000000$	$\frac{4\text{വ്യ}}{7}=571428571428$
$\frac{4\text{വ്യ}}{9}=444444444444$	$\frac{4\text{വ്യ}}{11}=363636363636$
$\frac{4\text{വ്യ}}{13}=307692307692$	$\frac{4\text{വ്യ}}{15}=266666666666$
$\frac{4\text{വ്യ}}{17}=235294117647$	$\frac{4\text{വ്യ}}{19}=210526315789$
$\frac{4\text{വ്യ}}{21}=190476190476$	$\frac{4\text{വ്യ}}{23}=173913043478$
$\frac{4\text{വ്യ}}{25}=160000000000$	$\frac{4\text{വ്യ}}{27}=148148148148$
$\frac{4\text{വ്യ}}{29}=137931034483$	$\frac{4\text{വ്യ}}{31}=129032258065$
$\frac{4\text{വ്യ}}{33}=121212121212$	$\frac{4\text{വ്യ}}{35}=114285714286$
$\frac{4\text{വ്യ}}{37}=108108108108$	$\frac{4\text{വ്യ}}{39}=102564102564$
$\frac{4\text{വ്യ}}{41}=97560975610$	$\frac{4\text{വ്യ}}{43}=93023255814$
$\frac{4\text{വ്യ}}{45}=88888888888$	$\frac{4\text{വ്യ}}{47}=85106382979$
$\frac{4\text{വ്യ}}{49}=81632653061$	$\frac{4\text{വ്യ}}{51}=78431372549$
$\frac{4\text{വ്യ}}{53}=75471698113$	$\frac{4\text{വ്യ}}{55}=72727272727$
6848712589734	3742822801461
−3742822801461	
3105889788273.	

$\therefore$ സാമാന്യന്യായേന പരിധി$=4\text{വ്യ}-\frac{4\text{വ്യ}}{3}+\frac{4\text{വ്യ}}{5}-\frac{4\text{വ്യ}}{7}+\ldots\ldots-\frac{4\text{വ്യ}}{55}$

$=3105889788273.$

"തസ്യാം ഊർദ്ധ്വഗതാ യാ—" എന്ന സംസ്കാരം ചെയ്യുക.

$$\text{സംസ്കാരം (ധനം)} = 4\text{വ്യ} \times \frac{\text{സമസംഖ്യാർദ്ധം}}{\text{സമസംഖ്യാവർഗ്ഗം}+1}$$

$$= \frac{28 \times 4000000000000}{56^2+1}$$

$$= 35702900861.$$

$$\begin{array}{r} 3105889788273 \\ 35702900861 \\ \hline \text{സംസ്കൃതപരിധി} = 3141592689134 \end{array}$$

"അന്തേ സമസംഖ്യാദളവർഗ്ഗ ....." എന്ന സംസ്കാരം ചെയ്യുക.

$$\text{സംസ്കാരം} = 4\text{വ്യ} \times \frac{\text{സമസംഖ്യാദളവർഗ്ഗം}+1}{\{4(\text{സമസംഖ്യാദളവർഗ്ഗം}+1)+1\} \times \text{സമസംഖ്യാദളം}} \text{(ധനം)}$$

$$= 4000000000000 \times \frac{28^2+1}{\{4(28^2+1)+1\} \times 28}$$

$$= 35702915359.$$

$$\begin{array}{r} 3105889738273 \\ 35702915359 \\ \hline \text{സംസ്കൃതപരിധി} = 3141592653632 \end{array}$$

അപ്പോൾ 'ആന്ത്യനന്ത്യതാനനന്ദനനിത്യം' എന്ന വ്യാസത്തിനുള്ള പരിധികൾ:—

സാമാന്യന്യായേന	= 31058897383
ആദ്യത്തെ സംസ്കാരാനന്തരം	= 31415926391
ദ്വിതീയസംസ്കാരാനന്തരം	= 31415926536

"ആന്ത്യനന്ത്യതാനനന്ദനനിത്യം' എന്ന വ്യാസത്തിന്നു പരിധിയാകുന്നതു "ചണ്ഡാംശുചന്ദ്രാധമകുംഭിപാലഃ" (31415926536) എന്നു്.

ഈ വരുത്തിയ പരിധികളെ പരിശോധിച്ചാൽ സംസ്കാരങ്ങളുടെ പ്രയോജനത്തെ നല്ലവണ്ണം മനസ്സിലാകാം.

"ആന്ത്യനന്ത്യതാനനന്ദനനിത്യം' എന്നും "ചണ്ഡാംശുചന്ദ്രാധമകുംഭിപാലഃ" എന്നും ഉള്ള മഹദ്വ്യാസപരിധികളെവെച്ചു് അന്യോന്യഹരണം ചെയ്തു വല്ലിയുണ്ടാക്കി ശൂപാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരംകൊണ്ടും ശൂന്യാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരംകൊണ്ടും രണ്ടു പരിഷയായിട്ടു ഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കിയാൽ ആദ്യത്തെ പരിഷയിലെ ഫലങ്ങൾ പരിധികളും രണ്ടാംപരിഷയിലുള്ളവ ക്രമേണയുള്ള വ്യാസങ്ങളുമായിട്ടിരിക്കും. ഈ ഗുണഹാരങ്ങളെവെച്ചു ത്രൈരാശികം ചെയ്താൽ പരിധിവ്യാസങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം.

അന്യോന്യഹരണംകൊണ്ടുണ്ടായ ഫലങ്ങൾ:—

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 45, 1, 1, 8.

വല്ലി.	പരിധി.	വല്ലി.	വ്യാസം.
1		0	
3	3	1	1
7	22	7	7
15	333	15	106
1	355	1	113
292	103993	292	33102
1	104348	1	33215
1	208341	1	66317
1	312689	1	99532
4	1459097	4	464445
1	1771786	1	563977
1	3230883	1	1028422
1	5002669	1	1592899
45	228350988	45	72686377
1	233353657	1	74278776
1	461704645	1	146965153
8	3926990817	8	1250000000

ഏഴാമദ്ധ്യായം

ജ്യാനയനപ്രകാരം

ഇവ്വണ്ണം ചക്രകലാസമസംഖ്യമായി * വൃത്താകാരമായിരിക്കുന്ന പരിധിക്കു വ്യാസമുണ്ടാക്കി അതിന്റെ അർദ്ധംകൊണ്ട് ഒരു വൃത്തം വീശി ആ വൃത്തമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ പൂർവ്വാപരരേഖയും ദക്ഷിണോത്തരരേഖയും ഉണ്ടാക്കി പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരരേഖയുടെ ഇരുപുറവും ഈരണ്ടു സമത്ര്യശ്രങ്ങൾ † കല്പിപ്പൂ. അവററിന്റെ ഭുജകളെല്ലാം വ്യാസാർദ്ധത്തോടു തുല്യമായിട്ടു കല്പിക്കേണ്ടൂ. അവിടെ ദക്ഷിണോത്തരരേഖയുടെ രണ്ട് അഗ്രത്തിങ്കലും അഗ്രം സ്പർശിക്കുമാറു വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിട്ടു നാലു സമസ്തജ്യാക്കളെ കല്പിപ്പൂ. ഇവ ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ഓരോ ഭുജകളാകുന്നത്. പിന്നെ കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു സമസ്തജ്യാഗ്രങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുമാറു നാലു വ്യാസാർദ്ധങ്ങളെ കല്പിപ്പൂ. ഇവ ഓരോ ഭുജകളാകുന്നത്. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരരേഖാർദ്ധങ്ങൾ ഓരോന്ന് ഈരണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കു സാധാരണങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജകൾ. ഇങ്ങനെ ദക്ഷിണോത്തരരേഖയുടെ ഇരുപുറവും ഈരണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾ. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധതുല്യഭുജകളായിട്ടു നാലു സമത്ര്യശ്രങ്ങളെ കല്പിപ്പൂ. ഇവിടെ യാതൊരു ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലും ഒരു ഭുജ മുഴുവനേ നിലത്തു സ്പർശിക്കുമാറു കല്പിക്കേണ്ടൂ. ഇതിന്നു ഭൂമി എന്നു പേർ. പിന്നെ ഭൂമിയുടെ രണ്ടഗ്രത്തിങ്കലും സ്പർശിക്കുന്ന ഭുജകൾ രണ്ടും മേല്പോട്ടാക്കി കല്പി

---

* ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയെ 21,600 സമഭാഗമായി വിഭജിച്ചാൽ അതിൽ ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ നീളത്തെ ഇലി എന്നു പറയുന്നു. ഈ ഇലിയുടെ മാനംകൊണ്ടു വ്യാസാർദ്ധത്തെ അളക്കുകയാണെങ്കിൽ ശ്രേഷ്ഠം ദേവോ വിശാലസ്ഥലീ ഭേദ്യഃ —3437 ഇലി—44 വിലി—48 തല്പര—22 പ്രതല്പര എന്നു വരും. (60 പ്രതല്പര =1 തല്പര; 60 തല്പര=1 വിലി; 60 വിലി=1 ഇലി). ഈ സംഖ്യക്കു ത്രിജ്യാ എന്നു പേർ. ചക്രകലാ (21,600) തുല്യസംഖ്യമായിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം എല്ലായ്പ്പോഴും ത്രിജ്യാ. Trijya corresponds to the radian measure of the angle.)

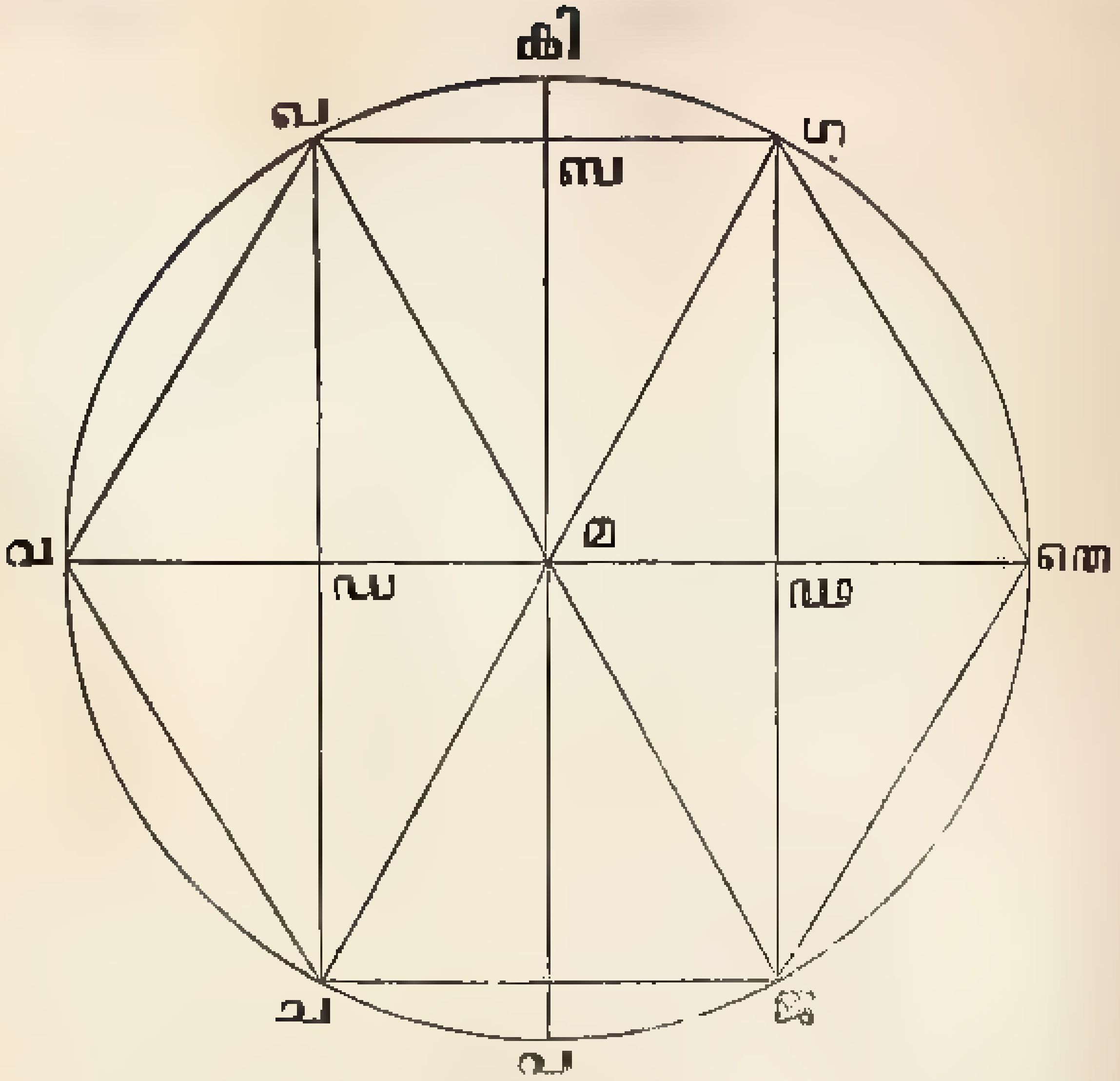
† മൂന്നു ഭുജകളും തുല്യമായിട്ടിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിന്നു സമത്ര്യശ്രമെന്നു പേർ. മററുള്ളവക്കു വിഷമത്ര്യശ്രങ്ങളെന്നു പേർ.

പ്പൂ. പിന്നെ ആ ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂടുന്ന കോണിങ്കൽനിന്നു കനത്തോരു വസ്തു കെട്ടിയൊരു സൂത്രം കീഴ്പോട്ടു തൂക്കൂ. അതിന്നു ലംബമെന്നു പേർ. മേല്പട്ടു കല്പിച്ച ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ നീളമൊക്കുമെങ്കിൽ ലംബം ഭൂമദ്ധ്യത്തിൽ സ്പർശിക്കും; ഒന്നുചെറുതാകിൽ അപ്പുറത്തു നീങ്ങും. ഇവിടെ പിന്നെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കെ അഗ്രം നേരെ മേലാകുമാറു് ഉയർത്തുമാറു കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രം സമവിതാനമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കെ പുറത്തെ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും മീത്തെ കോണിങ്കൽനിന്നു രണ്ടു ലംബസൂത്രങ്ങൾ താഴ്ത്തൂ. അവ ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്റെ രണ്ടർദ്ധങ്ങളുടേയും നടുവിൽ സ്പർശിക്കും. അപ്പോളവ രണ്ടു സൂത്രങ്ങളുടേയും ഇട വ്യാസാർദ്ധത്തോളമുണ്ടു്. ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു് ഇരുപുറവുമുള്ള വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും നടുവിൽ സ്പർശിക്കയാൽ രണ്ടു വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടേയും രണ്ടർദ്ധങ്ങൾ കൂടുകയാൽ ഒരു വ്യാസാർദ്ധത്തോളം നീളമായിട്ടിരിക്കും അതു്. എന്നാൽ ആ ലംബസൂത്രങ്ങളുടെ അഗ്രങ്ങളുടെ ഇടയും * അത്രതന്നെ വ്യാസാർദ്ധതുല്യമായിട്ടേ ഇരിക്കും. അതു ലംബാഗ്രാന്തരചാപത്തിങ്കലെ സമസ്തജ്യാവാകയുമുണ്ടു്. പിന്നെ രണ്ടു ലംബങ്ങളുടേയും ഓരോ പുറത്തെ ഭുജകളും വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായി സമസ്തജ്യാരൂപങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കെ പുറത്തെ പരിധ്യർദ്ധം വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന മൂന്നു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു തികയും എന്നു വന്നു. ഇവ്വണ്ണം മറ്റെ പരിധ്യർദ്ധത്തിങ്കലും. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന ആറു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം മുഴുവനും തികയും എന്നു വരും.

[പരിലേഖം 27-ൽ മ ത്രിജ്യാവൃത്തകേന്ദ്രം; കിമപ പൂർവ്വാപരരേഖ; ഖമഉ ദക്ഷിണോത്തരരേഖ. വപ, വച, ഖഗ, ഖജ, ഇവ ദക്ഷിണോത്തരരേഖയുടെ അഗ്രങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന സമസ്തജ്യാക്കൾ. മവ, മച, മജ, മഗ ഇവ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ. വ, ച, ജ, ഗ എന്ന ത്ര്യശ്രകോണുകളിൽനിന്നു വഢ, ചഢ, ജഢ, ഗഢ എന്ന ലംബങ്ങളെ വരക്ക.

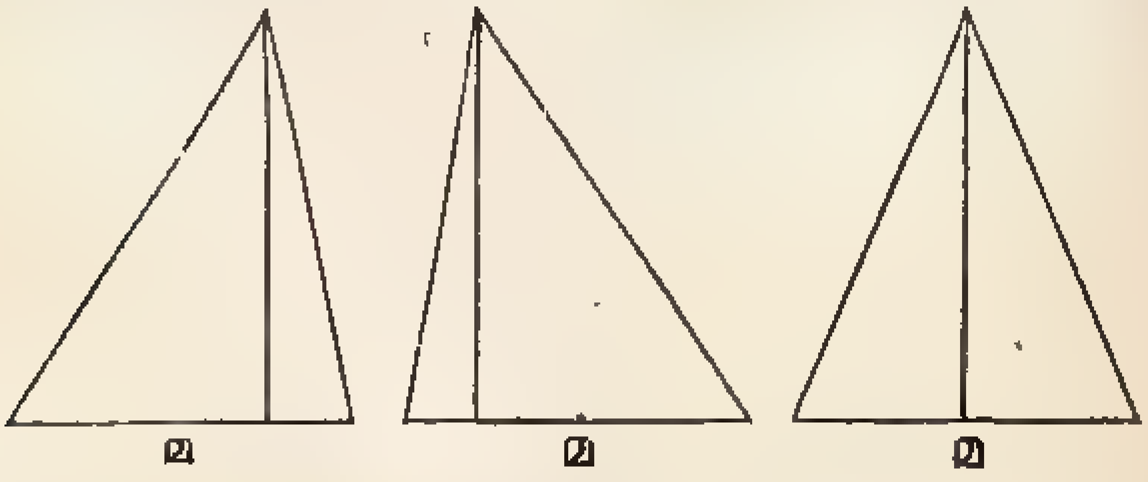
---

* ഒരേ ഭൂമിക്കുള്ള ലംബസൂത്രങ്ങൾ രണ്ടെണ്ണം തങ്ങളിൽ സമാന്തര (parallel) രേഖകളായിരിക്കും—അതായതു് അവ തമ്മിലുള്ള ഇട എല്ലാ ഇടത്തും തുല്യമായിരിക്കുമെന്നു നിയമം.



പരിലേഖം 27.

വഖമ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ ഭുജകളായ ഖവ, ഖമ ഇവ വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായതുകൊണ്ടു പരസ്പരം തുല്യങ്ങൾ. അതുകൊണ്ടു ലംബം ഖഡ ഭൂമിയാകുന്ന വമയുടെ മദ്ധ്യത്തിൽ സ്പർശിക്കും. തുല്യന്യായംകൊണ്ട്, ച യിൽനിന്നുള്ള ലംബം ഭൂമദ്ധ്യമാകുന്ന ഡയിലും ഗ, ജ, ഇവകളിൽനിന്നുള്ള ലംബങ്ങൾ



പരിലേഖം 28.

തമയുടെ മദ്ധ്യമായ ഢയിലും സ്പർശിക്കും. സമബാഹുകളല്ലാത്ത ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ലംബങ്ങൾ ഭൂമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു ചെറിയ ബാഹുവിന്റെ അടുത്തു നിന്നു ഭൂമിയെ സ്പർശിക്കും. പരിലേഖം 28 നോക്കുക.

വ്യാസം = വത = വഡ + ഡമ + മഢ + ഢത.
= 2ഡമ + 2ഢമ.
= 2ഡഢ.
∴ വ്യാസാർദ്ധം = ഡഢ = ലംബമൂലങ്ങളുടെ ഇട.

ഖഡഢഗ ഒരു ഘാതക്ഷേത്രമാകകൊണ്ടു്
ഖഗ = ഡഢ.
അതുപോലെതന്നെ ചജ = ഡഢ.

അപ്പോൾ ലംബാഗ്രങ്ങളുടെ ഇടയും വ്യാസാർദ്ധതുല്യം.

വഖ, ഖഗ, ഗത, തജ, ജച, ചവ ഇവയെല്ലാം വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായ സമസ്തജ്യാക്കൾ. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായ ആറു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം തികയുന്നു എന്നു വന്നു.]

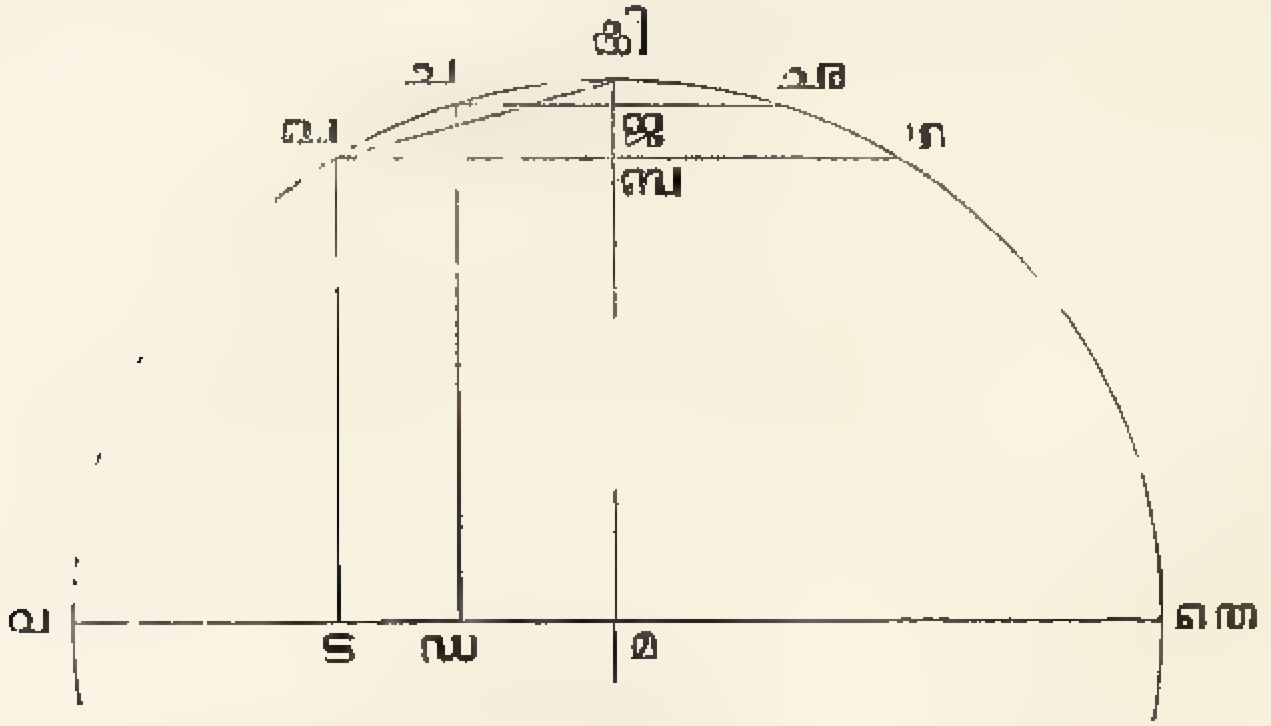
ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ രണ്ടു രാശീടെ സമസ്തജ്യാവു വ്യാസാർദ്ധതുല്യം എന്നും വരും. വൃത്തഷഷ്ഠാംശമെല്ലോ രണ്ടു രാശിയാകുന്നതു്, എന്നിട്ടു്. ഇതുകൊണ്ടുതന്നെ വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ അർദ്ധം ഏകരാശീടെ അർദ്ധജ്യാവു് എന്നു വരും. ചാപത്തേയും ജ്യാവിനേയുംകൂടി അർദ്ധിച്ചിരിക്കുന്നതിനെ ഈ ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവു് ഇതു് * എന്നു ചൊല്ലുന്നു. ചാപം മുഴുവനായിട്ടിരിപ്പൂ, ജ്യാവു് അർദ്ധവും ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നവറെറ അല്ല ഇച്ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവു് ഇതു് എന്നു ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ പിന്നെ ഗ്രഹവിഷയമായിരിക്കുന്ന ക്രിയകളിൽ അർദ്ധജ്യാവുകൊണ്ടേ ഉപകാരമുള്ളൂ. എന്നിട്ടു് അർദ്ധജ്യാവിനെ അത്രേ ജ്യാവെന്നു ചൊല്ലുന്നു.

[വൃത്തപരിധിയെ പന്ത്രണ്ടു തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടു വിഭജിച്ചാൽ ഒരു ചാപഖണ്ഡം ഒരു രാശിയാകുന്നതു്. അപ്പോൾ ആറു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം തികയുന്നതാകിൽ ഓരോ സമസ്തജ്യാവും ഈ രണ്ടുരാശിയുടെ സമസ്തജ്യാവാകുന്നു. പരിലേഖം (27)ൽ ഖഗ എന്നതു രണ്ടുരാശിയുടെ സമസ്തജ്യാവാകുന്നു. കിഗ എന്ന ചാപം ഒരു രാശിയുടെ ചാപമാകുന്നു. അപ്പോൾ ഖബ എന്ന അർദ്ധജ്യാവു് ഏകരാശിയുടെ അർദ്ധജ്യാവാകുന്നു. ഏകരാശിജ്യാവു ത്രിജ്യാർദ്ധം എന്നും വന്നു]

* പരിലേഖം 27-ൽ ഖകിഗ എന്നതു് ഒരു ചാപഖണ്ഡം. അതിന്റെ സമസ്തജ്യാവു് ഖബഗ. ഖകിഗ എന്ന ചാപത്തിന്റെ മദ്ധ്യം കി. സമസ്തജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യം ബ. അപ്പോൾ ഖബ എന്ന രേഖയെ ഖകി എന്ന ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവെന്നോ ജ്യാവെന്നോ ചൊല്ലുന്നു. "അർദ്ധിച്ചിരിക്കുന്നതിനെ" എന്നാണു് ഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ പാഠം കാണുന്നതു്. അർദ്ധിച്ചിരിക്കുന്നേടത്തു് എന്നു മാററിയാൽ അർത്ഥം വ്യക്തമാകും.

ഇവിടെ പിന്നെ സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു സമസ്തജ്യാചാപമദ്ധ്യത്തിന്റെ അകലം ശരമാകുന്നതു്. അർദ്ധജ്യാവിന്നും സമസ്തജ്യാവിന്നും ഒന്നേ ശരമാകുന്നതു്. അതു വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു ചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധസൂത്രത്തിന്റെ ഖണ്ഡമാകുന്നതു്. ഇവിടെ വൃത്തം നിലത്തു വരക്കുമാറു കല്പിക്കുമ്പോൾ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു വടക്കെ പുറം പരിധീടെ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നിനെ മേടമെന്നു കല്പിക്കുമാറു നിരൂപിക്കുന്നു. അപ്പോൾ പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിങ്കൽ ശരം ആകുമാറു നേരെ തെക്കുവടക്കു കല്പിപ്പൂ ഭുജാജ്യാവിനെ. നേരെ കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറു കോടിജ്യാവിനേയും കല്പിപ്പൂ. അപ്പോളുത്തരസൂത്രാഗ്രം കോടിശരമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ പ്രഥമരാശിജ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറുള്ള രേഖ പ്രഥമരാശിജ്യാകോടിയാകുന്നതു്. അതു രണ്ടു രാശീടെ അർദ്ധജ്യാവു്. ഇതിനെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കന്നു വാങ്ങിയ ശേഷം പ്രഥമരാശിജ്യാശരം. പ്രഥമരാശിജ്യാവിനെ ഉത്തരസൂത്രത്തിങ്കന്നു വാങ്ങിയശേഷം ഏകരാശിജ്യാവിന്റെ കോടിയാകുന്ന ദ്വിരാശിജ്യാവു യാതൊന്നു് അതിന്റെ ശരമായിട്ടിരിക്കും. പ്രഥമരാശിജ്യാവിനേയും അതിന്റെ ശരവും തങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികൾ എന്നു കല്പിക്കാം, അന്യോന്യം വിപരീതദിക്കാകയാൽ. എന്നാൽ ഇവ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗയോഗമൂലം പൂർവ്വരേഖാഗ്രത്തിങ്കന്നു പ്രഥമരാശിജ്യാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളം ഒരു രാശിയുടെ സമസ്തജ്യാവു്. ഇതിനെ പിന്നെ പൂർവ്വരേഖയിങ്കൽ ഇസ്സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യം വരുമാറു വെക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ നേരെ തെക്കുവടക്കായി പൂർവ്വാപരരേഖയിങ്കൽ ശരമായിട്ടിരിക്കും ഈ ജ്യാവിന്റെ അർദ്ധം — അർദ്ധരാശീടെ അർദ്ധജ്യാവു്. ഇതിനെ വർഗ്ഗിച്ചു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു മൂലിച്ചാൽ രണ്ടര രാശീടെ അർദ്ധജ്യാവു്. ഇതിനെ വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കൽ കളഞ്ഞശേഷം പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ അർദ്ധരാശിജ്യാശരം. ഈവണ്ണം അർദ്ധരാശിജ്യാവിനെ വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷം ഉത്തരസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ രണ്ടരരാശി ജ്യാവിന്റെ ശരം. ഇങ്ങനെ അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗവും ശരവർഗ്ഗവും കൂട്ടിമൂലിച്ചു് അർദ്ധിച്ചാൽ ഈ ജ്യാവിനെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപത്തെ അർദ്ധിച്ചിട്ടുള്ളതിന്റെ അർദ്ധജ്യാവു വരും. ഇങ്ങനെ ജ്യാശരവർഗ്ഗയോഗമൂലംകൊണ്ടു ജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കാം. പിന്നെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ ഇരട്ടിച്ചു മൂലിച്ചു് അർദ്ധിച്ചാൽ ഒന്നര രാശീടെ അർദ്ധജ്യാവുണ്ടാകും. ഈ വഴിയും ചില ജ്യാക്കൾ ഉളവാകും.

[പരിലേഖം 29_ൽ മ വൃത്തകേന്ദ്രം. ഖഗ രണ്ടു രാശിയുടെ സമസ്തജ്യാവു്. ഖകി ഒരു രാശിയുടെ ചാപം. ഇതിന്റെ അർദ്ധജ്യാവു ഖബ അതിന്റെ കോടി=ഖട=ബമ.



പരിലേഖം 29.

അപ്പോൾ ഏകരാശിജ്യാശരം=മകി−മബ=കിബ.

ഭുജാശരം=കിബ=മകി−മബ

=മകി−ഖട

=ത്രിജ്യാ−ഏകരാശികോടിജ്യാ.

കോടിശരം=മവ−മട

=മവ−ഖബ

=ത്രിജ്യാ−ഏകരാശിഭുജാജ്യാ.

വഖ രണ്ടു രാശിയുടെ ചാപമാകുന്നു.

ഇതിന്റെ അർദ്ധജ്യാവു്=ഖട

അപ്പോൾ ഏകരാശിയുടെ കോടി=രണ്ടു രാശിയുടെ ഭുജാജ്യാവു്.

ഖബകി എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ, ഖബ, ബകി ഇവ വിപരീതദിക്കുകളാകയാൽ ഇവയെ ഭുജാകോടികളെന്നു കല്പിക്കാം. ഇവയുടെ കർണ്ണം=ഖകി. ഒരു ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ഭുജാകോടികൾ എല്ലായ്പോഴും വിപരീതദിക്കുകളായിട്ടിരിക്കും.

അപ്പോൾ ബഖ^2+ബകി^{2}=ഖകി^{2} (ഭുജാകോടികർണ്ണന്യായംകൊണ്ടു്).

=ഏകരാശിസമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം.

ഖകി എന്ന സമസ്തജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യം പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കൽ വരത്തക്കവണ്ണം കല്പിച്ചാൽ, അതു ചചര എന്ന സമസ്തജ്യാവായിട്ടു വരും.

ചാപം ചക്രം = ഒരു രാശിയുടെ ചാപം.

ചാപം ചക്രം = അർദ്ധരാശിയുടെ ചാപം

അപ്പോൾ ചജ = അർദ്ധരാശിയുടെ (900ഇലി) അർദ്ധജ്യാവ്.

അതായത് ഏകരാശിയുടെ സമസ്തജ്യാർദ്ധം = അർദ്ധരാശിയുടെ അർദ്ധജ്യാവ്.

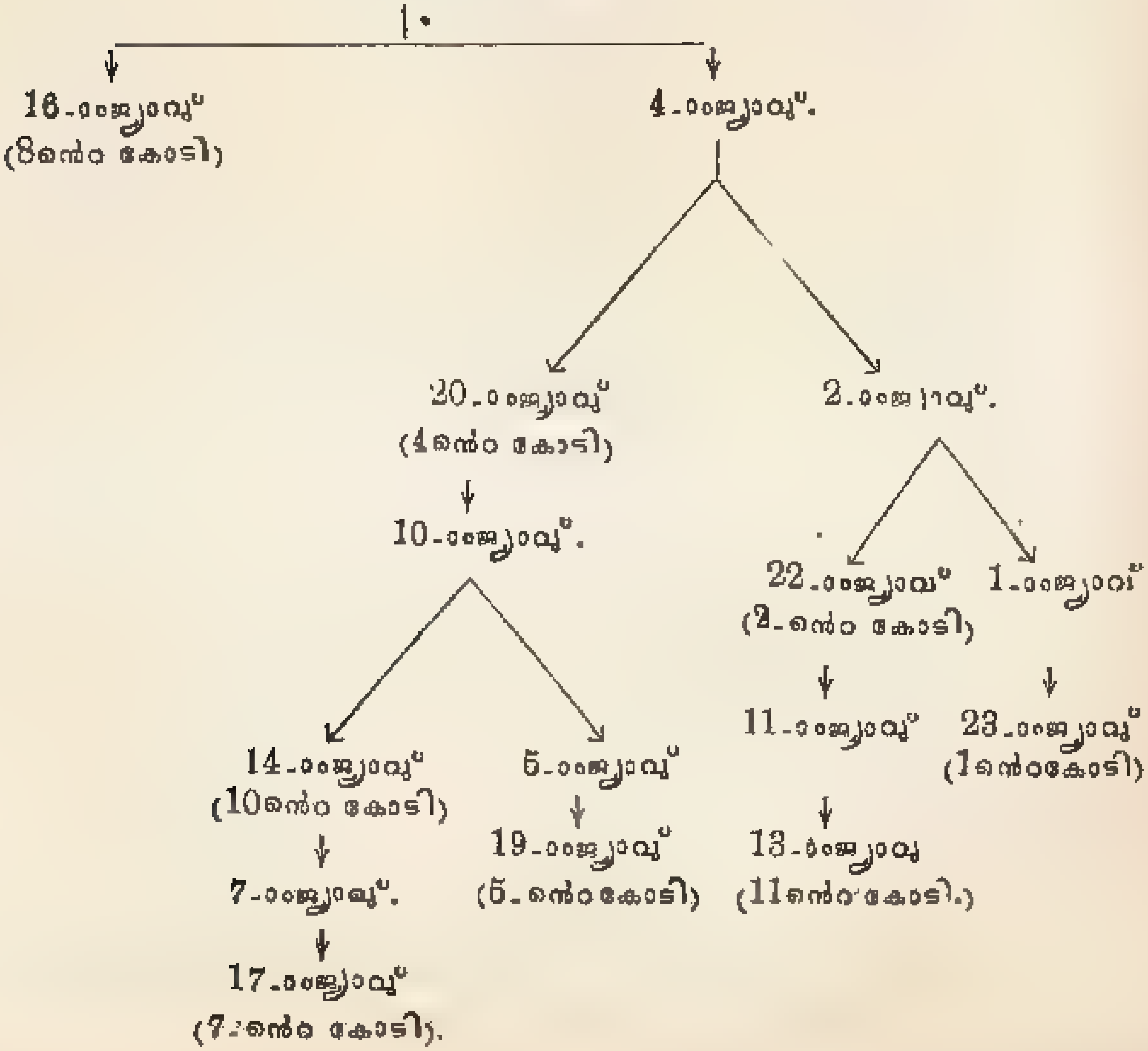
ഈ ജ്യാശരവർഗ്ഗമൂലാർദ്ധന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ, 450ഇലി, 225 ഇലി ഈ ചാപങ്ങളുടെ അർദ്ധജ്യാക്കളെ വരുത്താം.

ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാകിയ അർദ്ധജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളെ ത്രിജ്യാവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു വെവ്വേറെ കളഞ്ഞു മൂലിച്ചാൽ അവയുടെ കോടികളുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെയും ചില ജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കാം.

വൃത്തചതുരംശത്തെ 24 ആയിട്ടു വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നേടത്ത്, ഈ 24 മഹാജ്യാക്കളെയും ഈപ്രകാരം വരുത്താം.

$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2}$ corresponds to "അർദ്ധചാപജ്യാവ് = ചാപസമസ്തജ്യാർദ്ധം" = ½√(ചാപജ്യാവർഗ്ഗം + ശരവർഗ്ഗം)

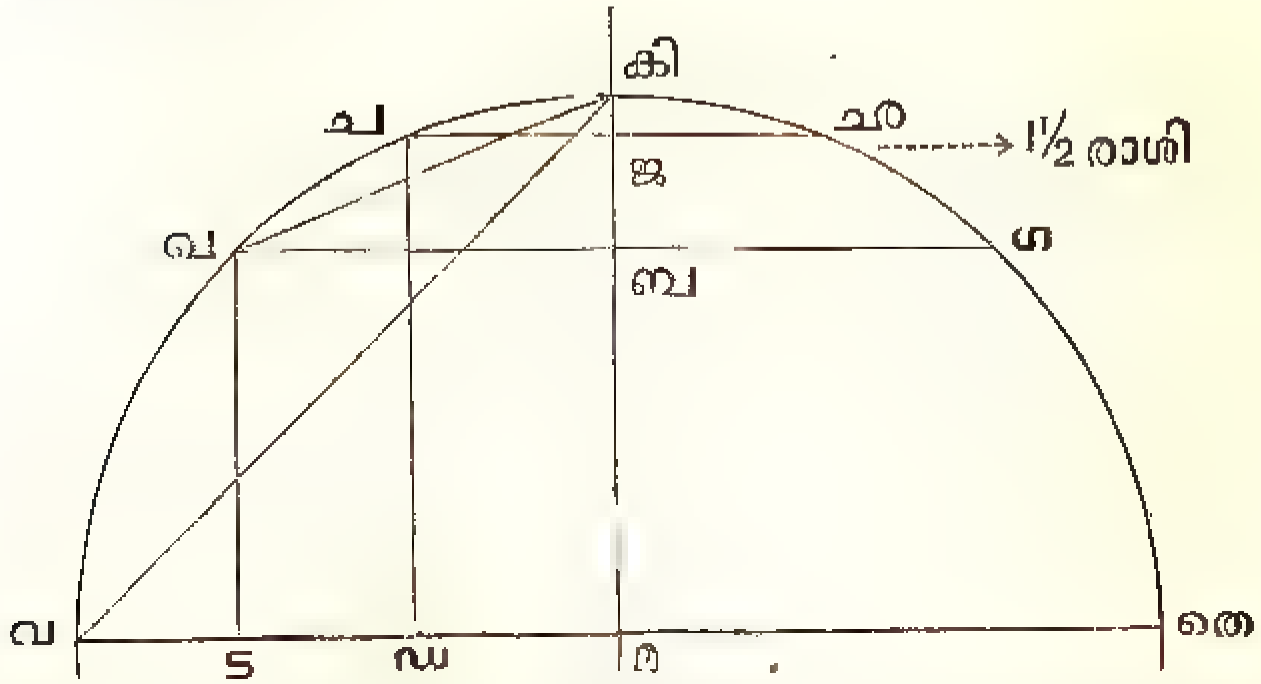
8-ാം ജ്യാവ് (ത്രിജ്യാർദ്ധം—ഏകരാശി ജ്യാവ്).



<u>24-ാം ജ്യാവ് ത്രിജ്യതന്നെ.</u>

ഇപ്പോൾ 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24 ഈ ജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കുവാനുള്ള മാർഗ്ഗത്തെ കാണിച്ചു.

ബാക്കിയുള്ള 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 ഇവയേയും ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ഉണ്ടാക്കാം.



പരിലേഖം 30.

പരിലേഖം 30 നോക്കുക ഇവിടെ $\underline{\text{വമ}}^2 + \underline{\text{മകി}}^2 = \underline{\text{വകി}}^2$ (ഭുജാകോടിവർഗ്ഗയോഗം കർണ്ണവർഗ്ഗം എന്ന ന്യായംകൊണ്ട്).

$$\text{വകി (മൂന്നാം രാശിയുടെ സമസ്തജ്യാവ്)} = \sqrt{2 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{അപ്പോൾ മൂന്നരരാശിയുടെ അർദ്ധജ്യാവ്} = 12\text{-ാം മഹാജ്യാവ്} = \frac{\sqrt{2 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}}{2}$$

അപ്പോൾ മുമ്പിലത്തെ ന്യായംകൊണ്ട്,

12-ാം ജ്യാവ് → 6-ാം ജ്യാവ് → 18-ാം ജ്യാവ് (6ന്റെ കോടി) → 9-ാം ജ്യാവ് → 15-ാം ജ്യാവ് (9ന്റെ കോടി)

12-ാം ജ്യാവ് → 6-ാം ജ്യാവ് → 3-ാം ജ്യാവ് → 21-ാം ജ്യാവ് (3ന്റെ കോടി).

ഇങ്ങനെ 24 മഹാജ്യാക്കളേയും വരുത്തുവാൻ ഒരു പ്രകാരത്തെ കാണിച്ചു.]

സാംകേതികസംജ്ഞകളും നിർവ്വചനങ്ങളും.

ഇങ്ങനെ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന് ഉത്തരസൂത്രാഗ്രത്തിന്നിട വൃത്തത്തിന്റെ നാലൊന്ന്. ഇതിനെ ഇട ഒക്കുമാറു കണ്ട് ഇരുപത്തിനാലുതാൻ ഏറത്താൻ പകുക്കുമാറു കണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ അവ്വണ്ണം മറ്റെ മൂന്നു പദങ്ങളിലും. ഇവിടെ ബിന്ദുക്കളുടെ ഇട ഓരോ ചാപഖണ്ഡമാകുന്നത്. ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽനിന്നു തെക്കു

വടക്കുമ്മാറു പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിങ്കൽ നേരെ നടുവു് അകപ്പെട്ടമാറു് ഉള്ള രേഖകൾ ഭുജാജ്യാക്കളാകുന്നതു്. ഈവണ്ണം രണ്ടു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ* അഗ്രങ്ങൾ തങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുന്ന സന്ധിയിങ്കുന്നുതന്നെ കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറായി ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ മദ്ധ്യം സ്പർശിക്കുമാറുള്ള രേഖകൾ കോടിജ്യാക്കളാകുന്നതു്. അതുകൊണ്ടു വന്നു, ഓജപദത്തിങ്കൽ ഗതം ഭുജാ, ഏഷ്യം കോടി, യുഗ്മപദത്തിങ്കൽ മറിച്ചു്, എന്നും. പിന്നെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കൾക്കു പൂർവ്വോത്തരസൂത്രങ്ങളിൽ മൂലം, ചാപസന്ധിയിങ്കൽ ജ്യാക്കളുടെ അഗ്രം എന്നും ചൊല്ലുന്നു ഇവ്വണ്ണം ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടേയും ഒരഗ്രത്തെ മൂലമെന്നും മറ്റേഗ്രത്തെ അഗ്രമെന്നും ചൊല്ലും. വ്യവഹാരാർത്ഥമായിട്ടു് ഇവിടെ ഭുജാചാപഖണ്ഡങ്ങൾക്കു പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിന്നടുത്തുള്ള അഗ്രത്തെ മൂലമെന്നും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്നടുത്തുള്ള അഗ്രത്തെ അഗ്രമെന്നും ചൊല്ലും. കോടിഖണ്ഡങ്ങൾക്കു മറിച്ചു മൂലാഗ്രങ്ങൾ. പിന്നെ ഇവിടെ ഒരു രാശിയെ എട്ടു്, ഒരു പദത്തെ ഇരുപത്തിനാലും വിഭജിക്കുമാറു കല്പിച്ചു ജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കുമാറു ചൊല്ലുന്നു അവിടെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിന്റെ വടക്കെപ്പുറത്തെ വൃത്തത്തിങ്കൽ രാശിയുടെ എട്ടൊന്നു ചെന്നിടത്തു നടേത്തെ ചാപത്തിന്റെ അഗ്രം എന്നു കല്പിപ്പൂ. ആ ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവു പ്രഥമജ്യാവാകുന്നതു്. അതു പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കന്നു പ്രഥമചാപാഗ്രത്തോളമുള്ളതു പ്രഥമചാപത്തിന്റെ ഖണ്ഡജ്യാവാകുന്നതും തന്നെ. പിന്നെ പ്രഥമചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നു പിന്നേയും രാശ്യഷ്ടമാംശം ചെന്നേടം ദ്വിതീയചാപാഗ്രം. ഈ ഇട രണ്ടാംചാപഖണ്ഡമാകുന്നതു്. ഇതിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു പൂർവ്വസൂത്രത്തോളം നേരെ തെക്കുവടക്കുള്ള അർദ്ധജ്യാവു രണ്ടാംജ്യാവാകുന്നതു്. പിന്നെ പ്രഥമചാപത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നും ദ്വിതീയചാപത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നും ഉത്തരസൂത്രത്തോളം നേരെ കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറുള്ള അർദ്ധജ്യാക്കൾ പ്രഥമദ്വിതീയ ജ്യാക്കളുടെ കോടികളാകുന്നതു്. പിന്നെ ഈവണ്ണം എല്ലാ ചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നും തെക്കുവടക്കും കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറും ജ്യാക്കളെ കല്പിപ്പൂ. ഇരുപത്തിനാലാമതു വ്യാസാർദ്ധമാകുന്നതു്. പിന്നെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കലെ വൃത്തസമ്പാതത്തിങ്ക

* ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭുജയുടെ അഗ്രവും അതിന്റെ കോടിയുടെ അഗ്രവും ഇങ്ങനെ രണ്ടു ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങൾ. ഇവ ഒരു ബിന്ദുവിൽതന്നെ സ്ഥിതിചെയ്യും.

ന്നു പ്രഥമജ്യാമൂലത്തോടു് ഇട പൂൎവ്വസൂത്രാഗ്രം പ്രഥമചാപത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡമാകുന്നതു്. പിന്നെ പ്രഥമചാപത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡമാകുന്നതു ഭുജാജ്യാവു തന്നെ. പിന്നെ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു പ്രഥമജ്യാവിന്റെ കോടിയോളമുള്ള ദ്വിതീയജ്യാഭാഗം രണ്ടാം ചാപത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡമാകുന്നതു്. പിന്നെ പ്രഥമജ്യാകോടീടെ അഗ്രം — പ്രഥമചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നു ദ്വിതീയജ്യാവോളമുള്ള ഇട — ദ്വിതീയചാപത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡമാകുന്നതു്. ഈവണ്ണം തൃതീയചാപത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു തെക്കുവടക്കും മൂലത്തിങ്കന്നു കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറും ഉള്ള ഭുജാകോടിജ്യാക്കളുടെ അഗ്രം തങ്ങളിലെ സമ്പാതത്തോടു വൃത്തത്തോടു് ഇട തൃതീയചാപത്തിന്റെ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളാകുന്നതു്. ഈവണ്ണം എല്ലാ ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടേയും തന്റെ തന്റെ രണ്ടു തലക്കന്നും തുടങ്ങിയ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളുടെ അഗ്രങ്ങൾ തങ്ങളിലെ സമ്പാതത്തിങ്കന്നു വൃത്തത്തോടുള്ള ഇട യാതൊന്നു് ഈ ഖണ്ഡങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികളായിരിപ്പോ ചിലവ. ഇവററിന്റെ കൎണ്ണമാകുന്നതു് അതതു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾക്കു വെവ്വേറെ ഉള്ള സമസ്തജ്യാവു്. ഇവയെല്ലാം നീളമൊത്തിരിപ്പോ ചിലവ. ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ എല്ലാം തുല്യങ്ങളാകയാൽ സമസ്തജ്യാക്കളും തുല്യങ്ങൾ. ഇവ കൎണ്ണങ്ങളായിട്ടുള്ള ഭുജാകോടികൾ ഓരോ കൎണ്ണത്തിന്നു് ഓരോപ്രകാരം നീളമായിരിക്കും. ഭുജാകോടിഖണ്ഡജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികൾ ഇവ. തുല്യകൎണ്ണങ്ങളായി നാനാരൂപങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികളോടുകൂടിയിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ ഇരുപത്തിനാലു്. പിന്നെ ഭുജാകോടികൾക്കു കൎണ്ണങ്ങളാകുന്നതു വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു് അതതു ഭുജാകോടിയോഗത്തോളമുള്ളവ. ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽ സ്പൎശിക്കുന്നവയാകയാൽ എല്ലാ കൎണ്ണങ്ങളും തുല്യങ്ങൾ. ഇവിടേയും ഭുജാകോടികൾ നാനാരൂപങ്ങൾ.

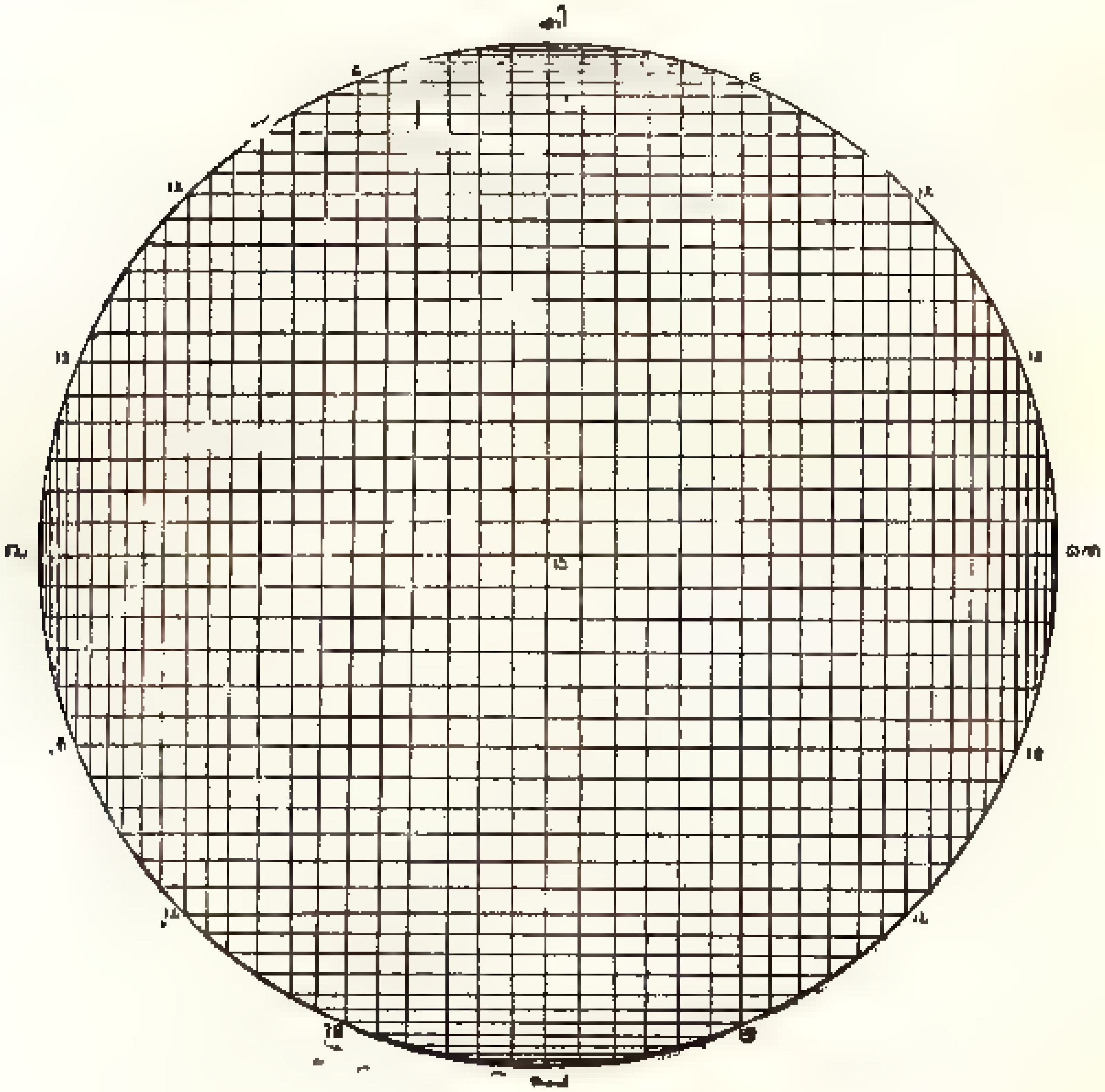
ഇവിടെ പൂൎവ്വസൂത്രാഗ്രം വൃത്തത്തെ സ്പൎശിക്കുന്നേടം മേഷരാശീടെ ആദി. അവിടുന്നു വൃത്തത്തിന്റെ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നു ചെന്നേടം മേടത്തിന്റെ ഒടുക്കം. പിന്നേയുമത്ര ചെന്നേടം ഇടവത്തിന്റെ ഒടുക്കം. ഉത്തരസൂത്രാഗ്രം മിഥുനത്തിന്റെ ഒടുക്കം. എന്നിങ്ങനെ കല്പിച്ചിട്ടു പറയുന്നു. ഇവിടെ പൂൎവ്വസൂത്രാഗ്രവും വൃത്തവുമുള്ള സമ്പാതത്തിങ്കൽ മൂലമായി ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിട്ടുള്ളതു് ഇഷ്ടഭുജാചാപം. ഉത്തരസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു് അത്രേടമുള്ളതു ഇഷ്ടകോടിചാപം. എന്നാൽ നടേത്തെ പദത്തിങ്കൽ പദാദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങി

കഴിഞ്ഞ ചാപം ഭുജാചാപം. ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി പദം തികവാൻ പോരാത്തതു കോടിചാപം. രണ്ടാംപദത്തിങ്കൽ ചെന്നതു കോടിചാപം, ഉത്തരസൂത്രാഗ്രം പദാദിയാകയാൽ. കോടിചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നു പദം തികവാൻ പോരാത്തതു ഭുജാചാപം. ഭുജക്കു പശ്ചിമസൂത്രാഗ്രം പദാദിയാകയാൽ, മൂന്നാംപദത്തിങ്കൽ നടേത്തെ പദത്തിങ്കലെപ്പോലെ. നാലാംപദത്തിങ്കൽ രണ്ടാംപദത്തിങ്കലെപ്പോലെ ഭുജാകോടിചാപങ്ങൾ. നടേത്തെ പദത്തിങ്കൽ പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കൽ ഭുജാചാപത്തിന്നുമൂലം, ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലഗ്രം. ഈ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കൽതന്നെ അഗ്രമായി ഉത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ മൂലമായിരിക്കും ആ ഭുജാചാപത്തിന്റെ കോടിചാപം. ഇവററിന്റെ അല്ധ്ജ്യാക്കൾ ഭുജാകോടിജ്യാക്കകളാകുന്നതു്. എന്നാൽ വൃത്തപാദത്തെ ഇരുപത്തിനാലു് ഇട ഖണ്ഡിക്കുമാറു കല്പിക്കുമ്പോൾ നടത്തെ ചാപഖണ്ഡം ഇഷ്ടഭുജാചാപം എന്നും കല്പിക്കുമ്പോൾ ഭുജാചാപം ഒരുഖണ്ഡം പോയശേഷം ഇരുപത്തിമൂന്നു ഖണ്ഡം കൂടിയതു കോടിചാപം. എന്നാൽ നടേത്തെ ജ്യാവിന്നു കോടി ഇരുപത്തിമൂന്നാം ജ്യാവു്. രണ്ടാമതിന്നു് ഇരുപത്തിരണ്ടാമതു്. ഇങ്ങനെ കണ്ടുകൊള്ളു.

ഇവിടെ ഭുജാജ്യാമൂലങ്ങൾ എല്ലാം പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കും. ഈ സൂത്രത്തിങ്കൽ ജ്യാമൂലസമ്പാതങ്ങളുടെ ഇട വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ക്രമേണ കോടിജ്യാഖണ്ഡങ്ങൾ. ഇവിടെ ഭുജാജ്യാവിന്റെ ഇരുപത്തിമൂന്നാമതിന്റെ മൂലവും വൃത്തകേന്ദ്രവും തങ്ങളിലുള്ള ഇട പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കലെ ഖണ്ഡം നടേത്തെ കോടി ഖണ്ഡം. പിന്നെ ഇരുപത്തിമൂന്നാംജ്യാവിന്റെ മൂലത്തിങ്കന്നു് ഇരുപത്തിരണ്ടാം ഭുജാജ്യാവിന്റെ മൂലത്തോടിട പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കലെ ഖണ്ഡം കോടിജ്യാവിങ്കലെ രണ്ടാംഖണ്ഡം. ഈ ഖണ്ഡങ്ങൾ രണ്ടും കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാംജ്യാവു്. ഇവ്വണ്ണം ക്രമേണ ഉള്ള ഖണ്ഡങ്ങളാൽ ഒരോന്നു ക്രമേണ കൂട്ടിയാൽ ക്രമേണ മീത്തെ മീത്തെ ജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇവിടെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കലെ അഗ്രത്തിങ്കലെ ഖണ്ഡം നടേത്തെ ഭുജാജ്യാവിന്റെ ശരം. ഇതിൽ പിന്നെയും അടുത്ത ഒരു ഖണ്ഡം കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാംജ്യാവിന്റെ ശരം. ഇങ്ങനെ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ഖണ്ഡയോഗം ചെയ്കിൽ ക്രമേണ ഭുജാശരങ്ങൾ. കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ കോടിജ്യാക്കൾ. ഖണ്ഡങ്ങൾ വെവ്വേറെ ഉരിക്കുമ്പോൾ, കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ കോടിഖണ്ഡങ്ങൾ,

അഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ ക്രമേണ ശരഖണ്ഡങ്ങൾ, ഇവ്വണ്ണം ഉത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങൾ, ഖണ്ഡയോഗത്തിങ്കൽ ഭുജാജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും. ഉത്തരസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ കോടിശരഖണ്ഡങ്ങളും കോടിശരങ്ങളും ക്രമേണ. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധസൂത്രത്തിങ്കൽ ജ്യാഖണ്ഡങ്ങളെ കല്പിക്കുംപ്രകാരം.

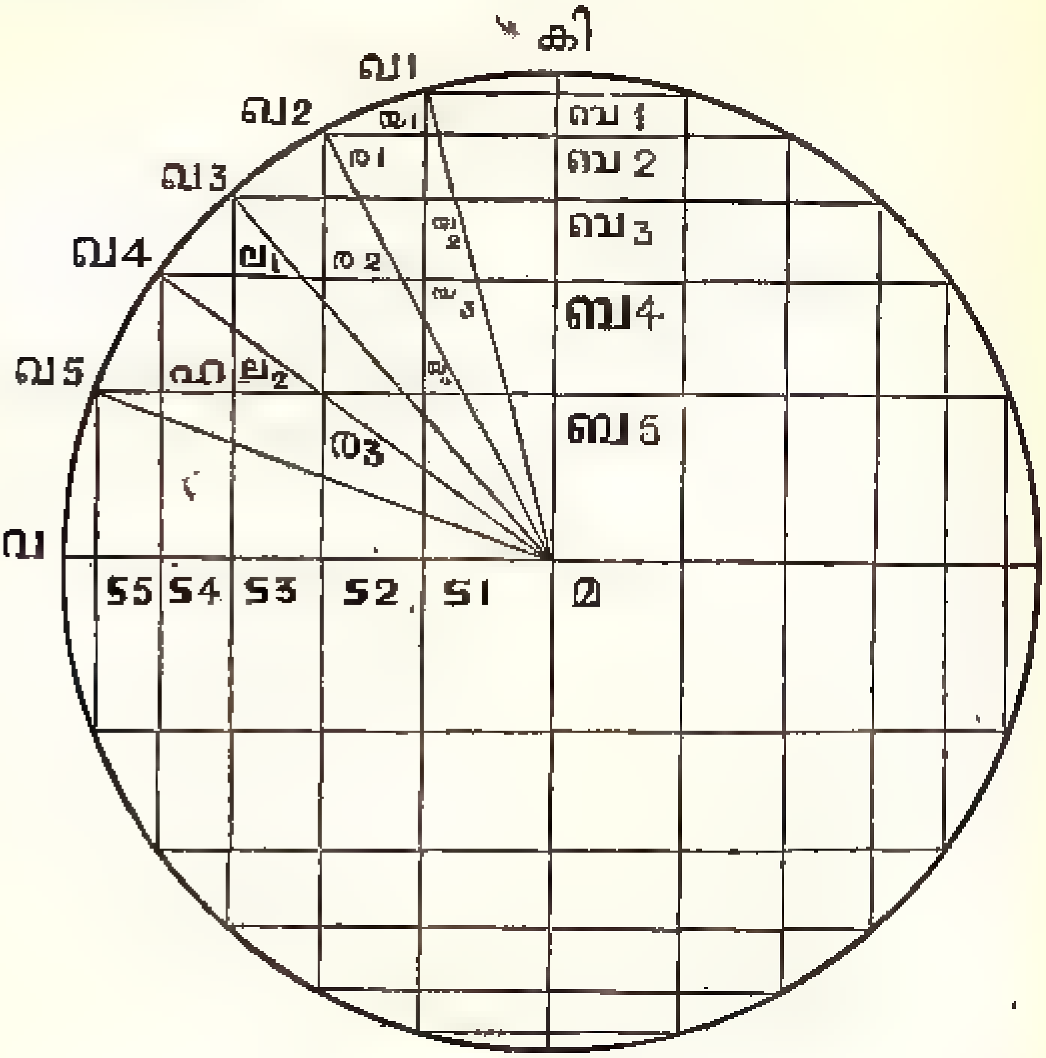
[പരിലേഖം 31-ൽ വൃത്തത്തിൽ നാലൊന്നിനെ 24 തുല്യചാപഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടു വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളേയും കോടിഖണ്ഡ



പരിലേഖം 31.

ങ്ങളെയും മററും തിരിച്ചറിവാൻ ബുദ്ധിമുട്ടുള്ളതുകൊണ്ടു പരിലേഖം 32-ൽ വൃത്തത്തിന്റെ നാലൊന്നിനെ ആറു തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായി വിഭജിച്ചിട്ടു പറയുന്നു. ഈ ന്യായങ്ങൾ 24 ആയി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നേടത്തും അതിദേശിച്ചുകൊള്ളാം.

പരിലേഖം 32-ൽ വൃത്തകേന്ദ്രം മ, തുല്യചാപഖണ്ഡങ്ങൾ കിഖ$_1$, ഖ$_1$ഖ$_2$, ഖ$_2$ഖ$_3$, ഖ$_3$ഖ$_4$, ഖ$_4$ഖ$_5$, ഖ$_5$വ.



പരിലേഖം 32.

ഭുജകൾ:—ഖ$_1$ബ$_1$, ഖ$_2$ബ$_2$, ഖ$_3$ബ$_3$, ഖ$_4$ബ$_4$, ഖ$_5$ബ$_5$, വമ.

കോടികൾ:—ഖ$_1$ട$_1$, ഖ$_2$ട$_2$, ഖ$_3$ട$_3$, ഖ$_4$ട$_4$, ഖ$_5$ട$_5$, ശൂന്യം.

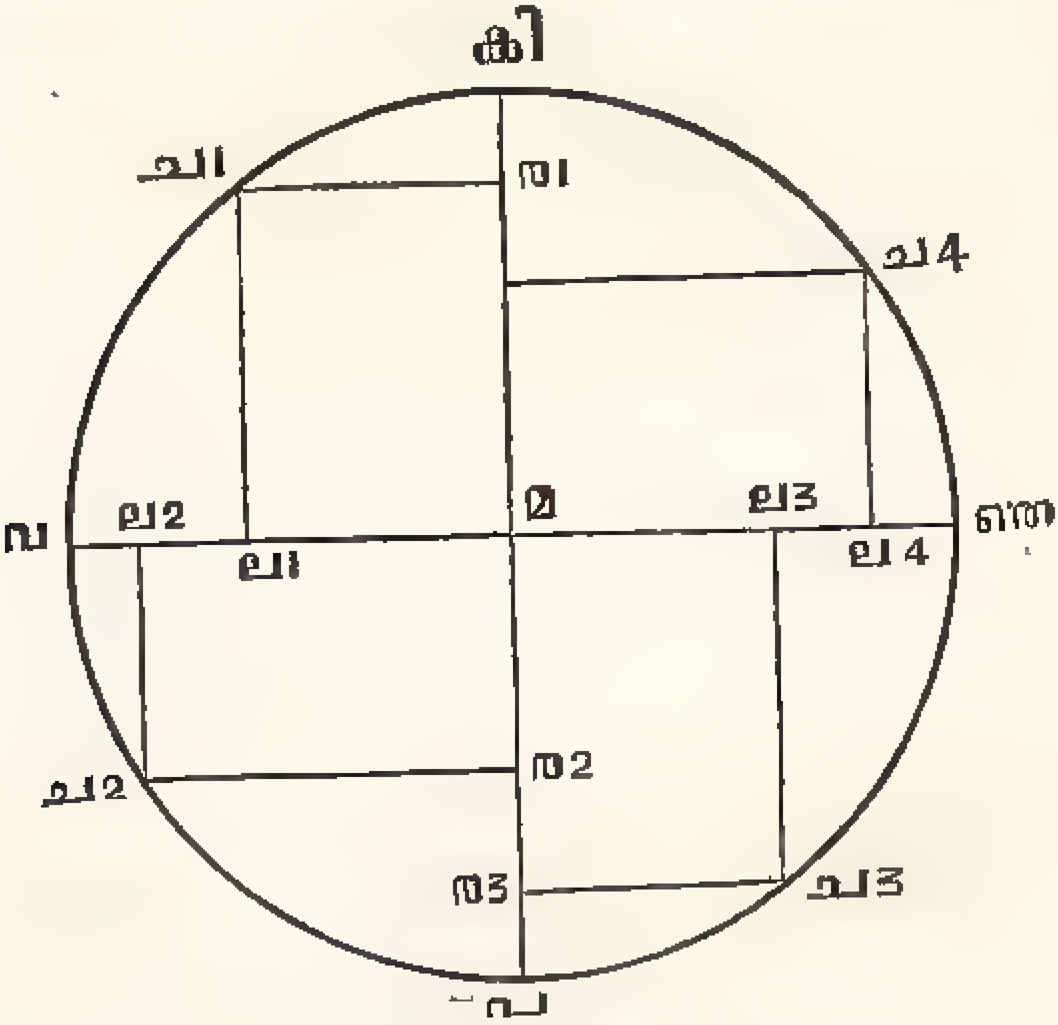
ഒടുക്കത്തേതായ ആറാമത്തെ ഭുജാജ്യാവു്=വമ=ത്രിജ്യാ

അതിന്റെ കോടി=ശൂന്യം.

പരിലേഖം 31ലും ഭുജാകോടികളെ ഇപ്രകാരംതന്നെ കല്പിക്കണം.

പരിലേഖം 33-ൽ ഓരോ പദത്തിലും ഭുജാകോടികളുടെ ഗതിവൈഷമ്യത്തെ കാണിക്കുന്നു. വൃത്തത്തിന്റെ ചതുരംശത്തെ പദം എന്നു പറയുന്നു. ഒന്നാംപദത്തിൽ—അതായതു പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രമായിരിക്കുന്ന മേഷാദി കി മുതൽ ഉത്തരസൂത്രാഗ്രമായിരിക്കുന്ന കർക്ക്യാദി വ വരെ—മേടം, ഇടവം, മിഥുനം എന്നു മൂന്നു രാശികൾ വരുന്നു. രണ്ടാംപദം കർക്ക്യാദി വ മുതൽ തുലാദി പ വരെ. മൂന്നാംപദം തുലാദി പ മുതൽ മകരാദി ത വരെ. നാലാംപദം മകരാദി ത മുതൽ മേഷാദി കി വരെ. ഒരു ഗ്രഹം മേഷാദിയിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു് ആദ്യപദത്തിൽ ച$_1$ എന്ന ഇഷ്ടപ്രദേശത്തു് എത്തിയിരിക്കു

ന്നുവെന്നു കല്പിക്കുക. ആ ഗ്രഹത്തിന്റെ ഭുജാജ്യാവ് ച$_1$ര$_1$, കോടിജ്യാവ് ച$_1$ല$_1$. ച$_1$ര$_1$ എന്ന ജ്യാവ് കിച$_1$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവും ച$_1$ല$_1$ എന്ന ജ്യാവ് വച$_1$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവുമാകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ആദ്യപദത്തിങ്കൽ ഗതമായിരിക്കുന്ന ചാപത്തിന്റെ



പരിലേഖം 33.

അർദ്ധജ്യാവു ഭുജയും ആ പദം തികവാനുള്ള ചാപഭാഗത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവു കോടിയുമാകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ആദ്യപദത്തിൽ ഗതം ഭുജാ, ഏഷ്യംകോടി എന്നു വന്നു. പിന്നെ ഗ്രഹം രണ്ടാംപദത്തിൽ ച$_2$ എന്ന പ്രദേശത്ത് എത്തി എന്നു വിചാരിക്കുക. രണ്ടാംപദാദിയായ വ എന്ന ബിന്ദുവിങ്കൽനിന്നു വച$_2$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവ് കോടി, രണ്ടാം പദം തികയുവാൻ പോരാത്ത പച$_2$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവു ഭുജാ. അപ്പോൾ രണ്ടാംപദത്തിൽ ഗതംകോടി, ഏഷ്യംഭുജാ. ഇവ്വണ്ണംതന്നെ മൂന്നാംപദത്തിൽ ആദ്യപദത്തിലെപ്പോലെയും നാലാംപദത്തിൽ രണ്ടാംപദത്തിലെപ്പോലെയും ഭുജാകോടികളുടെ ഗതൈഷ്യതാപമെന്നു കാണാം. അതു കൊണ്ട് ഓജപദത്തിൽ ഗതംഭുജ, ഏഷ്യംകോടി എന്നും യുഗ്മപദത്തിൽ മറിച്ച് എന്നും വന്നു.

പരിലേഖം 32-ൽ ജ്യാക്കളുടെ മൂലാഗ്രങ്ങൾ കല്പിക്കുംപ്രകാരം, ഭുജാജ്യാക്കൾക്കു കിമപ എന്ന പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിൽ മൂലങ്ങൾ; ചാപസന്ധിക

ളിൽ (ഖ$_1$,ഖ$_2$,ഖ$_3$.......)അഗ്രങ്ങൾ. കോടിജ്യാകൾക്ക വമതേഎന്ന ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിൽ മൂലങ്ങൾ, ചാപസന്ധികളിൽ അഗ്രങ്ങൾ. ഭുജാചാപഖണ്ഡങ്ങൾക്ക പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിന്നടുത്തുള്ള സന്ധിയെ മൂലമെന്നും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്നടുത്തുള്ള സന്ധിയെ അഗ്രമെന്നും പറയുന്നു; കോടിചാപങ്ങൾക്ക വിപരീതമായിട്ട മൂലാഗ്രങ്ങൾ.

രണ്ടു ഭുജകളുടെ അന്തരത്തിന്ന ഭുജാഖണ്ഡമെന്നും രണ്ടു കോടികളുടെ അന്തരത്തിന്ന കോടിഖണ്ഡമെന്നും പറയുന്നു.

പരിലേഖം 32-ൽ,

ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ—കിഖ$_1$, ഖ$_1$ഖ$_2$, ഖ$_2$ഖ$_3$.......

പ്രഥമഭുജാജ്യാവ്=ഖ$_1$ബ$_1$.

ഇതിന്റെ മുമ്പിലത്തെ ഭുജാജ്യാവ് അതായത കി യിൽനിന്നുള്ള ഭുജ ശൂന്യം.

∴ ആദ്യത്തെ ഭുജാഖണ്ഡം=ഖ$_1$ബ$_1$—൦=ഖ$_1$ബ$_1$=ആദ്യഭുജാജ്യാവുതന്നെ,

ആദ്യത്തെ (ശൂന്യഭുജയുടെ) കോടിജ്യാവ്=കി.മ=ത്രിജ്യാ.

പ്രഥമഭുജയുടെ കോടിജ്യാവ്=ഖ$_1$ട$_1$=ബ$_1$മ

∴ ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം=കിമ—ബ$_1$മ=കിബ$_1$.

രണ്ടാംഭുജാജ്യാവ്=ഖ$_2$ബ$_2$.

ഇതിന്റെ കോടിജ്യാവ്=ഖ$_2$ട$_2$

രണ്ടാംചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡം=ഖ$_2$ബ$_2$—ഖ$_1$ബ$_1$=ഖ$_2$യ$_1$.

ഇതിന്റെ കോടിഖണ്ഡം=ഖ$_1$ട$_1$—ഖ$_2$ട$_2$=ഖ$_1$യ$_1$.

തൃതീയചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡം=ഖ$_3$ബ$_3$—ഖ$_2$ബ$_2$=ഖ$_3$ര$_1$

ഇതിന്റെ കോടിഖണ്ഡം=ഖ$_2$ട$_2$—ഖ$_3$ട$_3$=ഖ$_2$ര$_1$

ഇങ്ങനെ എല്ലാ ഖണ്ഡങ്ങളേയും വരുത്താം.

ഇവിടെ അതതു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡവും കോടിഖണ്ഡവും തങ്ങളിൽ വിപരീതദിക്കുകളാകയാൽ അവയെ ഭുജാകോടികളെന്നു കല്പിക്കാം. ഇവയുടെ കർണ്ണങ്ങളാകുന്നവ അതാതു ഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാകൾ—ഖ$_1$കി, ഖ$_2$ഖ$_1$, ഖ$_3$ഖ$_2$....... ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ തുല്യങ്ങളാകയാൽ ഇക്കർണ്ണങ്ങളും തുല്യങ്ങൾ. ഇങ്ങനെ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങൾ ഭുജാകോടികളായി സമസ്തജ്യാവു കർണ്ണമായി പല ത്ര്യശ്രങ്ങളും—കിബ$_1$ഖ$_1$, ഖ$_1$യ$_1$ഖ$_2$, ഖ$_2$ര$_1$ഖ$_3$,.........—ഉണ്ടാകും. ഇവിടെ കർണ്ണങ്ങൾ തുല്യങ്ങൾ, ഭുജാകോടികൾ നാനാപ്രകാരങ്ങൾ.

പിന്നേയും ഒരു വക ത്ര്യശ്രങ്ങൾ—മബ$_1$ഖ$_1$, മബ$_2$ഖ$_2$, മബ$_3$ഖ$_3$, ...—ഉണ്ട്. മബ$_1$ഖ$_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ ആദ്യജ്യാവു ഖ$_1$ബ$_1$ ഭുജ, അ

തിന്റെ കോടിജ്യാവു ഖ$_1$ട$_1$ (=ബ$_1$മ) കോടി; മഖ$_1$ എന്ന വ്യാസാർദ്ധം കർണ്ണം. മബ$_2$ഖ$_2$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ രണ്ടാംഭുജാജ്യാവു ഭുജ, അതിന്റെ കോടിജ്യാവു കോടി, വ്യാസാർദ്ധംതന്നെ കർണ്ണം. ഇങ്ങനെ ആദ്യദ്വിതീയാദി ഭുജാജ്യാക്കൾ ഭുജകളായി, അതതിന്റെ കോടിജ്യാക്കൾ ക്രമേണ കോടികളായി, എല്ലായിടത്തും വ്യാസാർദ്ധംതന്നെ കർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വക ത്ര്യശ്രങ്ങളാണിവ. ഇവിടേയും കർണ്ണങ്ങൾ തുല്യങ്ങൾ, ഭുജാകോടികൾ നാനാപ്രകാരങ്ങൾ.

പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കൽ ഭുജാമൂലങ്ങൾ തങ്ങളിലുള്ള ഇടകൾ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകയാണെങ്കിൽ, കോടിഖണ്ഡങ്ങൾ; പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകയാണെങ്കിൽ, ശരഖണ്ഡങ്ങൾ മബ$_5$, ബ$_5$ബ$_4$, ബ$_4$ബ$_3$, ബ$_3$ബ$_2$, ബ$_2$ബ$_1$, ബ$_1$കി ഇവ കോടിഖണ്ഡങ്ങൾ. കിബ$_1$, ബ$_1$ബ$_2$, ബ$_2$ബ$_3$, ബ$_3$ബ$_4$, ബ$_4$ബ$_5$, ബ$_5$മ എന്ന ക്രമത്തിലിരിക്കുമ്പോൾ അവ ശരഖണ്ഡങ്ങൾ. ആദ്യശരഖണ്ഡം കിബ$_1$ ആദ്യഭുജാജ്യാവിന്റെ ശരം തന്നെ. ദ്വിതീയജ്യാവിന്റെ ശരം = ആദ്യദ്വിതീയശരഖണ്ഡയോഗം = കിബ$_1$ + ബ$_1$ബ$_2$ = കിബ$_2$. തൃതീയജ്യാവിന്റെ ശരം = കിബ$_1$ + ബ$_1$ബ$_2$ + ബ$_2$ബ$_3$ = കിബ$_3$ ഇങ്ങനെ ശരഖണ്ഡയോഗംകൊണ്ടു ശരത്തെ ഉണ്ടാക്കാം. ഇങ്ങനെതന്നെ കോടിഖണ്ഡയോഗംകൊണ്ടു കോടിയേയും ഉണ്ടാക്കാം. ഇതുപോലെതന്നെ ഉത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളും സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ കോടിശരഖണ്ഡങ്ങളും ഉളവാകും. ഇവയുടെ യോഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഭുജകളേയും കോടിശരങ്ങളേയും ഉണ്ടാക്കാം.]

പിന്നെ അതതു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാക്കൾ തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്നവ കർണ്ണങ്ങളായിട്ടു കർണ്ണങ്ങളുടെ രണ്ടു് അഗ്രങ്ങളിലും സ്പർശിക്കുന്ന ജ്യാക്കൾ* തങ്ങളിലുള്ള സമ്പാതത്തിങ്കന്നു സമസ്തജ്യാക്കളാകുന്ന കർണ്ണങ്ങളുടെ അഗ്രത്തോളമുള്ള ഇട ഭുജാകോടികളായി സ

* എല്ലാ ദിക്കിലും സമസ്തജ്യാവിനെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ മൂലത്തിങ്കന്നുള്ള കോടിയും അഗ്രത്തിങ്കന്നുള്ള ഭുജയും ഇവയെയാണു് "ജ്യാക്കൾ" എന്ന പദംകൊണ്ടിവിടെ വിവക്ഷിച്ചിരിക്കുന്നതു്. ഇവയുടെ സമ്പാതത്തിങ്കന്നു സമസ്തജ്യാഗ്രങ്ങളോടുള്ള ഇടകൾ ആ സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജാകോടികളാകുന്നവ. പരിലേഖം 32-ൽ ഖ$_1$ഖ$_2$ എന്ന ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അഗ്രമായ ഖ$_2$ എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള ഭുജാജ്യാവ് ഖ$_2$ബ$_2$ എന്നതിന്റേയും മൂലമായ ഖ$_1$ എന്നതിൽനിന്നുള്ള ഖ$_1$ട$_1$ എന്ന കോടിയുടേയും സമ്പാതപ്രദേശം യ$_1$. അപ്പോൾ ഖ$_1$യ$_1$ഖ$_2$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ ഖ$_1$ഖ$_2$ എന്ന സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന്നു ഖ$_1$യ$_1$ ഭുജയും, ഖ$_2$യ$_1$ കോടിയുമാകുന്നു.

മസ്തജ്യാവിനോടുകൂടിയ ത്ര്യശ്രങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഈ ഭുജാകോടികളെ ആകിലുമാം ഭുജാകോടിഖണ്ഡജ്യാക്കൾ എന്നു കല്പിപ്പാൻ$. ഈവണ്ണമായിരിക്കുന്ന ജ്യാഖണ്ഡങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി പഠിക്കേണം. അവററിന്നു പഠിതജ്യാക്കൾ എന്നു പേരുണ്ടു്, പൂർവ്വശാസ്ത്രങ്ങളിൽ പഠിക്കയാൽ. വ്യൽക്രമേണകൂടി പഠിപ്പൂ. അതു് ഉൽക്രമജ്യാക്കൾ*. പടാദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങി ഇത്ര ചാപഖണ്ഡം കഴിഞ്ഞ സന്ധി ഇഷ്ടപ്രദേശമെന്നു വരുമ്പോൾ അത്ര പഠിതജ്യാവുതന്നെ ഇഷ്ടജ്യാവാകുന്നതു് ||. പിന്നെ ഇസ്സന്ധിയിങ്കന്നു പിന്നത്തെ ചാപഖണ്ഡത്തിൽ കൂട്ടുചെന്നേടം ഇഷ്ടപ്രദേശമെന്നു വരുമ്പോൾ ഈ പഠിതജ്യാവിൽ കൂട്ടു,

---

$ വൃത്തത്തിന്റെ ചതുരംശത്തെ 24 ആയി വിഭജിച്ചു 24 മഹാജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കി അവയെയാണല്ലൊ ഭുജാകോടി ജ്യാക്കളായിട്ടു പഠിച്ചുവരുന്നതു്. ഇവയുടെ സ്ഥാനത്തു 24 ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളെയുണ്ടാക്കി പഠിക്കുകയും ചെയ്യാം. ഈ ഖണ്ഡജ്യാക്കൾക്കും പഠിതജ്യാക്കൾ എന്നു പേരുണ്ടു്. ആര്യഭടാചാര്യർ ഗീതികാസൂത്രത്തിൽ ഖണ്ഡജ്യാക്കളെയാണു് തന്നിരിക്കുന്നതു്. മുമ്പിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ ഖണ്ഡജ്യാക്കളെ പൂർവ്വാപരസൂത്രങ്ങളിൽ കല്പിക്കുന്നതിന്നു പകരം സമസ്തജ്യാക്കളുടെ ഭുജാകോടികളായിട്ടും കല്പിക്കാം. ആര്യഭടാചാര്യർ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഖണ്ഡജ്യാക്കൾ:—

മഖി, ഭഖി, ഫഖി, ധഖി, ണഖി, ഞഖി.

ങഖി, ഹസ്ഝ, സ്കകി, കിഷ്ഗ, ശ്ഘകി, കിഘ്വ,

ഘ്ലകി, കിഗ്ര, ഹക്യ, ധാഹ

സ്ത, സ്ഗ, ശ്ഝ, ങ്വ, ക്ല, പ്ത, ഫ, ഛ, കലാർദ്ധജ്യാഃ

(ഗീതികാപാദം ശ്ലോകം 12)

അതായതു്: 225, 224, 222, 219, 215, 210.

205, 199, 191, 183, 174, 164.

154, 143, 131, 119.

106, 93, 79, 65, 51, 37, 22, 7. ഇലികൾ എന്നു്.

"ഈ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളെ ആകിലുമാം ഭുജാകോടിജ്യാക്കൾ എന്നു കല്പിക്കാം" എന്നു ചില ഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ ഈ വാക്യത്തിന്നു പാഠാന്തരം കാണുന്നുണ്ടു്.

* ഈ ഖണ്ഡജ്യാക്കളെ 7, 22, 37.....എന്ന ക്രമത്തിലും പഠിക്കേണം. അപ്പോൾ അവററിന്നു് ഉൽക്രമജ്യാക്കളെന്നു പേർ. ഇവയുടെ യോഗംകൊണ്ടു ശരങ്ങളുണ്ടാകുന്നു. ഉൽക്രമജ്യാവു് എന്നുവെച്ചാൽ ശരം തന്നെ. മൂലത്തിൽ ഉൽക്രമജ്യാക്കൾ എന്നതിന്നു് ഉൽക്രമജ്യാഖണ്ഡങ്ങളെന്നർത്ഥം.

8-ാം ജ്യാവ് = 225 + 224 + 222 + 219 + 215 + 210 + 205 + 199 = 1719.

അതിന്റെ ശരം = 7 + 22 + 37 + 51 + 65 + 79 + 98 + 106 = 460

8-ാം ജ്യാവിന്റെ കോടി = ത്രിജ്യ — 8-ാം ജ്യാശരം = 3438 − 460 = 2978

|| അത്ര പഠിതജ്യാക്കളുടെ യോഗമിഷ്ടജ്യാവാകുന്നതു് എന്നർത്ഥം.

മിത്തെ ചാപഖണ്ഡൈകദേശത്തിന്റെ ജ്യാഖണ്ഡൈകദേശം. എന്നാലിഷ്ടജ്യാവത്ത്.

ഇവിടെ ജ്യാഖണ്ഡൈകദേശമുണ്ടാക്കുംപ്രകാരം പിന്നെ. ഇച്ചാപഖണ്ഡം പ്രമാണമാകുമ്പോൾ ഈ ഖണ്ഡജ്യാക്കളിൽ ഇത്രാമത്തു പ്രമാണഫലം, ഇച്ചാപഖണ്ഡൈകദേശത്തിന്ന് എത്ര ജ്യാഖണ്ഡൈകദേശം എന്ന് ഈ ത്രൈരാശികംകൊണ്ടുണ്ടാക്കാം. അതു സ്ഥൂലമത്രെ. അതിന്നു ഹേതു. നടേത്തെ ചാപത്തിലിരട്ടി രണ്ടാംചാപം, മുമ്മടങ്ങു മൂന്നാംചാപം. ഇങ്ങനെ ചാപങ്ങൾ. നടേത്തെ ജ്യാവിലിരട്ടി ഇല്ല രണ്ടാംജ്യാവ്, മുമ്മടങ്ങില്ല മൂന്നാംജ്യാവ് എന്നിവണ്ണമിരിക്കും. അതിന്നു ഹേതു. നടേത്തെ ചാപത്തിന്നു വളവില്ല, ശരം പെരികെ കുറകയാൽ; ജ്യാവിനോടു മിക്കവാറും സമം. ചാപം വലുതായോളം വളവ് ഏറും. അവിടെ ജ്യാവു കുറവേ നീളമുണ്ടായിരിപ്പൂ, ശരന്നീളമേറുകയാൽ. എന്നാൽ ചാപം പ്രമാണമായിട്ടു ജ്യാവിനെ ത്രൈരാശികം ചെയ്യരുത്, ഫലം സ്ഥൂലമാകയാൽ.

പഠിതജ്യാക്കളെ സൂക്ഷ്മമായിട്ടു വരുത്തുംപ്രകാരം

അനന്തരം പഠിതജ്യാക്കളെത്തന്നെ സൂക്ഷ്മമായിട്ടറിയുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നുണ്ട്. അവിടെ നടേത്തെ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ മൂലമാകുന്ന പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കലും ഇവിടുന്നു വടക്കു നീങ്ങി രാശ്യഷ്ടമാംശം ഇരുനൂററിരുപത്തഞ്ചിലി ചെന്നേടം അഗ്രം അവിടേയും സ്പർശിച്ചിട്ട് ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. യാവചിലവ പിന്നെ അച്ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ മൂലാഗ്രങ്ങളിൽനിന്നു തുടങ്ങിയ ഭുജാകോടി ഖണ്ഡജ്യാക്കൾ, അവററെ അന്യോന്യം ഭുജാകോടികളായിട്ടു കല്പിക്കുമ്പോൾ ഇവററിന്റെ കർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും അസ്സമസ്തജ്യാവ്. പിന്നെ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്ന് ഇച്ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുമാറ് ഒരു വ്യാസാർദ്ധത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്റെ അഗ്രം ഇസ്സമസ്തജ്യാവിന്റെ ശരമാകുന്നത്. ആകയാൽ ഈ വ്യാസാർദ്ധവും സമസ്തജ്യാവും തങ്ങളിൽ വിപരീതദിക്ക് ആകയാൽ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽനിന്ന് ഈ വ്യാസാർദ്ധാഗ്രം എത്ര വടക്കു നീങ്ങി ഇരിക്കുന്നു, ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്റെ * ദക്ഷിണാഗ്രത്തിങ്കൽനിന്ന്

* ഇവിടെ ദിക്കിനെ മാത്രം അപേക്ഷയുള്ളതുകൊണ്ടും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രവും ഭുജാജ്യാക്കളും തുല്യദിക്കുകളാകയാലും ഭുജാജ്യാക്കളേയും അതാതു സ്ഥാനത്തു ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രമെന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

അസ്സമസ്തജ്യാഗ്രം ആയംശംകൊണ്ടു കിഴക്കു നീങ്ങി ഇരിക്കും‡. ഇവിടെ ആദ്യചാപസമസ്തജ്യാവിനെ കുറിച്ചു ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രമാകുന്നതു് ആദ്യജ്യാവു തന്നെ. പിന്നെ ഈ വ്യാസാൎദ്ധാഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിട്ടു രണ്ടു ഭുജാകോടിജ്യാക്കളെ കല്പിപ്പൂ. അവിടെ ഖണ്ഡാൎദ്ധമാകുന്ന നൂറെറാരുപത്തുരണ്ടര ഇലി ഭുജാചാപമാകുന്നതു്. വളവു കുറയുകയാൽ ഇച്ചാപത്തെതന്നെ അൎദ്ധജ്യാവു് എന്നു കല്പിച്ചു് ഇതിന്റെ വൎഗ്ഗത്തെ വ്യാസാൎദ്ധവൎഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു മൂലിച്ചതു കോടിജ്യാവു് ഇരുപത്തിമൂന്നര ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ജ്യാവു്. ഇതു പോയ വ്യാസാൎദ്ധശേഷം ഭുജാശരം. ഇവിടെ പ്രഥമചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പൎശിക്കുന്ന വ്യാസാൎദ്ധകൎണ്ണത്തിന്നു നൂറെറാരുപത്തുരണ്ടര ഇലി ഭുജാജ്യാവാകുന്നതു്. ഈ ജ്യാവിലിരട്ടിപോന്നിരിക്കുന്ന സമസ്തജ്യാകൎണ്ണത്തിന്നു് എത്ര ഭുജ എന്ന ഇത്ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു സമസ്തജ്യാകൎണ്ണത്തിന്റെ ഭുജ ആയിരിക്കുന്ന പ്രഥമജ്യാശരമുണ്ടാകും. ഇവിടെ ത്രിജ്യാകൎണ്ണത്തിന്നു തെക്കുവടക്കു ഭുജാ. ഇത്ത്രിജ്യാകൎണ്ണത്തിന്നു വിപരീതമാകയാൽ സമസ്തജ്യാകൎണ്ണത്തിന്നു കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറു ഭുജാ. പിന്നെ ഈ വ്യാസാൎദ്ധകൎണ്ണത്തിന്നു് ഇരുപത്തിമൂന്നര ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ജ്യാവു കോടിയാകുന്നതു്. ഇസ്സമസ്തജ്യാകൎണ്ണത്തിന്നു് എത്ര കോടി എന്നു് ആദ്യജ്യാവുണ്ടാകും. ഇവിടെ ത്രിജ്യാകൎണ്ണത്തിന്നു കോടി കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറു്, സമസ്തജ്യാകൎണ്ണത്തിന്നു തെക്കുവടക്കു കോടി. പിന്നെ പ്രഥമജ്യാശരം വ്യാസാൎദ്ധത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ പ്രഥമജ്യാകോടി ഉണ്ടാകും. ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ദ്വിതീയാദിജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ. അതു് എങ്ങനെ എന്നു്. ഇവിടെ ഇനി പ്രഥമജ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിട്ടു് ഒരു വ്യാസാൎദ്ധകൎണ്ണത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്നു ഭുജാകോടികളാകുന്നതു നടേത്തെ ജ്യാവും ഇരുപത്തിമൂന്നാംജ്യാവും. ഇവ ഇവിടെ പ്രമാണഫലങ്ങളാകുന്നതു്. പിന്നെ നടേത്തെ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ നടുവിലും രണ്ടാംചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ നടുവിലും സ്പൎശിച്ചിട്ടു് ഒരു സമസ്തജ്യാകൎണ്ണത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതു ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നതു്. ഇസ്സമസ്തജ്യാവും രാശിയിൽ എട്ടൊന്നായിട്ടിരിക്കും, രണ്ടു ചാപഖണ്ഡത്താലും പപ്പാതി കൂടുകയാൽ. ഇതിന്നു് ഇച്ഛാഫലങ്ങളാകുന്നതു രണ്ടാംചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡജ്യാവു നടേത്തെ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ നടുവിലഗ്രമായിരി

‡ Ancient Hindu Mathematicians seem to have some idea of vectors and angles.

കുന്ന കോടിജ്യാവോളമുള്ളതു ഒന്ന്; ഈ ഭുജാഖണ്ഡജ്യാസമ്പാതത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങീട്ടു കോടിജ്യാവിന്റെ അഗ്രം ഒന്ന്. ഇതു കോടിഖണ്ഡമാകുന്നതു്. ഈ കോടിഖണ്ഡം പോയ ശേഷം കോടിജ്യാവു* ദ്വിതീയചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന കോടിജ്യാവായിരിക്കും. പിന്നെ ഈ ഭുജാഖണ്ഡം പ്രഥമചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാജ്യാവിൽ കൂട്ടൂ. എന്നാൽ ദ്വിതീയചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാജ്യാവുണ്ടാകും. പിന്നെ ഈ ജ്യാക്കൾ പ്രമാണഫലങ്ങളായി ഈ ജ്യാഗ്രങ്ങളുടെ സമ്പാതത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണം പ്രമാണമായി ദ്വിതീയചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവു് ഇച്ഛയായി കല്പിച്ചിട്ടുണ്ടാക്കിയ ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ ദ്വിതീയചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളാകുന്നതു്. ഇതിൽ ഭുജാഖണ്ഡം പ്രഥമജ്യാവിൽ കൂട്ടൂ. കോടിഖണ്ഡത്തെ ഇരുപത്തിമൂന്നാംജ്യാവിൽ കളയൂ. എന്നാൽ രണ്ടാംജ്യാവും ഇരുപത്തിരണ്ടാംജ്യാവും ഉണ്ടാകും. ഇവ ഭുജാകോടികളായിട്ടുമിരിക്കും. പിന്നെ ഇവ പ്രമാണഫലങ്ങളായിട്ടു തൃതീയചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടിജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ അവ പ്രമാണഫലങ്ങളായിട്ടു തൃതീയചാപത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടിജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഒടുക്കത്തോളമിവണ്ണം. അവിടെ ചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടാകുന്നതു മദ്ധ്യത്തിങ്കലേതിൽ സംസ്കരിപ്പൂ. ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടാകുന്ന ഖണ്ഡജ്യാക്കൾ ഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കൽ ഉണ്ടായവററിൽ സംസ്കരിപ്പൂ. എന്നാൽ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലേവ ഒരു പരിഷ; അഗ്രത്തിങ്കലേവ ഒരു പരിഷ. ഇവററിൽ മദ്ധ്യത്തിങ്കലേവററെ ഉപേക്ഷിച്ചു് അഗ്രത്തിങ്കലേവററെ പഠിച്ചേപ്പൂ. ഇവ പഠിതജ്യാക്കളാകുന്നതു്.

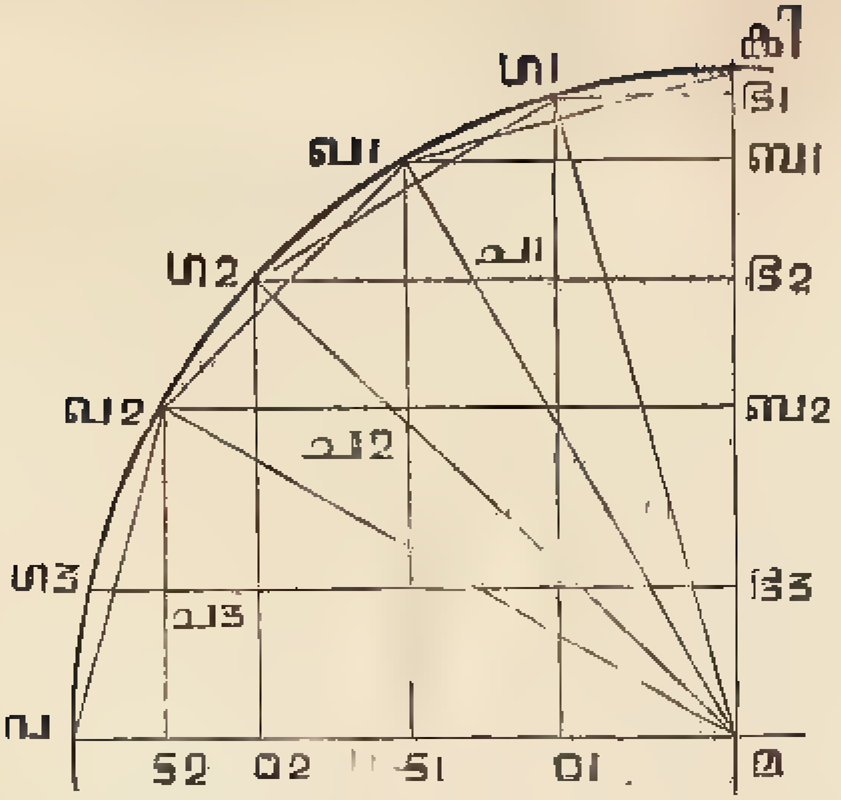
പരിലേഖം 34-ൽ മ കേന്ദ്രമായിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ചതുരംശത്തെ മൂന്നു തുല്യഭാഗങ്ങളായിട്ടു വിഭജിക്കുക.

തുല്യചാപങ്ങൾ:— കിഖ$_1$, ഖ$_1$ഖ$_2$, ഖ$_2$വ.

ഗ$_1$, ഗ$_2$, ഗ$_3$ ഇവ ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ മദ്ധ്യങ്ങൾ.

ഈ ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽനിന്നും ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യങ്ങളിൽനിന്നും ഭുജകളേയും കോടികളേയും ഉണ്ടാക്കുക. മഗ$_1$, മഖ$_1$, മഗ$_2$, മഖ$_2$, എന്നീ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളേയും വരക്കുക.

* ആദ്യഭുജയുടെ കോടിജ്യാവിൽനിന്നു് ഈ കോടിഖണ്ഡം പോയശേഷം



പരിലേഖം 84.

ഒന്നിന്റെ ഭുജാകോടികൾ മറ്റേതിന്റെ ഭുജാകോടികൾക്കു വിപരീതദിക്കുകളാകയാൽ, $\underline{\text{മഗ}_1\text{ഭ}_1}$, $\underline{\text{കിഖ}_1\text{ബ}_1}$ ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\therefore \text{ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജം} = \underline{\text{ഖ}_1\text{ബ}_1} = \frac{\text{മഭ}_1 \times \text{കിഖ}_1}{\text{ത്രിജ്യാ}}.$$

$$\text{ഇതിന്റെ ശരം } \underline{\text{കിബ}_1} = \frac{\text{ഗ}_1\text{ഭ}_1 \times \text{കിഖ}_1}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടി} &= \underline{\text{ഖ}_1\text{ട}_1} \\ &= \underline{\text{മബ}_1} \\ &= \underline{\text{മകി}} - \underline{\text{കിബ}_1} \\ &= \text{ത്രിജ്യാ} - \underline{\text{കിബ}_1} \end{aligned}$$

മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ $\underline{\text{മഖ}_1\text{ബ}_1}$, $\text{ഗ}_1\text{ഗ}_2\text{ച}_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങളും തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\therefore \text{ഗ}_2\text{ച}_1 = \frac{\text{മബ}_1 \times \text{ഗ}_1\text{ഗ}_2}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\text{ഗ}_1\text{ച}_1 = \frac{\text{ഖ}_1\text{ബ}_1 \times \text{ഗ}_1\text{ഗ}_2}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

പിന്നെയും തുല്യാകാരങ്ങളായിരിക്കുന്ന $\text{മഗ}_2\text{ഭ}_2$, $\text{ഖ}_1\text{ഖ}_2\text{ച}_2$ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ

$$\text{ഖ}_2\text{ച}_2 = \frac{\text{മഭ}_2 \times \text{ഖ}_1\text{ഖ}_2}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\text{ഖ}_1\text{ച}_2 = \frac{\text{ഗ}_2\text{ഭ}_2 \times \text{ഖ}_1\text{ഖ}_2}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

ഇങ്ങനെ വൃത്തചതുരംശത്തെ 24 തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായിട്ട വിഭജിക്കുകയാണെങ്കിൽ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവു കർണ്ണമായിട്ട പല ഭുജാകോടികളെ ഉണ്ടാക്കാം.

കിഖ$_1$ = ഗ$_1$ഗ$_2$ = ഖ$_1$ഖ$_2$ = ഗ$_2$ഗ$_3$ = ... = രാശ്യഷ്ടമാംശസമസ്തജ്യാവ്.

കിഗ$_1$ എന്ന ചാപഖണ്ഡാർദ്ധം $=\frac{225}{2}=112\frac{1}{2}$ ഇലി.

ഖണ്ഡം വളരെ ചെറുതായതുകൊണ്ടു കിഗ$_1$ എന്ന ചാപവും ഗ$_1$ഭ$_1$ എന്ന അതിന്റെ ജ്യാവും തുല്യമെന്നു കല്പിക്കാം.

അപ്പോൾ ഗ$_1$ഭ$_1$ $=112\frac{1}{2}$ ഇലി.

അതുപോലെതന്നെ ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാക്കളെ ചാപഖണ്ഡതുല്യമെന്നും കല്പിക്കാം.

∴ കിഖ$_1$ = ഗ$_1$ഗ$_2$ = ... = 225 ഇലി.

ഇവിടെ അർദ്ധചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജം $=112\frac{1}{2}$ ഇലി.

അതിന്റെ കോടി = മഭ$_1$ $=\sqrt{\text{ത്രിജ്യ}^2-(112\frac{1}{2})^2}$.

ഭുജാശരം അല്ലെങ്കിൽ അർദ്ധചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം.

= കിഭ$_1$

= ത്രിജ്യാ − മഭ$_1$.

ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവ് = 225 ഇലി.

ഈ ജ്ഞാതങ്ങളായിരിക്കുന്ന വസ്തുക്കളെക്കൊണ്ട് എല്ലാ ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടേയും ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളെ വെവ്വേറെ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവയിൽനിന്നു 24 ജ്യാക്കളെയുമുണ്ടാക്കാം.

1) $\frac{\text{സമസ്തജ്യാവ്}\times\text{അർദ്ധചാപഖണ്ഡകോടി}}{\text{ത്രിജ്യാ}}=\frac{\text{കിഖ}_1\times\text{മഭ}_1}{\text{ത്രിജ്യാ}}=\text{ഖ}_1\text{ബ}_1$ (ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡം).

$\frac{\text{സമസ്തജ്യാവ്}\times\text{അർദ്ധചാപഖണ്ഡഭുജ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}=\frac{\text{കിഖ}_1\times\text{ഗ}_1\text{ഭ}_1}{\text{ത്രിജ്യാ}}=\text{കിബ}_1$ (ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം)

ത്രിജ്യാ − ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം.

= മകി − കിബ$_1$

= മബ$_1$

= ആദ്യഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടി

= 23 ഖണ്ഡങ്ങളുടെ ഭുജ

= 23-ാം ജ്യാവ്.

ആദ്യഭുജാജ്യാവ് = ആദ്യഭുജാഖണ്ഡംതന്നെ.

2) $\frac{\text{സമസ്തജ്യാവ്}\times 23\text{-ാം ജ്യാവ്}}{\text{ത്രിജ്യാ}}=\frac{\text{ഗ}_1\text{ഗ}_2\times\text{മബ}_1}{\text{ത്രിജ്യാ}}=\text{ഗ}_2\text{വ}_1$ (ഗ$_1$ഗ$_2$ എന്ന ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡം)

$\dfrac{\text{സമസ്തജ്യാവ്} \times \text{ആദ്യജ്യാവ്}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \dfrac{\text{ഗ}_1\text{ഗ}_2 \times \text{ഖ}_1\text{ബ}_1}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \text{ഗ}_1\text{ഘ}_1$ (ഗ$_1$ഗ$_2$ എന്ന ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം)

ഗ$_2$ഘ$_1$ + അരചാപത്തിന്റെ ഭുജ = ഗ$_2$ഘ$_1$ + ഗ$_1$ഛ$_1$

= ഗ$_2$ഘ$_1$ + ഘ$_1$ഛ$_2$

= ഗ$_2$ഛ$_2$. (ഒന്നരചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജ)

അരചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടി − ഗ$_1$ഘ$_1$ = മഛ$_1$ − ഗ$_1$ഘ$_1$

= മഛ$_1$ − ഛ$_1$ഛ$_2$

= മഛ$_2$ (ഒന്നരചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടി)

8. $\dfrac{\text{സമസ്തജ്യാവ്} \times \text{ഒന്നരചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടി}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$

$= \dfrac{\text{ഖ}_1\text{ഖ}_2 \times \text{മഛ}_2}{\text{ത്രിജ്യാ}}$

= ഖ$_2$ഘ$_2$ (രണ്ടാംചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡം)

$\dfrac{\text{സമസ്തജ്യാവ്} \times \text{ഒന്നരചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$

$= \dfrac{\text{ഖ}_1\text{ഖ}_2 \times \text{ഗ}_2\text{ഛ}_2}{\text{ത്രിജ്യാ}}$

= ഖ$_1$ഘ$_2$ (രണ്ടാംചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം).

ഖ$_2$ഘ$_2$ + ആദ്യജ്യാവ് = ഖ$_2$ഘ$_2$ + ഖ$_1$ബ$_1$

= ഖ$_2$ഘ$_2$ + ഘ$_2$ബ$_2$ = ഖ$_2$ബ$_2$

= ദ്വിതീയജ്യാവ്.

23-ാം ജ്യാവ് − ഘ$_2$ഖ$_1$ = മബ$_1$ − ബ$_1$ബ$_2$ = മബ$_2$ = ഖ$_2$ഠ$_2$

= ദ്വിതീയജ്യാവിന്റെ കോടി.

= 22-ാം ജ്യാവ്.

....

....

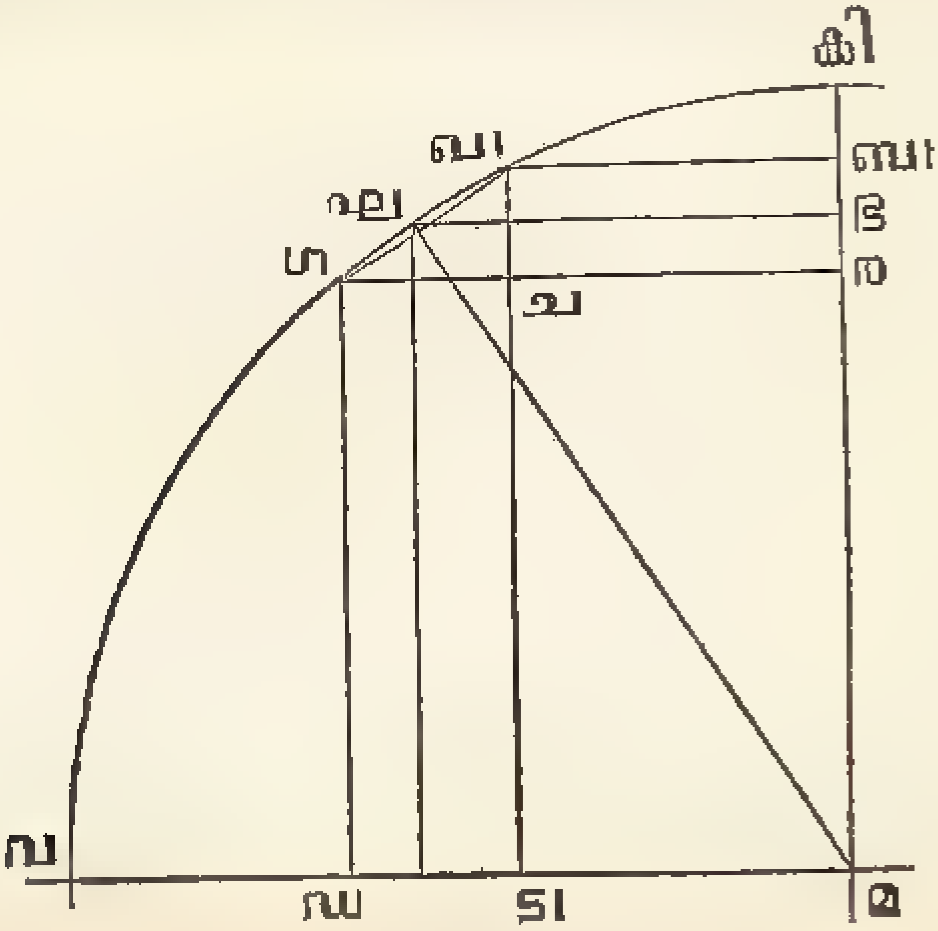
ഇങ്ങനെ (1), (3) തുടങ്ങിയുള്ള പരീക്ഷയിൽനിന്നും പഠിതജ്യാക്കൾ വരും.]

ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലെ ജ്യാനയനപ്രകാരം

പിന്നെ ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കലൊഴിയ ഇടയിലൊന്ന് ഇഷ്ടപ്രദേശമാകുമ്പോൾ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികളെ അറിവാനുമിതുതന്നെ ഉപായം. ഇസ്സമീപത്തിങ്കലെ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കന്ന് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തോടിടക്ക ശിഷ്ടചാപമെന്നു പേർ. അശ്ശിഷ്ടചാപത്തെതന്നെ സമസ്തജ്യാവായി ഇഷ്ടാരാശിയായി കല്പിച്ച് ത്രൈരാശികം ചെയ്തുണ്ടാകുന്ന ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ അശ്ശിഷ്ടചാപത്തിന്റെ ഭുജാകോടിഖണ്ഡജ്യാക്കൾ ആയിട്ടിരിക്കും. അവറെറ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിന്നടുത്തുള്ള ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തി

കലെ പരിതജ്യാക്കളിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ വൃത്തത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലഗ്രങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടിജ്യാക്കളുണ്ടാകും. അവിടെ ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന വ്യാസാൎദ്ധകൎണ്ണം പ്രമാണമാകുന്നതു്. ഇതിന്റെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കൾ പ്രമാണഫലങ്ങളാകുന്നതു്. ഇവറ്റെ അറിഞ്ഞീല പിന്നെ. എന്നിട്ടു് ഇവിടക്കുമിതുതന്നെ ഉപായം. ഇവിടെ ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കലും പരിതജ്യാഗ്രത്തിങ്കലും സ്പൎശിച്ചിട്ടു ശിഷ്ടചാപത്തിൽ പാതിക്കു് ഒരു സമസ്തജ്യാവിനെ കൎണ്ണമായി കല്പിച്ചു് ഇക്കൎണ്ണത്തിന്റെ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളെ ഇച്ഛാഫലങ്ങളായി ഉണ്ടാക്കി പരിതജ്യാക്കളിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ജ്യാക്കളുണ്ടാകും. ഇവറ്റിന്നു പിന്നെ ശിഷ്ടചാപാൎദ്ധത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രങ്ങളായിരിക്കുന്ന ജ്യാക്കളെ അപേക്ഷ ഉണ്ടു്. അവ പരിതജ്യാക്കൾതന്നെ എന്നു കല്പിപ്പൂ, ഈഷൽഭേദമേ ഉള്ളൂ എന്നിട്ടു്. ഇതുകൊണ്ടു സൂക്ഷ്മത പോരാഞ്ഞിൽ ശിഷ്ടചാപത്തിൽ നാലൊന്നിന്നു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിച്ചു് ഇതിന്നു ഖണ്ഡജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ നടേ. ഇതും പോരാഞ്ഞിൽ ഇതിന്റെയുമൎദ്ധത്തിങ്കലേയ്ക്കു കല്പിച്ചുകൊള്ളൂ. ഇതിനെ ഇഷ്ടദോഃകോടിധനുഷോഃ എന്നതുകൊണ്ടു ചൊല്ലിയതു്.

[24 പരിതജ്യാക്കളേയും അറിഞ്ഞതിന്നുശേഷം ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ജ്യാഗ്രങ്ങളുടെ ഇടയിലുള്ള ചാപഖണ്ഡത്തിൽ ഏതെങ്കിലുമൊരു് ഇഷ്ടപ്രദേശ



പരിലേഖം 85.

ത്തിങ്കലെ ഭുജാകോടികളെ വരുത്തും പ്രകാരത്തെ കാണിക്കുന്നു. മുമ്പിൽപറഞ്ഞ ന്യായംതന്നെ ഇവിടക്കുമുപായം.

പരിലേഖം 85-ൽ, ഖ₁ ഒരു പഠിതജ്യാവിന്റെ അഗ്രം.

ഖ₁ബ₁ അവിടത്തെ ഭുജാജ്യാവ്.

ഖ₁ട₁ അവിടത്തെ കോടിജ്യാവ്.

ഗ ഒരിഷ്ടപ്രദേശം.

ഇതിന്റെ ഭുജാകോടികളായ ഗര, ഗഢ ജ്ഞേയങ്ങൾ.

ഖ₁ഗ ശിഷ്ടചാപം

ഘ ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യം.

ഘമ ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ഭുജാജ്യാവ്.

ഒഘ ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യത്തിൽ കൂടിയുള്ള വ്യാസാർദ്ധം.

ഒന്നിന്റെ ഭുജാകോടികൾ തന്നെ മറ്റേതിന്റെ ഭുജാകോടികൾ തന്നെ ക്രമേണ വിപരീതദിക്കുകളാകയാൽ ഒഘമ, ഖ₁ഗച എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\therefore \text{ഗച} = \frac{\text{ഗഖ}_1 \times \text{ഒമ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\text{ഖ}_1\text{ച} = \frac{\text{ഗഖ}_1 \times \text{ഘമ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

ഒരു ചാപഖണ്ഡം = 225 ഇലി. ഖ₁ഗ എന്ന ശിഷ്ടചാപം ചാപഖണ്ഡാർദ്ധമായ $112\frac{1}{2}$ ഇലിയിൽ കുറവായിരിക്കും. അതുകൊണ്ടു ശിഷ്ടചാപത്തെത്തന്നെ സമസ്തജ്യാവായി കല്പിക്കാം. ഖ₁, ഘ എന്ന ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തിൽ വളരെ അടുത്തായതുകൊണ്ടു ഘ എന്നതിൽനിന്നുള്ള ഭുജാകോടികളെ പഠിതജ്യാതുല്യങ്ങൾ എന്നു കല്പിക്കാം.

$$\therefore \text{ഒമ} = \text{ഒബ}_1;\ \text{ഘമ} = \text{ഖ}_1\text{ബ}_1$$

$$\therefore \text{ഭുജാഖണ്ഡം} = \text{ഒബ}_1 \times \frac{\text{ശിഷ്ടചാപം}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$= \text{പഠിതകോടിജ്യാവ്} \times \frac{\text{ശിഷ്ടചാപം}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\therefore \text{ഭുജ ഗര} = \text{പഠിതഭുജാജ്യാവ്} + \text{പഠിതകോടിജ്യാവ്} \times \frac{\text{ശിഷ്ടചാപം}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\text{കോടി ഗഢ} = \text{പഠിതകോടിജ്യാവ്} - \text{പഠിതഭുജാജ്യാവ്} \times \frac{\text{ശിഷ്ടചാപം}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

ഖ₁ഗ എന്ന ശിഷ്ടചാപം $112\frac{1}{2}$ ഇലിയിൽ കൂടുതലാണെങ്കിൽ മീതെ ചാപാഗ്രത്തിങ്കലുള്ള ഭുജാകോടിജ്യാക്കളിൽ ജ്യാഖണ്ഡങ്ങളെ സംസ്കരിക്കേണം. ഖണ്ഡങ്ങളെ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതിന്നു വിപരീതമായി സംസ്കരിക്കുകയും വേണം.

ഇവിടെ സൂക്ഷ്മത പോരാ എന്നുണ്ടെങ്കിൽ ശിഷ്ടചാപത്തിന്റെ അർദ്ധത്തെയോ പലുതംശത്തെയോ സമസ്തജ്യാവെന്നു കല്പിച്ച് ഈ ക്രിയ ആവൃത്തി

ച്ചു ചെയ്തു ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി പഠിതജ്യാക്കളിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ സൂക്ഷ്മതരങ്ങളായ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളുണ്ടാകും.

ഇഷ്ടദോഃകോടിധനുഷോസ്സ്വാസമീപസമീരിതഃ ।
ജ്യേ ദ്വേ സാവയവേ ന്യസ്യ കൢപ്താദൂനാധികം ധനുഃ ॥
ഛിന്നതല്ലിപ്തികാമൈക്യകശരമൈശലശിഖിനവഃ ।
ന്യസ്യാംച്ഛേദായ ച മിഥസ്തത്സംസ്കാരവിധിത്സയാ ॥
ഹരിതൈകാം പ്രക്ഷിപേജ്ജ്യാന്യാൽ തദ്ധനുഷ്യധികോനകേ ।
അന്യസ്യാമഥ താം ഛിന്നാം തഥാ സ്യാന്മിഥിസംസ്കൃതിഃ ।
ഇതി തേ കൃതസംസ്കാരേ സ്വാഗ്രേണ ധനുഷോസ്തയോഃ' ഇതിമാധവഃ

ഇഷ്ടപ്രദേശം ഓജപദത്തിങ്കലോ യുഗ്മപദത്തിങ്കലോ സംഭവിക്കാം. ആ പദത്തിങ്കൽ ഗതമായിട്ടോ ഏഷ്യമായിട്ടോ ഇരിക്കുന്ന ഇഷ്ടചാപഭാഗത്തിന്നു ജ്യാക്കളെ വരുത്തേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. ഈ ചാപഭാഗത്തിന്ന് ഇഷ്ടദോഃകോടിധനുസ്സ് എന്നു പറയുന്നു. ഈ ചാപാഗ്രത്തിന്റെ നേരെ മേലേയോ കീഴേയോ ഉള്ള ചാപസന്ധിയിലെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളെ സ്വാസമീപസമിരിതജ്യാക്കൾ എന്നു പറയുന്നു. ഉദ്ദിഷ്ടഭുജാകോടികളെ വരുത്തുവാനുള്ള ക്രിയ ഇങ്ങനെയാണ്:—

(1) ആദ്യമായി ശിഷ്ടചാപമാകുന്ന ഊനാധികധനുസ്സിനെ വരുത്തുക. ഇത് ഇഷ്ടധനുസ്സും സ്വാസമീപസമിരിതജ്യാവിന്റെ ചാപവും തമ്മിലുള്ള അന്തരം. ഇതിനെ ച എന്നു കല്പിക്കുക.

(2) കൃഷ്ണസംഗസ്സപ്രാൽ (13751) എന്നതിനെ, ഊനാധികധനുസ്സിനെ ഇലിയാക്കി ഇരട്ടിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ഈ ഫലത്തെ ഹ എന്നു കല്പിക്കുക. ഇതൊരു ഹാരകമാകുന്നു.

(3) ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിന്റെ കീഴേയോ മേലേയോ ഉള്ള ചാപസന്ധിയിലെ ഭുജാകോടികളെ (പഠിതജ്യാക്കളെ) സാവയവമായിട്ടു വെക്ക. ഇഷ്ടഭുജയെ കാണ്മാനുദ്ദേശിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഭുജവെച്ചും കോടിയെയാണെങ്കിൽ കോടിയെവെച്ചും ക്രിയ തുടങ്ങണം. ആവശ്യംപോലെയുള്ള പഠിതജ്യാവിനെ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തെ മറേറതിൽ ഋണധനത്തിന്നു തക്കവണ്ണം സംസ്കരിക്കേണം. ഈ സംസ്കൃതജ്യാവിനെ ഇരട്ടിച്ചതിനെ പിന്നെയും ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തെ ആദ്യത്തേതിലും ഋണധനംപോലെ സംസ്കരിച്ചാൽ ഉദ്ദിഷ്ടജ്യാവു വരും. സ്വാസമീപസമിരിതജ്യാവിന്റെ ചാപം ഇഷ്ടധനുസ്സിനെക്കാൾ കുറയുമെങ്കിൽ ധനമായിട്ടും കൂടുമെങ്കിൽ ഋണമായിട്ടും ആ ജ്യാവിൽ സംസ്കാരപ്രകാരം. ഓജപദത്തിങ്കൽ കീഴെ പഠിതജ്യാക്കളെ ഉപയോഗിക്കുന്നപക്ഷം, ഭുജയിൽ ധനമായിട്ടും കോടിയിൽ ഋണമായിട്ടും സംസ്കാരം. മേലെ ജ്യാവാണെങ്കിൽ ഭുജയിൽ ഋണമായിട്ടും കോ

ടിയിൽ ധനമായിട്ടും സംസ്കാരം; യുഗ്മപദത്തിൽ ഇതിന്നു വിപരീതം സംസ്കാരക്രമം. പദാദി മുതൽ ഇഷ്ടപ്രദേശംവരെയുള്ള ചാപഭാഗത്തിന്റെ ജ്യാക്കളെയാണ് കാണേണ്ടത്. ഇവയെല്ലാം ഉദാഹരണങ്ങളെക്കൊണ്ടു മുകളിൽ സ്പഷ്ടമാക്കുന്നുണ്ട്.

ഇഷ്ടപ്രദേശം പ്രഥമപദത്തിലെന്നും സമാസമീപസമീരിതജ്യാക്കൾ കീഴെ സന്ധിയിലുള്ളവ എന്നും കല്പിച്ചു പറയുന്നു. ഭുജാകോടികളെ ഭ, ക, എന്നും കല്പിക്ക. അപ്പോളിവിടെ ഭുജയിൽ ധനമായിട്ടും കോടിയിൽ ഋണമായിട്ടും സംസ്കാരം ചെയ്യേണം.

$$\text{ഹാരകം } ഹ = \frac{13751}{2ച}.$$

$$\text{ഇഷ്ടപ്രദേശഭുജാ} = ഭ + \left(ക - \frac{ഭ}{ഹ}\right) \times \frac{2}{ഹ}.$$

$$\text{ഇഷ്ടപ്രദേശകോടി} = ക - \left(ഭ + \frac{ക}{ഹ}\right) \times \frac{2}{ഹ}.$$

ഈ ക്രിയയുടെ യുക്തിയാണ് യുക്തിഭാഷയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇവിടെ ചാപാർദ്ധത്തെ സമസ്തജ്യാവെന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

പരിതജ്യാക്കൾ (സന്ധിയിങ്കലെ) = ഭ, ക.

ശിഷ്ടചാപം = ച എന്നും മുമ്പിലെപ്പോലെ കല്പിക്ക.

$$\text{ശിഷ്ടചാപാർദ്ധത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം} = \frac{ച}{2} \times \frac{ഭ}{ത്രിജ്യാ}.$$

$$= \frac{ഭ}{ത്രിജ്യാ/ച/2}$$

$$\text{ഹാരകം} = \frac{ത്രിജ്യാ}{\frac{1}{2}ച}$$

$$= \frac{2ത്രിജ്യാ}{ച}$$

$$= \frac{4ത്രിജ്യാ}{2ച}$$

$$= \frac{4 \times 3437\text{ഇലി} - 45\text{വിലി}}{2ച}$$

$$= \frac{13571}{2ച} \; (= ഹ).$$

$$\therefore \text{ശിഷ്ടചാപാർദ്ധത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം} = \frac{ഭ}{ഹ}$$

$$\text{ശിഷ്ടചാപാർദ്ധഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡം} = \frac{ക}{ഹ}$$

$$\text{ശിഷ്ടചാപാർദ്ധാഗ്രത്തിങ്കലെ ഭുജാ} = ഭ + \frac{ക}{ഹ}. \; (= ഭ_1)$$

$$\text{ശിഷ്ടചാപാർദ്ധാഗ്രത്തിങ്കലെ കോടി} = ക - \frac{ഭ}{ഹ} \; (= ക_1)$$

$$\text{ശിഷ്ടചാപത്തിൻെറ ഭുജാഖണ്ഡം} = \text{ച} \times \frac{\text{ക}_1}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$= \frac{\text{ക}_1}{\text{ത്രിജ്യ}/\text{ച}}$$

$$= \frac{\text{ക}_1}{\frac{1}{2}\text{ഹ}}$$

$$= \frac{2\text{ക}_1}{\text{ഹ}}$$

അതുപോലെതന്നെ ശിഷ്ടചാപത്തിൻെറ കോടിഖണ്ഡം $= \frac{2\text{ഭ}_1}{\text{ഹ}}$

$$\text{അപ്പോൾ ശിഷ്ടചാപാഗ്രഭുജാ} = \text{ഭ} + \frac{2\text{ക}_1}{\text{ഹ}} = \text{ഭ} + \left(\text{ക} - \frac{\text{ഭ}}{\text{ഹ}}\right) \times \frac{2}{\text{ഹ}}$$

$$\text{ശിഷ്ടചാപാഗ്രകോടി} = \text{ക} - \frac{2\text{ഭ}_1}{\text{ഹ}} = \text{ക} - \left(\text{ഭ} + \frac{\text{ക}}{\text{ഹ}}\right) \times \frac{2}{\text{ഹ}}$$

ഉദാഹരണം:

ഗ്രഹസ്ഫുടം = 4 രാശി − 9 തിയ്യതി − 44 ഇലി.

വൃത്തത്തിൽ ഒരു പദത്തിനു മൂന്നു രാശി; ഒരു രാശിക്കു എട്ടുജ്യാവ്; $3\frac{3}{4}$ തിയ്യതിക്കൊരു ജ്യാവ്.

ഗ്രഹം ദ്വിതീയപദത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

∴ പദാദിയിങ്കന്നു ഇഷ്ടപ്രദേശംവരെയുള്ള ചാപഭാഗം

$= (4^{s} - 9^{\circ} - 44') - (3^{s} - 0 - 0)$ (s = രാശി; ° = തിയ്യതി; ′ = കല).

$= 1^{s} - 9^{\circ} - 44'$.

ഇതിൽ ഒരു രാശിക്കു എട്ടുജ്യാവും പോയി. $7\frac{1}{2}$ തിയ്യതിക്കു രണ്ടുജ്യാവും പോയി. ഇങ്ങനെ പത്തുജ്യാവും പോയിട്ടു ശിഷ്ടചാപം $= (1^{s} - 9^{\circ} - 44') - (1^{s} - 7^{\circ} - 30')$

$= 2^{\circ} - 14' = 134'$

യുഗ്മപദമായതുകൊണ്ടു ഗതം കോടി, ഏഷ്യം ഭുജ.

∴ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിനു കീഴെ സന്ധിയിലുള്ള കോടിജ്യാവു 10-ാം ജ്യാവ്, ഭുജാജ്യാവു 14-ാം ജ്യാവ്.

ഇഷ്ടപ്രദേശം യുഗ്മപദത്തിലാകകൊണ്ടും കീഴെ സന്ധിയിലുള്ള ജ്യാക്കളെ ഉപയോഗിക്കകൊണ്ടും, ഭുജയിൽ സംസ്കാരം ഋണം, കോടിയിൽ ധനം.

$$\text{ഹാരകം} = \frac{13751}{2 \times 134} = 51.$$

10-ാം ജ്യാവ് $= 2092' - 46''$ (കോടി) — തനഃഖീശ്രീമാനിഹ.

14-ാം ജ്യാവ് $= 2727' - 21''$ (ഭുജ) — കണ്ണാവൃതം സ്ഥിരം.

ഇഷ്ടപ്രദേശകോടിയെ ആദ്യം കാണുന്നു.

$$\frac{\text{കോടിജ്യാ}}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2092' - 46''}{51} = 41' - 2''\ (-)$$

$$\text{ഭുജാജ്യാ} - 41' - 2'' = (2727' - 21) - (41' - 2'') = 2686' - 19''.$$

$$\frac{\text{സംസ്കൃതഭുജാജ്യാവു} \times 2}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2686' - 19'' \times 2}{51} = 105' - 21''\ (+)$$

$\therefore$ ഗ്രഹത്തിന്റെ കോടിജ്യാവ് $= 2092' - 46'' + 105' - 21'' = 2198' - 7''$.

പിന്നെ ഭുജാജ്യാവ്:

$$\frac{\text{ഭുജാജ്യാവ്}}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2727' - 21''}{51} = 53' - 29''(+)$$

$$\text{കോടിജ്യാവ്} + 53' - 29'' = 2146 - 15''$$

$$\frac{\text{സംസ്കൃതകോടിജ്യാവ്} \times 2}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2146' - 15'' \times 2}{51} = 84' - 10''\ (-)$$

$$\text{ഗ്രഹത്തിന്റെ ഭുജാജ്യാവ്} = (2727' - 21'') - (84' - 10'') = 2643' - 11''$$

ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കന്നു മേലെയുള്ള സന്ധിയിങ്കലെ ഭുജാകോടികളെ വെച്ചിട്ടും ക്രിയ ചെയ്യാം. അപ്പോൾ കോടി 11-ാംജ്യാവ്, ഭുജ 13-ാംജ്യാവുമായിട്ടുവരും.

അവിടെ ശിഷ്ടചാപം $= (3^\circ - 45') - (2^\circ - 14') = 1^\circ - 31' = 91'$.

11-ാംജ്യാവ് $= 2266' - 40''$ (കോടി) — അഭിഷിക്തോച്ഛ്രയം.

13-ാംജ്യാവ് $= 2584' - 38''$ (ഭുജ) — ദിഗ്വ്യഭാമാരഃ

ആദ്യം കോടിജ്യാവിനെ കാണുന്നു. ഗുണചാപത്തിൽ മേലെ സന്ധിയിലുള്ള ഭുജാകോടികളെവെച്ചു ക്രിയ ചെയ്യുമ്പോൾ, ഭുജയിങ്കൽ ധനമായിട്ടും കോടിയിങ്കൽ ഋണമായിട്ടും സംസ്കാരക്രമം.

$$\text{ഹാരകം} = \frac{13751}{2 \times 91} = 76.$$

$$\frac{\text{കോടിജ്യാവു}}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2266' - 40''}{76} = 29' - 49''\ (+)$$

$$\text{ഭുജ} + 29' - 49'' = 2584' - 38'' + 29' - 49'' = 2614' - 27''.$$

$$\frac{\text{സംസ്കൃതഭുജ} \times 2}{76} = \frac{2614' - 27'' \times 2}{76} = 68' - 48''\ (-)$$

അപ്പോൾ ഗ്രഹത്തിന്റെ കോടി $= (2266' - 40'') - (68' - 48) = 2197' - 52''$.

പിന്നെ ഭുജാജ്യാവു:—

$$\frac{\text{ഭുജാജ്യാവ്}}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2584' - 38''}{76} = 34' - 0''(-)$$

$$\text{കോടി} - 34' - 0'' = (2266' - 40'') - (34' - 0'') = 2232' - 40''$$

$$\frac{\text{സംസ്കൃതകോടി} \times 2}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2232' - 40'' \times 2}{76} = 58' - 45''\ (+)$$

$$\text{ഗ്രഹത്തിന്റെ ഭുജ} = 2584' - 38'' + 58' - 45'' = 2643' - 23''$$

ഇവിടെ ഫലങ്ങളിൽ വികലയിൽ വ്യത്യാസം കാണുന്നുണ്ട്. അതിനുള്ള ഹേതു മുകളിൽ പറയുന്നുണ്ട്.

പഞ്ചബോധത്തിൽ ഈ ക്രിയതന്നെ ഇപ്രകാരമാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്.

"..................അഥഃ (കേന്ദ്രത്തിന്റെ ഭുജയിൽനിന്നു്)
    പൂർണ്ണാംശജ്യാം വിഭജ്യാൽ
ശിഷ്ടജ്യാവധികമാപ്തം "സ്ഥിതിസദൃ
    മാസേശപരാ" ഹാരകോ ।
ഭോജ്യം "നിത"ഘ്നതാമഹേന വിഭജേൽ
    ലബ്ധം തു കോട്യാസ്സ്വകൃജേൽ
ഘ്നം "നേത്രാസ്യ" ഘ്നതാം ഹരേൽ ഫലയുതാ
    ഭോജ്യാ............" ।

∴ ഇഷ്ടദോഃ കോടിധനുഷോഃ" എന്ന ദിക്കിൽ ഹാരകം $= \frac{2 \times \text{ത്രിജ്യാ}}{\text{ശിഷ്ടചാപം}}$

പഞ്ചബോധത്തിൽ "തിഥിസദൃമാസേശപരഃ" (24751776) എന്ന സംഖ്യ ത്രിജ്യയെ തല്പരയാക്കിയിട്ടുള്ളതിന്റെ ഇരട്ടിയാണു്. ! ഇവിടേയും ഹാരകം

$$= \frac{2 \times \text{ത്രിജ്യാ}}{\text{ശിഷ്ടചാപം}}$$

മൂലത്തിൽ ശിഷ്ടചാപത്തെ സമസ്തജ്യാവായി കല്പിച്ചു് അതിന്റെ ഭുജാകോടികളെ ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു വരുത്തിയാൽ അവ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളായിരിക്കുമെന്നും അവയെ സ്വസമീപസമീരിതജ്യാക്കളിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികൾ വരുമെന്നും ഇവിടെ സൂക്ഷ്മതപോരാഞ്ഞാൽ ആവശ്യംപോലെ ഇഷ്ടചാപാർദ്ധത്തെയോ തച്ചതുരംശത്തെയോ തദഷ്ടാംശത്തെയോ സമസ്തജ്യാവായി കല്പിച്ചു ക്രിയ ചെയ്താൽ സൂക്ഷ്മതരങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികളുണ്ടാകുമെന്നും പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇവിടെ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന സ്ഥൂലതാം തന്നെയാണു് മുൻ ഉദാഹരണത്തിൽ ഫലങ്ങളുടെ വിലയിൽ വന്ന വ്യത്യാസത്തിനും കാരണം.]

ഇങ്ങനെ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന ജ്യാക്കളെ പ്രമാണഫലങ്ങളായി കല്പിക്കുമ്പോൾ ചാപസന്ധിയിങ്കൽ അഗ്രങ്ങളായിരിക്കുന്ന സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജാകോടികളായിട്ടു ചാപസന്ധിയിങ്കലെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കൾ ഉളവാകും. അവിടെ പ്രഥമചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കലവറെറക്കൊണ്ടു പ്രഥമചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിലേവ. അവിടേയും പ്രമാണഫലം പൂർവ്വാപരമെങ്കിൽ ഇച്ഛാഫലം ദക്ഷിണോത്തരം. പ്രമാണഫലം ദക്ഷിണോത്തരമെങ്കിൽ ഇച്ഛാഫലം പൂർവ്വാപരം എന്നിതു നിയതം. പിന്നെയുമുണ്ടു്. ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രം പ്രമാണഫലങ്ങൾക്കു് എങ്കിൽ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലഗ്രം ഇച്ഛാഫലങ്ങൾക്കു്. ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കൽ പ്രമാണഫലങ്ങൾക്കു് അഗ്രമെങ്കിൽ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രങ്ങൾ ഇ

ഷ്ടാഫലങ്ങൾക്ക് എന്നിത്ര നിയതം. ഇവിടെ എല്ലാ ഖണ്ഡജ്യാക്കളും വരുത്തുമ്പോടത്തു സമസ്തജ്യാത്രിജ്യാക്കൾ തന്നെ ഇഷ്ടാപ്രമാണങ്ങളാകുന്നത്. എന്നിട്ടു തുല്യങ്ങൾ അവ. പ്രമാണഫലങ്ങൾക്കു ഭേദമുണ്ടാകകൊണ്ടത്രെ ഇഷ്ടാഫലങ്ങൾക്കു ഭേദമുണ്ടാകുന്നു.

ഖണ്ഡങ്ങളേയും ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളേയും വരുത്തും പ്രകാരം

ഇവിടെ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രങ്ങളായിരിക്കുന്ന കോടികളുടെ അന്തരംകൊണ്ട് ഇഷ്ടരാശിയെ ഗുണിപ്പൂ എങ്കിൽ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളുടെ അന്തരം വരും. പിന്നെ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ദോഃഖണ്ഡംകൊണ്ടു ഗുണിക്കിൽ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ കോടിഖണ്ഡാന്തരം വരും. എന്നാലിവിടെ പ്രഥമചാപസന്ധിയിങ്കലെ ഭുജാജ്യാവിനെ ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ പ്രഥമചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന കോടിഖണ്ഡം വരും. പിന്നെ ആ ഖണ്ഡത്തെ സമസ്തജ്യാവുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. എന്നാൽ പ്രഥമചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡത്തിങ്കന്നു രണ്ടാം ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡം എത്ര കുറയും അതുണ്ടാകും. എന്നാൽ പ്രഥമജ്യാവിനെ ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം പ്രഥമഖണ്ഡജ്യാവും ദ്വിതീയഖണ്ഡജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ചാപസന്ധിയിങ്കലെ പരിജ്യാക്കൾക്കു പിണ്ഡജ്യാക്കൾ എന്നും ഉണ്ടു പേർ. എന്നാലതതു പിണ്ഡജ്യാക്കളെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഖണ്ഡജ്യാന്തരം*. ഇവിടെ യാതൊരു ചാപഖണ്ഡസന്ധിയിൽ അഗ്രമായിട്ടിരിക്കുന്നു പിണ്ഡജ്യാവ് ഇതിന്റെ ഇരുപുറവുമുള്ള ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ ഖണ്ഡജ്യാക്കൾ യാവചിലവ ഇവററിന്റെ അന്തരങ്ങൾ ഫലമായിട്ടു

---

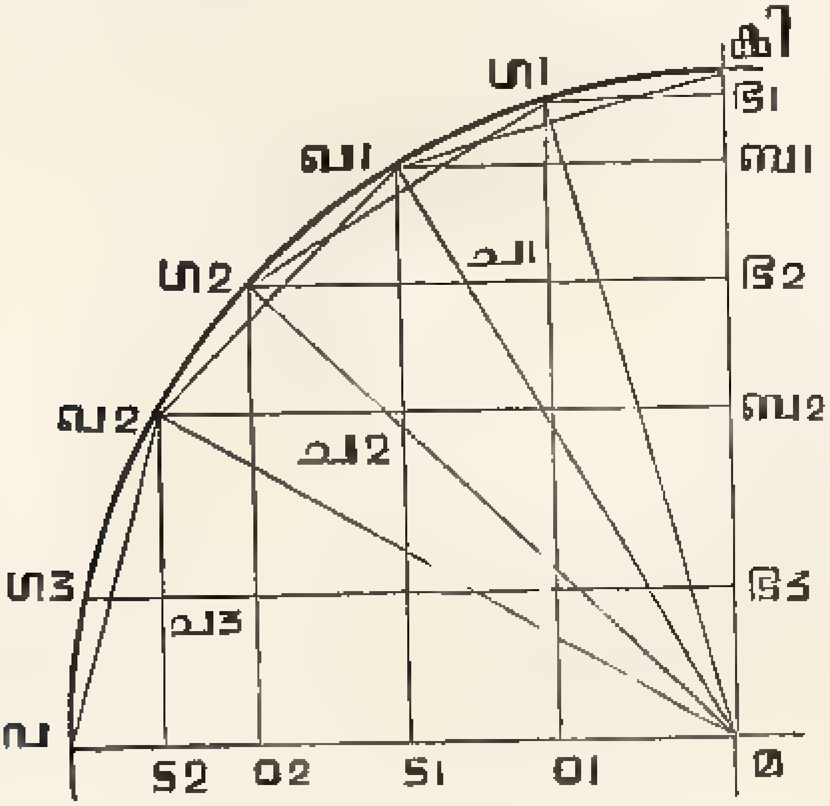
* ഭുജാഖണ്ഡം corresponds to the first differential of $\sin\theta$ which is $\cos\theta\, d\theta$ where $d\theta$ corresponds to ചാപഖണ്ഡം, and $\sin\theta$, $\cos\theta$ correspond to ഭുജാജ്യാ and കോടിജ്യാ, and θ to ഇഷ്ടചാപം.

ഭുജാഖണ്ഡാന്തരം corresponds to the second differential of $\sin\theta$ ie the first differential of $\cos\theta\, d\theta$ ie $-\sin\theta\, (d\theta)^2$

Similarly കോടിഖണ്ഡം→the first differential of $\cos\theta$ ie $-\sin\theta\, d\theta$. and കോടിഖണ്ഡാന്തരം→ $-\cos\theta\, (d\theta)^2$.

ണ്ടാകുന്നത്. ഇവിടെ പിന്നെ ഗുണകാരത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഫലവും ഹാരകത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഗുണ്യവും കൊള്ളാം. എന്നിട്ട് അതതു ഖണ്ഡാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അതതു പിണ്ഡജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ അതതു പിണ്ഡജ്യാവിനെ. എന്നാലും അതതു ഖണ്ഡാന്തരങ്ങൾ വരും. ഇങ്ങനെ ഖണ്ഡങ്ങളും ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളും വരുത്തും പ്രകാരം.

[പരിലേഖം 34-ൽ; മ വൃത്തകേന്ദ്രം. കിഖ$_1$, ഖ$_1$ഖ$_2$, ഖ$_2$വ = മൂന്നു തുല്യചാപഖണ്ഡങ്ങൾ. ഗ$_1$, ഗ$_2$, ഗ$_3$ ഈ ഖണ്ഡങ്ങളുടെ മദ്ധ്യങ്ങൾ.



പരിലേഖം 34.

പ്രഥമചാപാഗ്രഭുജം = ഖ$_1$ബ$_1$

ദ്വിതീയചാപാഗ്രഭുജ = ഖ$_2$ബ$_2$

പ്രഥമചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ഭുജം = ഗ$_1$ഭ$_1$

ദ്വിതീയചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലെഭുജം = ഗ$_2$ഭ$_2$

പ്രഥമചാപാഗ്രകോടി = ഖ$_1$ട$_1$

ദ്വിതീയചാപാഗ്രകോടി = ഖ$_2$ട$_2$

പ്രഥമചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിലെ കോടി = ഗ$_1$ഠ$_1$

ദ്വിതീയചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിലെകോടി = ഗ$_2$ഠ$_2$

$$\text{പ്രഥമചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കലെകോടിഖണ്ഡം} = \text{ഗ}_1\text{ച}_1 = \frac{\text{ഖ}_1\text{ബ}_1 \times \text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\text{ഗ}_1\text{ച}_1 = \text{ഭ}_1\text{ഭ}_2 = \text{മഭ}_1 - \text{മഭ}_2$$

$$\frac{\text{മഭ}_1 \times \text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \text{ഖ}_1\text{ബ}_1 = \text{പ്രഥമചാപഭുജാഖണ്ഡം}$$

$$\frac{\text{മഭ}_2 \times \text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യം}} = \text{ഖ}_2\text{ച}_2 = \text{ദ്വിതീയഭുജാഖണ്ഡം.}$$

$$\frac{\text{ഖ}_1\text{ഝ}_1 \times \text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \text{ഗ}_1\text{ച}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$= \text{ഛ}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} - \text{ഛ}_2 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$= \text{ഖ}_1\text{ഝ}_1 - \text{ഖ}_2\text{ച}_2$$

$$= \text{ആദ്യഭുജാഖണ്ഡം} - \text{ദ്വിതീയഭുജാഖണ്ഡം}$$

$$= \text{ആദ്യദ്വിതീയജ്യാക്കളുടെ ഭുജാഖണ്ഡാന്തരം}$$

അതതു പിണ്ഡജ്യാവിനെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ആ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെയും മേലെ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെയും ഭുജാഖണ്ഡാന്തരമുണ്ടാകും.

ഇതുപോലെതന്നെ ചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കലുള്ള ദോഃഖണ്ഡത്തെ സമസ്തജ്യാവുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അഗ്രത്തിങ്കലെ കോടിഖണ്ഡാന്തരം വരും.

$$\frac{\text{ഗ}_1\text{ഛ}_1 \times \text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \text{കിഝ}_1 = \text{പ്രഥമചാപകോടിഖണ്ഡം}$$

$$\frac{\text{ഗ}_2\text{ച}_2 \times \text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = (\text{ഗ}_2\text{ഛ}_2 - \text{ഗ}_1\text{ഛ}_1) \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$= \text{ഗ}_2\text{ഛ}_2 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} - \text{ഗ}_1\text{ഛ}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$= \text{ഖ}_2\text{ച}_3 - \text{കിഝ}_1$$

$$= \text{കോടിഖണ്ഡാന്തരം.}$$

“ഇവിടെ പിന്നെ ഗുണകാരത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത്……അതതു ഖണ്ഡാന്തരം വരും” എന്ന വാക്യത്തിന്റെ അർത്ഥം വ്യക്തമാക്കാം. ഇവിടെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം ഗുണകാരം, ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം ഹാരകം, പ്രഥമജ്യാവു ഗുണ്യം, ഫലം ഖണ്ഡാന്തരം. പ്രഥമജ്യാവിനെ ഹാരകവും, ആദ്യദ്വിതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരത്തെ ഗുണകാരവും, ദ്വിതീയപിണ്ഡജ്യാവിനെ ഗുണ്യവുമാക്കി കല്പിച്ചാൽ ദ്വിതീയതൃതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം വരും.

$$\text{പ്രഥമജ്യാ} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} = \text{ആദ്യദ്വിതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം}$$

$$\therefore \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} = \frac{\text{ആദ്യദ്വിതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം}}{\text{പ്രഥമജ്യാ}}$$

$$\text{ദ്വിതീയജ്യാ} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} = \text{ദ്വിതീയതൃതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം}$$

$$\therefore \text{ദ്വിതീയപിണ്ഡജ്യാ} \times \frac{\text{ആദ്യദ്വിതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം}}{\text{പ്രഥമജ്യാ}} = \text{ദ്വിതീയതൃതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം.}$$

ഇപ്രകാരംതന്നെ $\frac{\text{തൃതീയപിണ്ഡജ്യാ} \times \text{ദ്വിതീയതൃതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം}}{\text{ദ്വിതീയപിണ്ഡജ്യാ}}$ $=$ തൃതീയചതുർത്ഥഭുജാഖണ്ഡാന്തരം. ഇങ്ങനെ ക്രമേണ കണ്ടുകൊൾക.]

ഖണ്ഡാന്തരയോഗവും ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതാദിയും ഇഷ്ടജ്യാശരവും

അനന്തരം ഖണ്ഡാന്തരയോഗം ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളവററെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെക്കൊണ്ടു് ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ പ്രഥമചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഖണ്ഡജ്യാവാകുന്നതും പിണ്ഡജ്യാവാകുന്നതും ഒന്നേ എന്നോ ചൊല്ലിയല്ലോ മുമ്പിൽ. ഇതിനെ സമസ്തജ്യാവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം നടേത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവും രണ്ടാംഖണ്ഡജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം. ഈ അന്തരത്തെ നടേത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ശേഷം രണ്ടാംഖണ്ഡജ്യാവു്. പിന്നെ അതിനെ നടേത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവിൽ കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാംപിണ്ഡജ്യാവാകും. ഇതിനെ സമസ്തജ്യാവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം രണ്ടാംഖണ്ഡജ്യാവും മൂന്നാംഖണ്ഡജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം. ഇതിനെ രണ്ടാംഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ മൂന്നാംഖണ്ഡജ്യാവുണ്ടാകും. ഇതിനെ രണ്ടാംപിണ്ഡജ്യാവിൽകൂട്ടിയാൽ മൂന്നാംപിണ്ഡജ്യാവുണ്ടാകും. ഇവ്വണ്ണം അതതു പിണ്ഡജ്യാവിനെ ഗുണിച്ചു ഹരിച്ചാൽ അതിന്റെ മീത്തെ ഖണ്ഡാന്തരം വരും. പിന്നെ നടേത്തെ തുടങ്ങി ഇഷ്ടചാപഖണ്ഡത്തോളമുള്ള ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളെ ഒക്കക്കൂട്ടി നടേത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്നു കളവൂ. ശിഷ്ടമിഷ്ടഖണ്ഡജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഈ ഖണ്ഡജ്യാന്തരങ്ങളെ ഒക്കക്കൂട്ടി ഒരിക്കലെ വരുത്തേണമെങ്കിൽ ഇഷ്ടജ്യാവിങ്കന്നു നടേത്തെ പഠിതജ്യാക്കളെ ഒക്കക്കൂട്ടി സമസ്തജ്യാവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഖണ്ഡാന്തരയോഗം. ഇതിനെ പ്രഥമഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ശിഷ്ടമിഷ്ടഖണ്ഡജ്യാവായി വരും. ഇവിടെ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ശരഖണ്ഡയോഗത്തെ സമസ്തജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും ഖണ്ഡാന്തരയോഗം വരും. ശരഖണ്ഡയോഗം പിന്നെ മദ്ധ്യത്തിങ്കലേത്തു് ഉണ്ടാവാൻ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ഭുജാജ്യാപിണ്ഡയോഗത്തെ ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. എന്നാൽ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യോത്ഥശരഖണ്ഡയോഗമുണ്ടാകും.

[$ഭു_1$, $ഭു_2$, $ഭു_3$...... ക്രമേണയുള്ള ഭുജകളെന്നു കല്പിക്ക.

എന്നാൽ ക്രമേണയുള്ള ഭുജാഖണ്ഡങ്ങൾ = $ഭു_1 - 0$, $ഭു_2 - ഭു_1$, $ഭു_3 - ഭു_2$......

ഖണ്ഡാന്തരങ്ങൾ $= \text{ജ}_1 - (\text{ജ}_2 - \text{ജ}_1),\ (\text{ജ}_2 - \text{ജ}_1) - (\text{ജ}_3 - \text{ജ}_2), \ldots\ldots$

ഈ ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളെ ക്രമേണ $\text{ഖ}_1,\ \text{ഖ}_2,\ \text{ഖ}_3 \ldots\ldots$ എന്നു കല്പിക്കുക.

$$\text{ജ}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} = \text{ഖ}_1 = \text{ജ}_1 - (\text{ജ}_2 - \text{ജ}_1) = 2\text{ജ}_1 - \text{ജ}_2$$

$$\text{ജ}_2 - \text{ജ}_1 = \text{ജ}_1 - \text{ജ}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} \quad (\text{രണ്ടാംഖണ്ഡജ്യാവ്})$$

$$\therefore \text{ജ}_2 = \text{ജ}_1 + (\text{ജ}_2 - \text{ജ}_1) = 2\text{ജ}_1 - \text{ജ}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} \quad (\text{രണ്ടാംപിണ്ഡജ്യാവ്})$$

$$\text{ജ}_2 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} = \text{ഖ}_2 = (\text{ജ}_2 - \text{ജ}_1) - (\text{ജ}_3 - \text{ജ}_2).$$

$$\therefore \text{ജ}_3 - \text{ജ}_2 = (\text{ജ}_2 - \text{ജ}_1) - \text{ജ}_2 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{ജ}_3 = \text{ജ}_2 + (\text{ജ}_2 - \text{ജ}_1) - \text{ജ}_2 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

ഇങ്ങനെ ആദ്യജ്യാവിങ്കന്നുതന്നെ മേലെയുള്ള എല്ലാം പിണ്ഡജ്യാക്കളെയും വരുത്താം.

ഇഷ്ടജ്യാവ് അഞ്ചാമത്തേതെന്നു വിചാരിക്കുക.

$$\text{ഖ}_1 = \text{ജ}_1 - (\text{ജ}_2 - \text{ജ}_1)$$
$$\text{ഖ}_2 = (\text{ജ}_2 - \text{ജ}_1) - (\text{ജ}_3 - \text{ജ}_2).$$
$$\text{ഖ}_3 = (\text{ജ}_3 - \text{ജ}_2) - (\text{ജ}_4 - \text{ജ}_3)$$
$$\text{ഖ}_4 = (\text{ജ}_4 - \text{ജ}_3) - (\text{ജ}_5 - \text{ജ}_4)$$
$$\therefore \text{ഖ}_1 + \text{ഖ}_2 + \text{ഖ}_3 + \text{ഖ}_4 = \text{ജ}_1 - (\text{ജ}_5 - \text{ജ}_4)$$

അഞ്ചാംജ്യാഖണ്ഡം $= \text{ജ}_5 - \text{ജ}_4 = \text{ജ}_1 - (\text{ഖ}_1 + \text{ഖ}_2 + \text{ഖ}_3 + \text{ഖ}_4)$

ഇഷ്ടചാപഖണ്ഡത്തോളമുള്ള ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളെയെല്ലാംകൂട്ടി ആദ്യപിണ്ഡത്തിൽനിന്നു കളഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടജ്യാവിന്റെ ഖണ്ഡജ്യാവുവരും.

$$\text{ഖ}_1 = \text{ജ}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{ഖ}_2 = \text{ജ}_2 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

....

....

$$\therefore \text{ഖ}_1 + \text{ഖ}_2 + \text{ഖ}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = (\text{ജ}_1 + \text{ജ}_2 + \text{ജ}_3 + \ldots\ldots) \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

അപ്പോൾ ഖണ്ഡാന്തരയോഗം $=$ പഠിതജ്യായോഗം $\times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$

$=$ ആദ്യജ്യാവ് $-$ ഇഷ്ടജ്യാഖണ്ഡം.

ഇഷ്ടജ്യാഖണ്ഡം $=$ ആദ്യജ്യാവ് $-$ ഇഷ്ടജ്യാവിന്നു കീഴെയുള്ള ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളുടെ യോഗം.

പരിലേഖം 84-ൽ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ശരഖണ്ഡങ്ങൾ $ഭ_1ഭ_2$, $ഭ_2ഭ_3$, $ഭ_3ഭ_4$......എന്ന്.

$$ഭ_1 \times \frac{സമസ്തജ്യാവ്}{ത്രിജ്യാ} = ഗ_1ച_1 = ഭ_1ഭ_2$$

$$ഭ_2 \times \frac{സമസ്തജ്യാവ്}{ത്രിജ്യാ} = ഭ_2ഭ_3$$

....

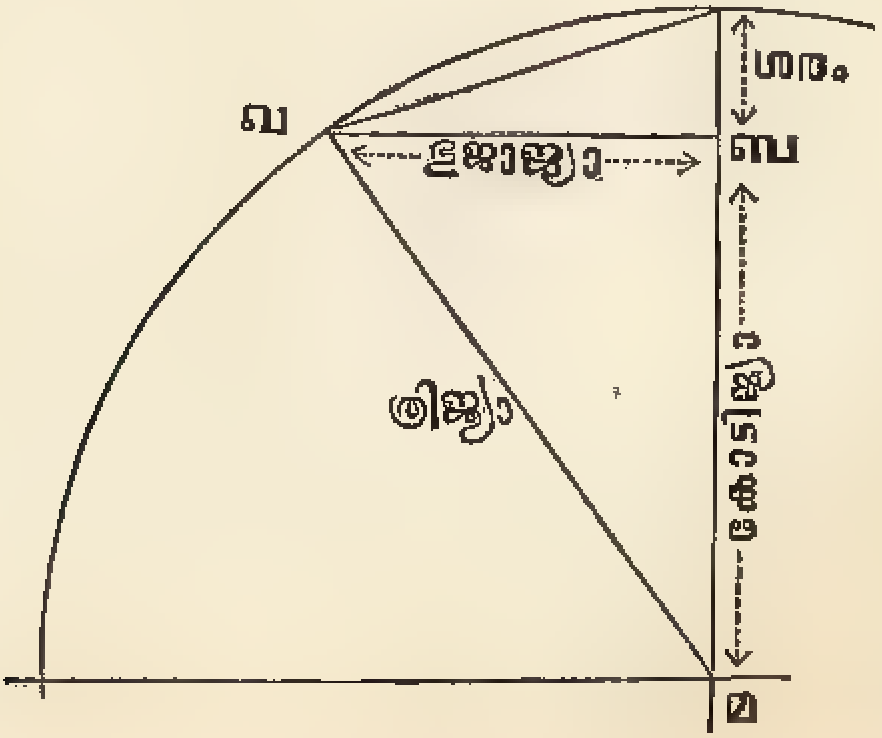
....

$$(ഭ_1 + ഭ_2 + ഭ_3 + \ldots\ldots) \times \frac{സമസ്തജ്യാവ്}{ത്രിജ്യാ} = ഭ_1ഭ_2 + ഭ_2ഭ_3 + ഭ_3ഭ_4 + \ldots\ldots$$

അപ്പോൾ $മദ്ധ്യാഖ്യശരഖണ്ഡയോഗം = \frac{പിണ്ഡയോഗം \times സമസ്തജ്യാവ്}{ത്രിജ്യാ}$

തന്ത്രസംഗ്രഹത്തിൽ "വിലിപ്താദശകോനാജ്യാ......." ഇത്യാദി ശ്ലോകങ്ങളെക്കൊണ്ടു പല പ്രകാരേണയുള്ള മഹാജ്യാനയനങ്ങളുടെ യുക്തിയെയാണിവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

"വിലിപ്താദശകോനാ ജ്യാ രാശ്യഷ്ടാംശധനുഃകലാഃ ।
ആദ്യജ്യാർദ്ധാത്തതോ ഭക്തേ സാർദ്ധദേവാശ്ചവിശിഷ്ടതഃ ॥
ത്യക്തേ ദ്വിതീയഖണ്ഡജ്യാ ദ്വിതീയാ ജ്യാ ച തദ്യുതിഃ ।
തതസ്തേനൈവ ഹാരേണ ലബ്ധം ശോധ്യം ദ്വിതീയതഃ ॥
ഖണ്ഡാത്തൃതീയഖണ്ഡസ്സ്യാൽ ദ്വിതീയസ്സ്യാത്തതോ ഗുണഃ ।
തൃതീയസ്സ്യാൽ തതശ്ചൈവം ചതുർത്ഥാദ്യാഃ ക്രമാൽ ഗുണാഃ ॥ ഇതി
ആദ്യജ്യാവു=224′—50″. "വിലിപ്താദശകോനാജ്യാ" എന്നു പറ



പരിലേഖം 86.

ഞെളുനകൊണ്ടു വിചിപ്പായാമം സൂക്ഷ്മമാക്കുവാൻ മാത്രമേ ഉദ്ദേശിച്ചിട്ടുള്ളൂ എന്നു സൂചിപ്പിച്ചു.

$$\text{ജ്യാചാപാന്തരം} = 10\text{വിലി.}$$

$$\text{ഹാരകം} = \frac{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{ആദ്യജ്യാവിൻെറശരം} = \text{ത്രിജ്യം} - \sqrt{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം} - \text{ആദ്യജ്യാവർഗ്ഗം}}.$$

$$\text{ത്രിജ്യം} = 3437' - 44'' - 48'''$$

$$\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം} = 11818102 - 50 - 40$$

പരിലേഖം 36-ൽ

$$\text{ഖബ} = \text{ആദ്യജ്യാവു്}$$

$$\text{കിഖ} = \text{ത്രിജ്യം} - \sqrt{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം} - (224' - 50'')^2}$$

$$= 7' - 22''$$

$$\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം} = (224' - 50'')^2 + (7' - 22'')^2$$

$$\text{ഹാരകം} = \frac{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}} = 233 - 32 \text{ (രംഗബാലശ്രീ)}$$

എന്നാൽ ഇവിടെ ഹാരകം = 233 − 30 (നീലോബാലാരിഃ) എന്നാണു് കൊടുത്തിരിക്കുന്നതു്. ഈ വ്യത്യാസംകൊണ്ടു വിലിയിൽതന്നെ വലിയ വ്യത്യാസം വരികയില്ല. ക്രിയയ്ക്കു ലാഘവവുമുണ്ടു്.

$$\text{ആദ്യത്തെ ഖണ്ഡാന്തരം} = \text{ആദ്യജ്യാവു്} \div \frac{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$= \frac{224' - 50''}{233 - 30} = 0' - 58''.$$

$$\therefore \text{രണ്ടാംഖണ്ഡജ്യാവു്} = (224' - 50'') - (0' - 58'') = 223' - 52''.$$

$$\therefore \text{രണ്ടാംപിണ്ഡജ്യാവു്} = (224' - 50'') + (223' - 52'') = \underline{448 - 42''}.$$

$$\text{രണ്ടാമത്തെ ഖണ്ഡാന്തരം} = \frac{448' - 42''}{233 - 30} = 1' - 55''$$

$$\text{മൂന്നാംഖണ്ഡജ്യാവു്} = (223' - 52'') - (1' - 55'') = 221' - 57''$$

$$\therefore \text{മൂന്നാംപിണ്ഡജ്യാവു്} = (448' - 42'') + (221' - 57'') = \underline{670' - 39''}$$

ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെയുള്ള പിണ്ഡജ്യാക്കളെല്ലാം വരുത്താം.

<u>പ്രകാരാന്തരം:</u>

"തത്ത്വാദ്യജ്യയോഃ കൃത്യാർദ്ധാദ്യൂനമുപാന്തിമം।
അന്ത്യോപാന്ത്യാന്തരം ദ്വിഘ്നം ഗുണോ വ്യാസദളം ഹരഃ॥
ആദ്യജ്യായാസ്ഥലേഽപി സ്യാൽ ഖണ്ഡജ്യാന്തരമാദിതഃ।
താഭ്യാം ഗുണകാരാഭ്യാം ചാപിമിയാരേവ ക്രമാൽ॥
ഉത്തരോത്തരഖണ്ഡജ്യാമേവഃ പിണ്ഡഗുണാസ്തഥാ"।

'തത്ത്വ'മെന്നതിന്നു വ്യാസാർദ്ധമെന്നർത്ഥം.

ആദ്യജ്യാ $= 224' - 50''$

അന്ത്യജ്യാ $=$ ത്രിജ്യാ

ഉപാന്ത്യജ്യാവ് $=$ 23-ാം ജ്യാവ് $=$ ആദ്യജ്യാകോടി

$= \sqrt{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം} - (224' - 50'')^2}$

$= 3430' - 23''$

$$\text{ആദ്യഖണ്ഡാന്തരം} = \text{ആദ്യജ്യാവ്} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$= \text{ആദ്യജ്യാവ്} \times \frac{\text{ആദ്യജ്യാവർഗ്ഗം} + \text{ആദ്യജ്യാശരവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$= \text{ആദ്യജ്യാവ്} \times \frac{(\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം} - \text{ഉപാന്ത്യജ്യാവർഗ്ഗം}) + (\text{ത്രിജ്യ} - \text{ഉപാന്ത്യജ്യാ})^2}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$= \text{ആദ്യജ്യാവ്} \times \frac{2 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം} - 2 \times \text{ത്രിജ്യാ} \times \text{ഉപാന്ത്യജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$= \text{ആദ്യജ്യാവ്} \times \frac{2(\text{ത്രിജ്യാ} - \text{ഉപാന്ത്യജ്യാ})}{\text{ത്രിജ്യാ}} \;\$$$

$$\therefore \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} = \frac{2(\text{ത്രിജ്യാ} - \text{ഉപാന്ത്യജ്യാ})}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

∴ അതതു ജ്യാക്കളെ 2×(ത്രിജ്യാ − ഉപാന്ത്യജ്യാ) എന്ന ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും അതതു ഖണ്ഡാന്തരം വരും. പിന്നെ മുമ്പിലെപ്പോലെ പിണ്ഡജ്യാക്കളെ വരുത്താം.

<u>പ്രകാരാന്തരം:</u>

സപാദിതക്ഷ്വാബ്ധി† ഭാഗേനാ ജ്യാ ദപിണ്ഡം പൂർവ്വവർജ്ജിതാഃ।
ഉത്തരോത്തരജീവാസ്സ്യുരേവം വ്യാസാർദ്ധതോപി വാ ॥

ഇവിടെ "നിഃഖംബാലാരിഃ" എന്ന ഹാരകത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത് ഇതിനെ ഇരട്ടിച്ച സഛിവ (467) എന്നതിനെ ഉപയോഗിക്കുന്നു. അപ്പോൾ ജ്യാവിനെ 'സഛിവ'നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ ജ്യാവിങ്കന്നു വാങ്ങിയ ശേഷത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിൽനിന്നു കീഴെ ജ്യാവിനെ കളഞ്ഞാൽ മേലെ ജ്യാവു വരും.

'വിലിപ്താദശകോനജ്യാ' എന്നു പറഞ്ഞതുകൊണ്ട്

$$\frac{63}{233 - 30} = \text{മൂന്നാമത്തെ ഖണ്ഡാന്തരം.}$$

$ When $(d\theta)$ is small, Sin $d\theta \to (d\theta.)$

Hence $(d\theta)^2 = 4\left(\frac{d\theta}{2}\right)^2 = 4 \operatorname{Sin}^2\frac{d\theta}{2} = 2\,(1 - \operatorname{Cos} d\theta)$

Hence $\frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} = \frac{2(\text{ത്രിജ്യാ} - \text{ഉപാന്ത്യജ്യാ})}{\text{ത്രിജ്യാ}}$

† "സപാദിതക്ഷ്വാബ്ധിഃ" എന്നു ഗ്രന്ഥത്തിൽ കാണുന്നു. സംഖ്യ 467 ആണ്.

നാലാമത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവു = മൂന്നാംഖണ്ഡജ്യാവു − മൂന്നാംഖണ്ഡാന്തരം

$$= പി_3 - പി_2 - \frac{പി_3}{233 - 30}$$

നാലാമത്തെ പിണ്ഡജ്യാവ് $(പി_4) = പി_3 + പി_3 - പി_2 - \frac{പി_3}{233 - 30}$

$$= 2പി_3 - \frac{പി_3}{233 - 30} - പി_2$$

$$= 2\left(പി_3 - \frac{പി_3}{467}\right) - പി_2$$

ഇവിടെ 'സചിവ' എന്ന ഹാരകത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു 'ഭാനുസ്സചിവഃ' (2 × രംഗ ബാലംസ്സ്രീ) — 467 — 4 എന്നുപയോഗിച്ചാൽ ഫലം സൂക്ഷ്മതരമാകും.]

പിണ്ഡജ്യായോഗംകൊണ്ടു് ഇഷ്ടജ്യാനയനം

പിണ്ഡജ്യായോഗത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരം പിന്നെ. പദത്തിൽ ഇരുപത്തിനാലുജ്യാവ് എന്നിരിക്കുന്നേടത്തു് എട്ടാംജ്യാവിനെ വരുത്തുവാൻ ചൊല്ലുന്നു. ആ പ്രഥമപിണ്ഡജ്യാവിനെ ഏഴിൽ ഗുണിപ്പൂ; രണ്ടാംപിണ്ഡജ്യാവിനെ ആറിൽ ഗുണിപ്പൂ; മൂന്നാമതിനെ അഞ്ചിൽ, നാലാമതിനെ നാലിൽ, അഞ്ചാമതിനെ മൂന്നിൽ, ആറാമതിനെ രണ്ടിൽ, ഏഴാംപിണ്ഡജ്യാവിനെ ഒന്നിൽ ഗുണിപ്പൂ. ഇവ ഒക്ക തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. ഇതിന്നു ജ്യാസംകലിതമെന്നു പേർ. സംകലിതത്തേയൊ മുമ്പിൽ വിസ്തരിച്ചു ചൊല്ലിയെല്ലൊ, വൃത്തവ്യാസത്തെ വരുത്തുന്നേടത്തു്. എന്നാൽ ഈ ജ്യാസംകലിതത്തെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലത്തെ പ്രഥമഖണ്ഡജ്യാവിനെ എട്ടിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു കളവൂ. ശിഷ്ടം എട്ടാംജ്യാവായിട്ടിരിക്കും.

[പിണ്ഡജ്യായോഗത്തെ വരുത്തി ഇഷ്ടജ്യാവു വരുത്തുവാനുള്ള ഉപായത്തെ പറയുന്നു. ഇഷ്ടജ്യാവ് എട്ടാമത്തേതു് എന്നു കല്പിക്കുന്നു.

$ഖ_1, ഖ_2, ഖ_3$ .... ക്രമേണയുള്ള ഭേദഖണ്ഡങ്ങൾ.

$പി_1, പി_2, പി_3$ .... ക്രമേണയുള്ള പിണ്ഡജ്യാക്കൾ.

$\frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$ എന്നതിനെ സ എന്നു കല്പിക്ക

$$പി_8 = ഖ_1 + ഖ_2 + ഖ_3 + \cdots\cdots + ഖ_8$$

$$ഖ_1 = പി_1$$

$$ഖ_2 = പി_1 - പി_1 \times സ$$

$$ഖ_3 = പി_1 - പി_1 \times സ - പി_2 \times സ$$

$$ഖ_4 = പി_1 - പി_1 \times സ - പി_2 \times സ - പി_3 \times സ$$

$$ഖ_5 = പി_1 - പി_1 \times സ - പി_2 \times സ - പി_3 \times സ - പി_4 \times സ$$

$\text{ബ}_6 = \text{ജ}_1 - \text{ജ}_1 \times \text{സ} - \text{ജ}_2 \times \text{സ} - \text{ജ}_3 \times \text{സ} - \text{ജ}_4 \times \text{സ} - \text{ജ}_5 \times \text{സ}$

$\text{ബ}_7 = \text{ജ}_1 - \text{ജ}_1 \times \text{സ} - \text{ജ}_2 \times \text{സ} - \text{ജ}_3 \times \text{സ} - \text{ജ}_4 \times \text{സ} - \text{ജ}_5 \times \text{സ} - \text{ജ}_6 \times \text{സ}$

$\text{ബ}_8 = \text{ജ}_1 - \text{ജ}_1 \times \text{സ} - \text{ജ}_2 \times \text{സ} - \text{ജ}_3 \times \text{സ} - \text{ജ}_4 \times \text{സ} - \text{ജ}_5 \times \text{സ} - \text{ജ}_6 \times \text{സ} - \text{ജ}_7 \times \text{സ}$

$\therefore \text{ജ}_8 = 8\text{ജ}_1 - (7\text{ജ}_1 + 6\text{ജ}_2 + 5\text{ജ}_3 + 4\text{ജ}_4 + 3\text{ജ}_5 + 2\text{ജ}_6 + \text{ജ}_7) \times \text{സ}$

$7\text{ജ}_1 + 6\text{ജ}_2 + 5\text{ജ}_3 + 4\text{ജ}_4 + 3\text{ജ}_5 + 2\text{ജ}_6 + \text{ജ}_7$ എന്നതിന്നു ജ്യാസംകലിതമെന്നു പേർ].

ഇങ്ങനെ യാതൊരു ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ജ്യാസംകലിതം ചൈതത്ത് അതിന്റെ മീത്തെ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ജ്യാചാപാന്തരം വരും എന്നു നിയതം. ഇവിടെ ചാപഖണ്ഡം എത്രയും ചെറുതായിട്ടു കല്പിക്കേണ്ടൂ; അപ്പോൾ ഖണ്ഡജ്യാവും ആദ്യത്തിന്റേതു ചാപം തന്നെ ആയിട്ടിരിക്കും. എന്നാലതിനെ ഇഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ അത് ഇഷ്ടചാപം തന്നെ ആയിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ സംകലിതത്തിന്റെ ഫലം ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടജ്യാവു വരും. ഇവിടെ ഒരു പ്രകാരം പറഞ്ഞുകൊള്ളേണമെല്ലോ എന്നിട്ടു ചൊല്ലീ, പദത്തിങ്കൽ ഇരുപത്തിനാലു ജ്യാവ് എന്ന്. എന്നിട്ടിവിടെ ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കലെ ഒടുക്കത്തെ ഖണ്ഡാന്തരം തുടങ്ങി ആദ്യദ്വിതീയഖണ്ഡാന്തരത്തോളമുള്ളവറ്റെ ക്രമേണ ഒന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേറിയുള്ള സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം വരും. ഇത് ഇഷ്ടചാപവും ഇഷ്ടജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരമാകുന്നത് എന്നു വന്നു.

[ഇവിടെ വൃത്തപാദത്തെ 24 തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടാണല്ലോ വിഭജിച്ചിട്ടുള്ളത്. എന്നാൽ ഇതിനെ അണുപ്രായചാപഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടു വിഭജിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആദ്യജ്യാവ് ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തോടു തുല്യമെന്നു കല്പിക്കാം. ജ_1 എന്നതിനെ അണുപ്രായമായ ചാപഖണ്ഡമെന്നു സങ്കല്പിക്കുമ്പോൾ, 8ജ_1 ഇഷ്ടചാപത്തോടു തുല്യമായിരിക്കും.

$$\therefore \text{എട്ടാംജ്യാവ്} = \text{ഇഷ്ടചാപം} - \text{ജ്യാസംകലിതം} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\therefore \text{ജ്യാസംകലിതം} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} = \text{ഇഷ്ടചാപം} - \text{ഇഷ്ടജ്യാവ്}$$

$$= \underline{\text{ഇഷ്ടജ്യാചാപാന്തരം.}}$$

പിണ്ഡജ്യാവിനെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ജ്യാഖണ്ഡാന്തരമുണ്ടാകുമെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളെ ഖ_1 ഖ_2, ഖ_3...... എന്നു കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ

$$7\text{ഖ}_1 = 7\text{ജ}_1 \times \text{സ}$$

$$6\text{ഖ}_2 = 6\text{ജ}_2 \times \text{സ}$$

....

....

$$വ_7 = ഭ_7 \times സ$$

$$\therefore 7വ_1 + 6വ_2 + 5വ_3 + \cdots\cdots വ_7 = (7ഭ_1 + 6ഭ_2 + \cdots\cdots + ഭ_7) \times സ$$

$$\text{അതായത്, ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം} = \text{ജ്യാസംകലിതം} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\therefore \text{ജ്യാചാപാന്തരം} = \text{ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം.}]$$

ഇവിടെ ഇഷ്ടചാപത്തിന്റെ അടുത്തു കീഴേതിനോളമുള്ള ജ്യാക്കളെല്ലൊ ജ്യാചാപാന്തരത്തിന്നു സാധനമാകുന്നത്. ഈ ജ്യാക്കളാൽ ഒന്നും അറിഞ്ഞീലാ എന്നിരിക്കയാൽ ചാപത്തെത്തന്നെ ജ്യാവെന്നു കല്പിച്ചു ചാപസംകലിതം ചെയ്വൂ. ഇവിടെ ഇഷ്ടചാപംതന്നെ ഒടുക്കത്തെ ജ്യാവാകുന്നത്. ഇതിൽ ഒരു ചാപഖണ്ഡം കുറഞ്ഞതു അടുത്തു കീഴെ ജ്യാവ്. പിന്നെ ഇതിങ്കന്നും ഓരോരോ ഖണ്ഡം കുറഞ്ഞതു കീഴെ കീഴെ ജ്യാവ്. പിന്നെ ഇതിങ്കന്നും ഓരോരോ ഖണ്ഡം കുറഞ്ഞതു കീഴെ കീഴെ ജ്യാക്കൾ എന്നു കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ പിന്നെ ഇസ്സംഖ്യകളുടെ ഏകാദ്യേകോത്തരസംകലിതം ചെയ്വൂ. അതു യാതൊന്ന് അതു ജ്യായോഗമാകുന്നത് എന്നു വരും. ഇതിനെ സമസ്തജ്യാവാകുന്ന ഇരുപ്പത്തൊന്നാമതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ സംഖ്യാഭേദം വരാ. എന്നാൽ ഇതിനെതന്നെ ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ശരഖണ്ഡയോഗം. ഖണ്ഡഞ്ചെറുതാകയാൽ ഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ശരഖണ്ഡയോഗവും മിക്കതുമിതിന്നു സമം എന്നിട്ട് ഇതുതന്നെ എന്നു കല്പിക്കാം. ഖണ്ഡം ചെറുതായോളം ജ്യാവും സൂക്ഷ്മമായിരിക്കും. എന്നിട്ട് ഇവിടെ പരാർദ്ധാംശംതാൻ ഖണ്ഡമെന്നു കല്പിച്ചു പരാർദ്ധമാകുന്ന ഛേദംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു സംകലിതം ചെയ്തു ഛേദംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം, ഛേദംകൊണ്ടു ഗുണിയാതെ സംകലിതം ചെയ്തതിനോടു മിക്കതും തുല്യമായിട്ടിരിക്കും*.

എന്നാലിവിടെ എത്ര രൂപവ്യക്തികളുള്ളൂ അണുപരിമാണമായിട്ടിരിപ്പോ ചിലവ, ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കലത്ര സംഖ്യ ഉള്ളോരു രാശിയെ സംകലിതം ചെയ്യുന്നു. അസ്സംഖ്യ പദമായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്. അസ്സംകലിതക്ഷേത്രം പദത്തോളം വരി, വരിയിൽ നടേത്തേതിൽ സംഖ്യ ഒന്ന് അതു സമചതുരശ്രമായിട്ടിരിപ്പോരു ഖണ്ഡമെന്നു കല്പിച്ചാൽ എളുപ്പമുണ്ട്. രണ്ടാംവരിയിൽ രണ്ടു ഖണ്ഡം, മൂന്നാംവരിയിൽ മൂന്ന്, ഇങ്ങനെ ഓരോന്നേറീട്ട് ഒടുക്കത്തെ വരിയിൽ പദസംഖ്യയോളം ഖണ്ഡസംഖ്യയായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ രാശിയാകുന്നതു ഇഷ്ടചാപം. ഇതിങ്കലെ ഇലികളെ അണുച്ഛേദംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച്

* പരിധിവ്യാസപ്രകരണത്തിൽ വ്യാഖ്യാനിച്ചിട്ടുണ്ട്.

അണുവായിട്ടുള്ള അണുസംഖ്യ പദസംഖ്യ ആകുന്നതു്. പിന്നെ പദവും പദത്തിൽ ഒരു സംഖ്യ ഏറിയതും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു് ഒന്നും രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം രണ്ടുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം സംകലിതമായിട്ടിരിക്കും*. ഇങ്ങനെ നടേത്തെ സംകലിതം. രണ്ടാംസംകലിതം പിന്നെ. ഇസ്സംകലിതവും ഇതിൽ ഒരു വരി കുറഞ്ഞ സംകലിതവും, രണ്ടുവരി കുറഞ്ഞ സംകലിതവും, മൂന്നുവരി കുറഞ്ഞതും ഇങ്ങനെ ക്രമേണ ഓരോരോ പദം കുറഞ്ഞ സംകലിതങ്ങളെ ഒക്കക്കൂട്ടിയതു രണ്ടാം സംകലിതമാകുന്നതു് പിന്നെ ഇസ്സംകലിതം അന്ത്യപദത്തിന്റെ സംകലിതമെന്നു കല്പിച്ചു് ഉത്തരങ്ങളെ ഓരോരോ പദംകുറഞ്ഞവററെ ഒക്കക്കൂട്ടിയതു മൂന്നാംസംകലിതം. ഇതിനെ വരുത്തും പ്രകാരം. പദവും പദത്തിൽ ഒന്നുകൂടിയതും പദത്തിൽ രണ്ടുകൂടിയതും മൂന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെ ഒന്നും രണ്ടും മൂന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു് ആറുകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം രണ്ടാംസംകലിതം. ഈവണ്ണം ഓരോന്നോരോന്നേറിയ രാശികൾ എത്ര അവ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച അത്ര ഒന്നു്, രണ്ടു സംഖ്യകൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഒന്നു കീഴെ സംകലിതം. ഇവിടെ ചാപഖണ്ഡം അത്യന്തം അണുവായി കല്പിച്ചാൽ ജ്യാവു സൂക്ഷ്മമാകും. എന്നിട്ടു ശൂന്യപ്രായമായ രൂപങ്ങളെക്കൊണ്ടു പദത്തിൽ ഓരോന്നേറുമ്പോൾ സംഖ്യയ്ക്കു് എത്രയും വിശേഷമില്ല‡. എന്നിട്ടു് ഇഷ്ടചാപത്തിന്റെ വർഗ്ഗഘനാദികളെതന്നെ ഏ

---

* Samkalitam corresponds to integrals of the first, second, third etc, orders

Here the padam $=x$

First samkalitam of $x=\int_0^x x=\frac{x^2}{1\times 2}$

Second samkalitam of $x=\int_0^x\int x=\int_0^x\frac{x}{1\times 2}=\frac{x^3}{1\times 2\times 3}$

Third samkalitam of $x=\int_0^x\int\int x=\int_0^x\int\frac{x^2}{1\times 2}=\int_0^x\frac{x^3}{1\times 2\times 3}=\frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4}$

‡ ആദ്യപദം × പരാർദ്ധം എന്ന സംഖ്യയെ പദമായിട്ടു കല്പിക്കുമ്പോൾ, പദത്തെ പദത്തിൽ ഒന്നു കൂട്ടിയതുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടിയതിനെ പദവർഗ്ഗത്തിനോടു തുല്യമെന്നു കല്പിക്കാം. സംകലിതഫലം $=\frac{\text{പദം}\times\text{പരാർദ്ധം}\times(\text{പദം}\times\text{പരാർദ്ധം}+1)}{2}$ എന്നുള്ള ദിക്കിൽ പദം × പരാർദ്ധം എന്ന വലിയ സംഖ്യയിൽ ഒരു രൂപം കൂട്ടിയതുകൊണ്ടു വിശേഷമൊന്നുമുണ്ടാകുവാനില്ല.

കാദിഘാതം കൊണ്ടുഹരിക്കേണ്ടൂ. എന്നിട്ട ചാപവർഗ്ഗാർദ്ധം നടേത്തെ സംകലിതം. പിന്നെ ഇഷ്ടചാപഘനത്തിൽ ആറൊന്നു രണ്ടാംസംകലിതം. അവിടെ നടേത്തെ സംകലിതം വർഗ്ഗാർദ്ധമെന്നിരിക്കയാൽ രണ്ടാംസംകലിതത്തിന്നു് അതു് അന്ത്യപദം എന്നു കല്പിച്ചു് അതിൽ ഒന്നു കുറഞ്ഞ പദത്തിൻെറ വർഗ്ഗാർദ്ധമുപാന്ത്യപദം, ഇങ്ങനെ ക്രമേണ യോഗം ചെയ്താൽ ഇഷ്ടചാപത്തിൻെറ വർഗ്ഗാർദ്ധത്തിൻെറ സംകലിതമായിട്ടിരിക്കും അതു്. അതു വർഗ്ഗസംകലിതത്തിൻെറ അർദ്ധം. പദത്തിൻെറ ഘനത്തിൽ മൂന്നൊന്നു വർഗ്ഗസംകലിതമെന്നോ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയെല്ലൊ. എന്നാൽ ഇതിൻെറ അർദ്ധമാകുന്നതു ഘനത്തിൽ ആറൊന്നു. പിന്നെ മൂന്നാംസംകലിതമാകുന്നതു ഘനസംകലിതത്തിൻെറ ആറൊന്നു് എന്നിരിക്കും ഈ ന്യായംകൊണ്ടു്. എന്നാൽ അതു വർഗ്ഗവർഗ്ഗത്തിൽ ഇരുപത്തുനാലൊന്നായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ സമരാശികളെ എത്രവറെറ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു, ഒന്നു്, രണ്ടു്, തുടങ്ങിയുള്ളവററിൻെറ അത്രേടമുള്ള സംഖ്യേടെ ഘാതം ഹാരകമാകുന്നതു് അതിന്നു് എന്നു മുമ്പിൽ സംകലിതം വിസ്തരിച്ചു ചൊല്ലിയതിനെക്കൊണ്ടു വന്നു കൂട്ടം.

എന്നാലിവിടെ നടേത്തെ സംകലിതമാകുന്നതു് ആദ്യജ്യാവു തുടങ്ങി ഇഷ്ടജ്യാവോളമുള്ള ജ്യാക്കളുടെ യോഗം. ഇതിനെ സമസ്തജ്യാസംഖ്യ ഒന്നു് എന്നിട്ടു് അതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ സംഖ്യാഭേദമില്ല. എന്നിട്ട വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ശരഖണ്ഡയോഗമാകുന്ന ശരമായിട്ടു വരും. പിന്നെ ഇശ്ശരത്തെ ചാപഖണ്ഡയോഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചു മൂന്നിലും ഹരിച്ചാൽ ജ്യാചാപാന്തരം വരും. പിന്നെ ഇഷ്ടചാപഘനത്തിൻെറ ആറൊന്നിനെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലവും ജ്യാചാപാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇഷ്ടജ്യാശരത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം ആദ്യാന്ത്യഖണ്ഡാന്തരം. പിന്നത്തെ ജ്യായോഗംകൊണ്ടു് ആദ്യോപാന്ത്യഖണ്ഡാന്തരം ഉണ്ടാകും. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ ഘനഷഷ്ഠാംശമാകുന്ന രണ്ടാംസംകലിതത്തിങ്കന്നു്, ആദ്യഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്നു് എല്ലാ ഖണ്ഡത്തിൻേറയും അന്തരങ്ങൾ ഒക്കക്കൂടിയതു ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം— ഇതുതന്നെ ജ്യാചാപാന്തരമാകുന്നതും—അതുണ്ടാകും. ഇതു പ്രായികമത്രെ താനും, ജ്യാസംകലിതത്തിൻെറ സ്ഥാനത്തു

‖ ഏകാദിഘാതങ്ങൾ:— 1, 1×2, 1×2×3, 1×2×3×4 ....
ഈ സംഖ്യകളെ ചുരുക്കി ഇവയെ ∠1, ∠2, ∠3, ∠4, ...എന്നെഴുതാം.

ചാപസംകലിതമെല്ലൊ കൊണ്ടതു്, എന്നിട്ടു്. എന്നാൽ ഈവണ്ണം കീഴെ കീഴെ ജ്യാചാപാന്തരങ്ങൾ ഒക്കത്തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയതു ജ്യാസംകലിതത്തിങ്കന്നു ചാപസംകലിതത്തിൽ ഏറിപ്പോയ അംശമാകുന്നതു്. എത്ര ചാപങ്ങളുടെ യോഗത്തിങ്കന്നു ശരത്തെ ഉണ്ടാക്കി അത്ര ജ്യാചാപാന്തരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ ശരത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ശരമൊട്ടു സൂക്ഷ്മമാകും. എന്നാലിവിടെ രണ്ടാംസംകലിതത്തിങ്കന്നു് എല്ലൊ ഒടുക്കത്തെ ജ്യാചാപാന്തരത്തെ ഉണ്ടാക്കി. ഇവ്വണ്ണം പദത്തിന്റെ ഓരോന്നോരോന്നു കുറഞ്ഞതിന്റെ രണ്ടാംസംകലിതത്തിങ്കന്നു് ഉപാന്ത്യാദി കീഴെ കീഴെ ജ്യാചാപാന്തരങ്ങൾ ഒക്ക ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ. എന്നാൽ മൂന്നാംസംകലിതത്തിങ്കന്നു് ജ്യാചാപാന്തരയോഗമുണ്ടാകും. എന്നാൽ നാലാംസംകലിതത്തിങ്കന്നു ജ്യാചാപാന്തരസംകലിതത്തെ ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ വണ്ണം. പിന്നെ ഇസ്സംകലിതം യാതൊന്നു് അതു മുമ്പിൽ ജ്യാസംകലിതം വേണ്ടിയിരുന്നേടത്തു ചാപസംകലിതംകൊണ്ടാറെ ഏറിപ്പോയ അംശമതു്. ഇച്ചാപസംകലിതത്തിങ്കന്നു വ്യാസാൎദ്ധവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം മുമ്പിൽ ഉണ്ടാക്കിയ ജ്യാചാപാന്തരത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടജ്യാചാപാന്തരമൊട്ടു സൂക്ഷ്മമാകും. ഇവിടെ നടേ ഉണ്ടാക്കിയ ജ്യാചാപാന്തരത്തെ ഇഷ്ടചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശരസംസ്കാരമുണ്ടാകും. ഇശ്ശരസംസ്കാരത്തെ പിന്നെയും ഇഷ്ടചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരമുണ്ടാകും. ഈവണ്ണമുണ്ടാക്കിയ ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരം ജ്യാചാപാന്തരയോഗത്തിങ്കന്നു് ഉണ്ടാക്കുള. അതാകുന്നതു് ഈസ്സംസ്കാരത്തെ ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു പിന്നെ അതിനെ വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു മുമ്പിലെ ശരസംസ്കാരത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ഇശ്ശരസംസ്കാരം സൂക്ഷ്മമാകും. ഇശ്ശരസംസ്കാരത്തെ പിന്നെ ഇഷ്ടചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരത്തിന്റെ സംസ്കാരം. ഇവിടെ എല്ലാടവും ഫലത്തെ ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഒന്നു്, രണ്ടു്, എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള സംഖ്യകളിലത്രാമതുകൊണ്ടു ഹരിച്ചതിനെ വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണ്ടൂ, സംകലിതത്തിങ്കന്നു വേണം സംസ്കാരമുണ്ടാകുവാൻ, എന്നിട്ടു്. ഇങ്ങനെ ഒരു സംകലിതത്തിന്റെ ഫലത്തിങ്കന്നു മീത്തെ സംകലിതംകൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന ഫലത്തിന്റെ അന്തരത്തെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം. ഇവിടെ ചാപത്തെ എത്ര ആവൃത്തി ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു, ഇതിന്നു ഹാരകം വ്യാസാൎദ്ധത്തെ വ്യാസാൎദ്ധം

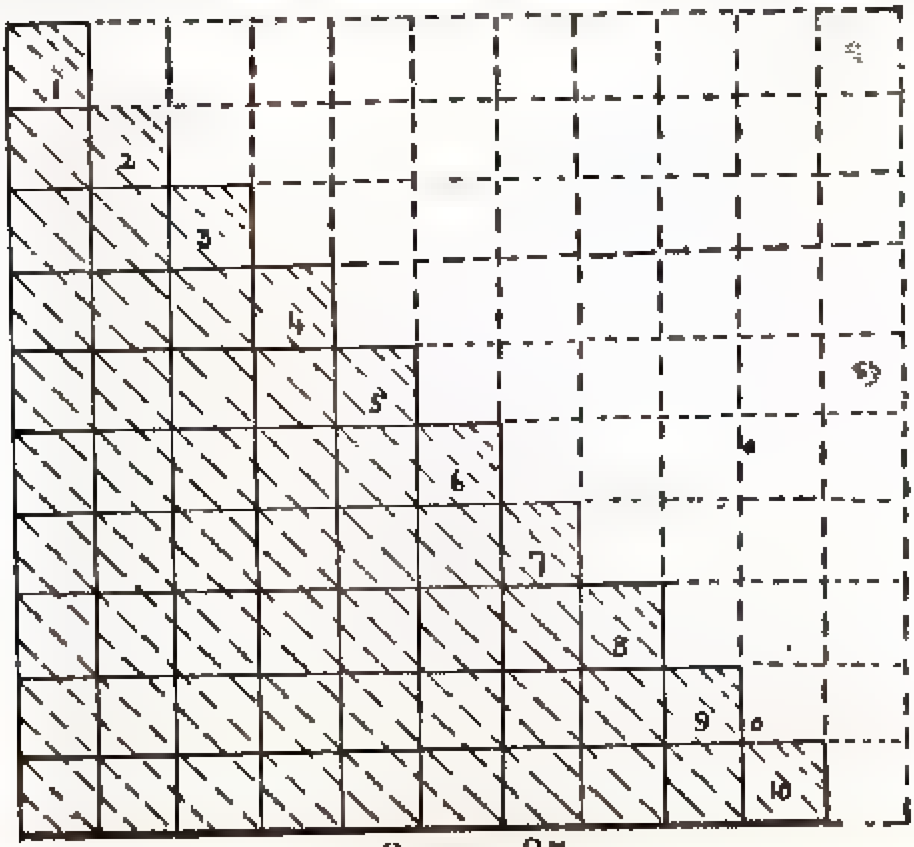
കൊണ്ടു് അത്ര ആവൃത്തി ഗുണിച്ചു് അത്ര ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങളുടെ ഘാതവും കൂടി ഹാരകം. ഒരു ഫലത്തിങ്കന്നു മീത്തെ ഫലമുണ്ടാക്കുവാൻ ഇഷ്ടചാപംകൊണ്ടു ഫലത്തെ ഒരിക്കൽ ഗുണിപ്പൂ, വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഒരിക്കാൽ ഹരിപ്പൂ. എന്നാലും ഫലം തുല്യം. ഇങ്ങനെ ഫലങ്ങളെല്ലാം ജ്യായോഗത്തിങ്കന്നു് ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ എന്നിരിക്കുന്നേടത്തു ചാപയോഗത്തിങ്കന്നു് ഉണ്ടാകയാൽ സംസ്കാരഫലങ്ങളെല്ലാം വാസ്തവഫലത്തിങ്കന്നു് ഏറ ഉണ്ടായിരിക്കും. എന്നിട്ടു മീത്തെ മീത്തെ സംസ്കാരഫലം നടേത്തെ നടേത്തെ സംസ്കാരഫലത്തിങ്കന്നു കളയേണം. എന്നാലിപ്പണ്ണം വേണ്ടൂ ഇവിടുത്തെ ക്രിയാക്രമം. ഇഷ്ടചാപം നടേത്തെ രാശിയാകുന്നതു്. ഇതിനെ വർഗ്ഗിച്ചു് അർദ്ധിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു രണ്ടാംരാശിയാകുന്നതു്. രണ്ടാംരാശിയെ വേറെ ഒരിടത്തു വെപ്പൂ. പിന്നെ ഇതിനേയും ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു മൂന്നിലും ത്രിജ്യകൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. ഈ ഫലത്തെ പ്രഥമഫലത്തിന്റെ കീഴെ വെപ്പൂ. പിന്നെ ഇതിനേയും ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു നാലിലും ത്രിജ്യകൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. ഫലം ദ്വിതീയഫലത്തിന്റെ കീഴെ വെപ്പൂ. ഇങ്ങനെ അതതു ഫലത്തിങ്കന്നു ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടും ഒന്നു് രണ്ടു് തുടങ്ങിയവററിൽ മീത്തെ മീത്തേവറെറക്കൊണ്ടും ഹരിച്ചാൽ മീത്തെ മീത്തെ ഫലങ്ങളുണ്ടാകും. ഇവിടെ മൂന്നാമതു്, അഞ്ചാമതു് എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള ഓജഫലങ്ങൾ പ്രഥമരാശിയുടെ പംക്തിയിൽ കീഴെ കീഴെ വെപ്പൂ. നാലാമതു്, ആറാമതു തുടങ്ങിയുള്ള യുഗ്മഫലങ്ങളെ ദ്വിതീയരാശിയുടെ പംക്തിയിൽ കീഴെ കീഴെ വെപ്പൂ. പിന്നെ എല്ലായിലും കീഴേതു് അടുത്തു മീത്തേതിൽ കളയൂ. ശിഷ്ടം അടുത്തു മീത്തേതിൽ. ഇങ്ങനെ ഒരു പംക്തിയിൽ പ്രഥമരാശി ശേഷിക്കും. മററേ പംക്തിയിൽ ദ്വിതീയരാശി ശേഷിക്കും. അവ ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങൾ. ഇവിടെ ഓജഫലങ്ങളെ തന്നെ വേറെ ഉണ്ടാക്കി ഇഷ്ടജ്യാവുണ്ടാക്കൂ. യുഗ്മഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി ഇഷ്ടശരവുമുണ്ടാക്കൂ. ഇങ്ങനേയുമാം.

ഇവിടെ ഇഷ്ടജ്യാവിനെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം. ഇഷ്ടചാപത്തെ ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. പിന്നെ രണ്ടും മൂന്നും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം ആറുകൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. ഫലം ജ്യാചാപാന്തരം. പിന്നേയും ക്രമേണയുള്ള ഫലങ്ങൾക്കൊക്കെ ചാപവർഗ്ഗം ഗുണകാരം, വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഹാരകം. യുഗ്മസംഖ്യയും മീത്തെ ഓജസംഖ്യയും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ഹാരകം. അതതു യുഗ്മ

സംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ തന്റെ മൂലം കൂടിയതായിട്ടിരിക്കുമിത്, യുഗ്മസംഖ്യയിങ്കന്ന് ഒന്ന് എല്ലാ മീത്തെ ഓജസംഖ്യയിൽ ഏറും, എന്നിട്ട്. ഇങ്ങനെ ഇഷ്ടജ്യാവു തന്നെ വേറെ വരുത്തുംപ്രകാരം. പിന്നെ ദ്വിതീയരാശിയെ ഇവ്വണ്ണം. അതിന്റെ ഫലങ്ങളേയും ഗുണിച്ചു ഹരിച്ചാൽ ഇഷ്ടശരം വരും. ഇവിടെ ഓജസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ തന്റെ മൂലം കൂടിയതു ഹാരകമാകുന്നത് എന്നേ വിശേഷമുള്ളൂ.

പിന്നെ ഇവ്വണ്ണം വൃത്തപാദത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ വരുത്തുവാൻ ഉണ്ടാക്കിയ ഫലങ്ങളെ പഠിച്ചുവെച്ച് ഇവറ്റെക്കൊണ്ട് ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കലേക്കു ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു വരുത്തൂ. ഓജഫലവും, യുഗ്മഫലവും വെവ്വേറെ പഠിപ്പൂ, രണ്ടു വരിഷയായിട്ട്. ഇവിടെ രണ്ടുവകയിലും ഒടുക്കത്തെ ഫലങ്ങളെ ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം ഉപാന്ത്യഫലത്തിങ്കന്നു കളവൂ. പിന്നേയും ഇവ്വണ്ണം ഗുണിച്ചു ഹരിച്ചു നടേത്തേതിൽ നടേത്തേതിൽ കളവൂ. പിന്നെ 'വിദ്വാൻ' എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റിന്റെ ഒടുക്കത്തെ ഫലത്തെ ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കന്നു കളവൂ. ശിഷ്ടം ഇഷ്ടജ്യാവ്. സ്തേന എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റിൽ ഈവണ്ണം ക്രിയചെയ്താൽ ഒടുക്കത്തേതു തന്നെ ഇഷ്ടശരം. ഇങ്ങനെ പഠിതങ്ങൾ കൂടാതെ ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ വരുത്തുംപ്രകാരം.

പഠിതജ്യാക്കളെ കൂടാതെ തന്നെ ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ വരുത്തുവാനുള്ള ഉപായത്തിന്റെ യുക്തിയെ പറയുന്നു. ഇവിടെ ആദ്യദ്വിതീയാദി സങ്കലിതങ്ങളുടെ ആവശ്യമുണ്ടാകയാൽ അവയെ മുമ്പിൽ വിസ്തരിക്കുന്നു. ആദ്യസങ്ക



പരിലേഖം 87.

ലിതം ഏകാദ്യേകോത്തരസംകലിതം തന്നെ. ഇതിനെ ക്ഷേത്രരൂപേണ കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ വരിയിൽ ഒന്ന്, രണ്ടാംവരിയിൽ രണ്ട്, മൂന്നാംവരിയിൽ മൂന്ന്, ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെ വരിയിൽ ഓരോന്നോരോന്നേറിക്കൊണ്ടിരിക്കും. പരിലേഖം 37-ൽ ചെരിഞ്ഞുള്ള വരകളെക്കൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ള ഭാഗം ഈ സംകലിതക്ഷേത്രമാകുന്നു. ഇങ്ങനെ തന്നെ ഒരു ക്ഷേത്രത്തെ പരിലേഖത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന പ്രകാരം മേൽകീഴായി ആദ്യക്ഷേത്രത്തോടു യോജിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഒരു ഘാതക്ഷേത്രമുണ്ടാവും. ഈ ഘാതക്ഷേത്രത്തിൽ സംകലിതത്തിലെ പദത്തോളം വരി, ഓരോ വരിയിൽ പദത്തിലൊന്നു കൂടിയ ഖണ്ഡങ്ങളുമുണ്ട്. പദത്തിനെ പ എന്നു കല്പിച്ചാൽ ഈ ഘാതക്ഷേത്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $= \text{പ} \times (\text{പ}+1)$ എന്നുവരും. അപ്പോൾ ആദ്യസംകലിതഫലം = ഘാതക്ഷേത്രഫലാർദ്ധം $= \frac{\text{പ}(\text{പ}+1)}{2} = \frac{\text{പ}^2+\text{പ}}{2}$

പദത്തെ പദാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചുണ്ടായ സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു സംകലിതം ചെയ്യുമ്പോൾ ആദ്യസംകലിതഫലം പദവർഗ്ഗാർദ്ധ $\left(\frac{\text{പ}^2}{2}\right)$ ത്തിനോടു തുല്യമാകുമെന്നു പരിധിവ്യാസപ്രകരണത്തിൽ വിസ്തരിച്ചുപറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ആദ്യസംകലിതവും ഇതിന്റെ പദത്തിൽ ഓരോന്നോരോന്നു കുറഞ്ഞവയുടെ ആദ്യസംകലിതങ്ങളും ഇവയുടെ യോഗം ദ്വിതീയസംകലിതം.

$$\therefore \text{ദ്വിതീയസംകലിതം} = \left(\frac{\text{പ}^2}{2} + \frac{(\text{പ}-1)^2}{2} + \cdots\cdots + \frac{1^2}{2}\right) + \left(\frac{\text{പ}}{2} + \frac{\text{പ}-1}{2} + \cdots\cdots + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\text{പ}^2 + (\text{പ}-1)^2 + \cdots\cdots + 1^2 = \frac{\text{പ}(\text{പ}+1)(2\text{പ}+1)}{6} \quad \text{(ലീലാവതീന്യായപ്രകാരം)}$$

$$\text{പ} + (\text{പ}-1) + \cdots\cdots + 1 = \frac{\text{പ}(\text{പ}+1)}{2}$$

$$\therefore \text{ദ്വിതീയസംകലിതം} = \frac{\text{പ}(\text{പ}+1)(2\text{പ}+1)}{12} + \frac{\text{പ}(\text{പ}+1)}{4}$$

$$= \frac{\text{പ}(\text{പ}+1)}{4}\left(\frac{2\text{പ}+1}{3}+1\right)$$

$$= \frac{\text{പ}(\text{പ}+1)(\text{പ}+2)}{6}$$

$$= \frac{\text{പ}^3}{6} + \frac{3\text{പ}^2}{6} + \frac{2\text{പ}}{6}$$

$$= \frac{\text{പ}^3}{6} + \frac{\text{പ}^2}{2} + \frac{\text{പ}}{3}$$

$$\text{തൃതീയസംകലിതം} = \tfrac{1}{6}\{\text{പ}^3 + (\text{പ}-1)^3 + (\text{പ}-2)^3 + \cdots\cdots + 1^3\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\{\text{പ}^2 + (\text{പ}-1)^2 + (\text{പ}-2)^2 + \cdots\cdots + 1^2\}$$
$$+ \tfrac{1}{3}\{\text{പ} + (\text{പ}-1) + (\text{പ}-2) + \cdots\cdots 1\}$$

ഘനസംകലിതം=ഏകാദ്യേകോത്തരസംകലിതവർഗ്ഗം (ലീലാവതീന്യായേന)

$$=\frac{\text{പ}^2(\text{പ}+1)^2}{4}$$

$$\therefore \text{തൃതീയസംകലിതം}=\frac{\text{പ}^2(\text{പ}+1)^2}{24}+\frac{\text{പ}(\text{പ}+1)(2\text{പ}+1)}{12}+\frac{\text{പ}(\text{പ}+1)}{6}$$

$$=\frac{\text{പ}(\text{പ}+1)(\text{പ}+2)(\text{പ}+3)}{24}$$

ഇങ്ങനെതന്നെ ചതുർത്ഥാദിസംകലിതങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം.

$$\text{അപ്പോൾ ആദ്യസംകലിതം}=\frac{\text{പ}(\text{പ}+1)}{1\times 2}=\frac{\text{പ}(\text{പ}+1)}{\angle 2}$$

$$\text{ദ്വിതീയസംകലിതം}=\frac{\text{പ}(\text{പ}+1)(\text{പ}+2)}{1\times 2\times 3}=\frac{\text{പ}(\text{പ}+1)(\text{പ}+2)}{\angle 3}$$

$$\text{തൃതീയസംകലിതം}=\frac{\text{പ}(\text{പ}+1)(\text{പ}+2)(\text{പ}+3)}{1\times 2\times 3\times 4}$$

$$=\frac{\text{പ}(\text{പ}+1)(\text{പ}+2)(\text{പ}+3)}{\angle 4}$$

....

....

ചാപഖണ്ഡങ്ങളെ അണുപ്രായമായി കല്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഈ സംകലിതങ്ങളെ $\frac{\text{പ}^2}{\angle 2}, \frac{\text{പ}^3}{\angle 3}, \frac{\text{പ}^4}{\angle 4}$..........എന്നിങ്ങനെ കല്പിക്കാം.

ഈ സംകലിതങ്ങളെ അപേക്ഷിച്ച് ഇഷ്ടചാപങ്ങളുടെ ജ്യാക്കളേയും ശരങ്ങളേയും വരുത്തുവാനുള്ള ഉപായത്തേയും അതിന്റെ യുക്തിയേയും കാണിക്കാം.

''നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ ചാപം തത്തൽഫലാനി ച ।
ഹരേൽ സമൂലയുഗ്വർഗ്ഗൈസ്ത്രിജ്യാവർഗ്ഗാഹതൈഃ ക്രമാൽ ॥
ചാപം ഫലാനി ചാധോധോ ന്യസ്യോപര്യുപരി ത്യജേൽ ।
ജീവാപ്ത്യൈ, സംഗ്രഹോസ്യൈവ വിദ്വാനിത്യാദിനാ കൃതഃ ॥
നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ രൂപം തത്തൽഫലാനി ച ।
ഹരേദ്വിമൂലയുഗ്വർഗ്ഗൈസ്ത്രിജ്യാവർഗ്ഗാഹതൈഃ ക്രമാൽ ॥
കിന്തു വ്യാസദലേനൈവ ദ്വിഘ്നേനാദ്യം വിഭജ്യതാം ।
ഫലാന്യധോധഃ ക്രമശോ ന്യസ്യോപര്യുപരി ത്യജേൽ ॥
ശരാപ്ത്യൈ, സംഗ്രഹോസ്യൈവ സ്തേനസ്ത്രീത്യാദിനാ കൃതഃ'' ।

(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഇഷ്ടചാപത്തെ അതിന്റെ വർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു രണ്ടിന്റെ വർഗ്ഗത്തിൽ രണ്ടു കൂട്ടിയിരിക്കുന്ന ആറുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഇങ്ങനെ ഉണ്ടായ ഫലത്തെ ഇഷ്ടചാപത്തിന്റെ കീഴെ വെക്ക. ഈ ഫലത്തേയും ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു രണ്ടാമത്തെ യുഗ്മസംഖ്യയായ

നാലിന്റെ വർഗ്ഗത്തിൽ അതിന്റെ മൂലം കൂട്ടിയ 20കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തെ ആദ്യഫലത്തിന്റെ കീഴെ വെക്ക. ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെയുള്ള ഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി കീഴെ കീഴെ വെക്ക. എല്ലായിടത്തും ചാപവർഗ്ഗം തന്നെ ഗുണകാരം. ദ്വിചതുരാദി യുഗ്മസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ തന്റെ തന്റെ മൂലം കൂട്ടിയിരിക്കുന്നവയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഹാരകം. ഫലങ്ങൾ ഏറുംതോറും ജ്യാവിന്നു സൂക്ഷ്മത ഏറും. പിന്നെ ഒടുക്കത്തെ ഫലത്തെ അതിന്റെ മേലേതിൽ നിന്നു കളയൂ. ഈ ശേഷിച്ചതിനെ ചുവട്ടിൽനിന്നു മൂന്നാമത്തെ ഫലത്തിങ്കൽനിന്നു കളയൂ. ഇങ്ങനെ കളഞ്ഞു കളഞ്ഞ് ഒടുക്കത്തെ ഫലശേഷത്തെ ചാപത്തിൽനിന്നും വാങ്ങിയാൽ ഇഷ്ടചാപത്തിന്റെ ജ്യാവു വരും. രൂപത്തെവെച്ച് ഇതുപോലെ ക്രിയചെയ്താൽ ഇഷ്ടജ്യാശരം വരും. ഇവിടെ രൂപത്തെ വല്ലിയിൽ വെക്കേണ്ട. ഒടുക്കത്തെ ഫലശേഷംതന്നെ ശരമായിട്ടു വരും. ഇവിടെ ആദ്യഫലത്തിന്റെ ഹാരകം രണ്ടിൽ ഗുണിച്ച വ്യാസാർദ്ധം, ചാപവർഗ്ഗം ഗുണകാരം. യുഗ്മങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളിൽ അതതിന്റെ മൂലങ്ങളെ കളഞ്ഞിരിക്കുന്ന സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗങ്ങൾ ശേഷമുള്ളവറ്റിന്റെ ഹാരകങ്ങളെന്നും വിശേഷമുണ്ട്. യുക്തിഭാഷയിൽ ഓജസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ മൂലം കൂട്ടിയതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഇവിടത്തെ ഹാരകം എന്നാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. യുഗ്മസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ മൂലം കളഞ്ഞതും ഓജസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ മൂലം കൂട്ടിയതും ഒന്നു തന്നെ. $4\times4-4=3\times3+3$.

ത്രിരാശിചാപമായ 5400 ഇലിയെ വെച്ചു ഈ ക്രിയകൾ ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ "വിദ്വാംസ്തുന്നബലഃ......" എന്നും "സ്തേനസ്ത്രീ പിശുനഃ......" തുടങ്ങിയുള്ള വാക്യങ്ങൾ വരും.

ഈ ക്രിയയുടെ യുക്തി:—

ചാപഖണ്ഡത്തെ അണുപ്രായമായിട്ടു നിരൂപിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആദ്യഖണ്ഡജ്യാവു ചാപഖണ്ഡത്തിനോടു സമമെന്നു കല്പിക്കാം. ഇതിനെ ഇഷ്ടചാപത്തിലെ ചാപഖണ്ഡസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഇഷ്ടചാപം തന്നെ. ഇതിൽനിന്നു ഖണ്ഡാന്തരസങ്കലിതം വാങ്ങിയാൽ ഇഷ്ടജ്യാവു വരും. ജ്യാചാപാന്തരം ഖണ്ഡാന്തരസങ്കലിതമെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഇഷ്ടചാപത്തിന്നു കീഴെയുള്ള ജ്യാക്കളെല്ലാം ജ്യാചാപാന്തരത്തിന്നു സാധനങ്ങളാകുന്നു. അവയെല്ലാം അജ്ഞാതങ്ങൾ. അതുകൊണ്ടു ചാപങ്ങളെത്തന്നെ ജ്യാക്കളെന്നു കല്പിച്ചു ചാപസങ്കലിതം ചെയ്യേണം. അപ്പോൾ ഒടുക്കത്തെ ജ്യാവ് ഇഷ്ടചാപം.

ഇഷ്ടചാപത്തെ ച ഇലികളെന്നും വ്യാസാർദ്ധത്തെ ത്രി എന്നും ഇഷ്ടചാപത്തെ അതിന്റെ കലാസംഖ്യയോളം തുല്യഭാഗങ്ങളായിട്ടു വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നുവെന്നും കല്പിക്ക, എന്നാൽ സമസ്തജ്യാവിനെ ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിനോടു തുല്യമെന്നു കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, സമസ്തജ്യാവൊരു ഇലി എന്നുവരും.

$$\text{അപ്പോൾ മദ്ധ്യോത്ഥശരഖണ്ഡയോഗം} = \frac{\text{ആദ്യസംകലിതം} \times 1}{\text{ത്രി}} = \frac{\text{ച}^2}{2\text{ത്രി}}$$

ഖണ്ഡങ്ങൾ വളരെ ചെറുതാകകൊണ്ടു അഗ്രത്തിങ്കലെ ശരഖണ്ഡയോഗവും മദ്ധ്യോത്ഥശരഖണ്ഡയോഗവും തുല്യമെന്നുതന്നെ കല്പിക്കാം. അഗ്രത്തിങ്കലെ ശരഖണ്ഡയോഗം = ശരം.

$$\therefore \text{ഇഷ്ടചാപശരം} = \frac{\text{ച}^2}{2\text{ത്രി}}$$

ച, ച − 1, ച − 2, ച − 3..... ഇവയെയാണല്ലോ ജ്യാക്കളെന്നു കല്പിച്ചിട്ടുള്ളത്. ഖ_1, ഖ , ഖ_3..... എന്നിവയെ ഖണ്ഡജ്യാക്കളെന്നും കല്പിക്ക.

$$\text{ഖ}_1 = \frac{23\tfrac{1}{2}\ \text{ചാപത്തിന്റെ കോടി} \times 1}{\text{ത്രി}}$$

$$= \frac{(\text{ത്രി} - \text{അർദ്ധചാപത്തിന്റെ ശരം}) \times 1}{\text{ത്രി}}$$

ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ

$$\text{ഖ}_{\text{ച}} = \frac{\{\text{ത്രി} - (\text{ച} - \tfrac{1}{2})\ \text{ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ ശരം}\} \times 1}{\text{ത്രി}}$$

$$\therefore \text{ഖ}_1 - \text{ഖ}_{\text{ച}} = \frac{(\text{ത്രി} - \text{അർദ്ധചാപഖണ്ഡശരം}) - \{\text{ത്രി} - (\text{ച} - \tfrac{1}{2})\ \text{ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെശരം}\}}{\text{ത്രി}}$$

$$= \frac{\text{ഇഷ്ടചാപശരം}}{\text{ത്രി}} \ (\text{ചാപഖണ്ഡം വളരെ ചെറുതാകയാൽ})$$

$$= \frac{\text{ച}^2}{2\text{ത്രി}} \times \frac{1}{\text{ത്രി}} = \frac{\text{ച}^2}{2\text{ത്രി}^2}$$

$$\text{തുല്യന്യായംകൊണ്ടു } \text{ഖ}_1 - \text{ഖ}_{\text{ച}-1} = \frac{(\text{ച} - 1)\ \text{ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെശരം}}{\text{ത്രിജ്യ}} = \frac{(\text{ച} - 1)^2}{2\text{ത്രി}^2}$$

$$\text{ഖ}_1 - \text{ഖ}_{\text{ച}-2} = \frac{(\text{ച} - 2)^2}{2\text{ത്രി}^2}$$

....

$$(\text{ഖ}_1 - \text{ഖ}_{\text{ച}}) + (\text{ഖ}_1 - \text{ഖ}_{\text{ച}-1}) + (\text{ഖ}_1 - \text{ഖ}_{\text{ച}-2}) + \cdots\cdots$$

$$= \text{ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം}$$

$$\therefore \text{ജ്യാചാപാന്തരം} = \text{ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം}$$

$$= \frac{\text{ച}^2}{2\text{ത്രി}^2} + \frac{(\text{ച} - 1)^2}{2\text{ത്രി}^2} + \frac{(\text{ച} - 2)^2}{2\text{ത്രി}^2} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{\text{ച}^3}{6\text{ത്രി}^2} \ (\text{വർഗ്ഗസംകലിതം} = \text{ഘനത്ര്യംശം എന്നിട്ട്})$$

ഇതു ദ്വിതീയസംകലിതംകൊണ്ടുണ്ടായ ഫലം.

$$\text{ഇഷ്ടജ്യാവ്} = \text{ഇഷ്ടചാപം} - \text{ജ്യാചാപാന്തരം}$$

$$= \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{6\text{ത്രി}^2}$$

$$\text{ശരം} = \frac{\text{ച}^2}{2\text{ത്രി}}$$

ശരത്തെ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തും ജ്യാചാപാന്തരത്തെ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തും ജ്യാവിന്റെ സ്ഥാനത്തു ചാപത്തെത്തന്നെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നതുകൊണ്ട് ഈ ഫലങ്ങളും സ്ഥൂലങ്ങൾ.

$$\text{ശരം} = \frac{1}{\text{ത്രി}}\{\text{ച} + (\text{ച}-1) + (\text{ച}-2) + \ldots\ldots\}$$

ഇവിടെ ചാപത്തെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നതുകൊണ്ട് ശരം സ്ഥൂലം. അതുകൊണ്ട് ച, ച—1, ച—2......എന്നിവ എല്ലാററിലും ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരം ചെയ്യേണം. എന്നാൽ ശരം ഒട്ടു സൂക്ഷ്മമാകും. അങ്ങനെ ശരം സംസ്കാരം ചെയ്യുമ്പോൾ,

$$\text{ശരം} = \frac{1}{\text{ത്രി}}\left\{\left(\text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{6\text{ത്രി}^2}\right) + \left((\text{ച}-1) - \frac{(\text{ച}-1)^3}{6\text{ത്രി}^2}\right) + \ldots\ldots\right\}$$

അപ്പോൾ ശരത്തിൽ ചെയ്യേണ്ട സംസ്കാരം (കുറയ്ക്കേണ്ട അംശം)

$$= \frac{1}{\text{ത്രി}}\left\{\frac{\text{ച}^3}{6\text{ത്രി}^2} + \frac{(\text{ച}-1)^3}{6\text{ത്രി}^2} + \frac{(\text{ച}-2)^3}{6\text{ത്രി}^2} + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \frac{1}{6\text{ത്രി}^3} \times \text{ഘനസംകലിതം}$$

$$= \frac{\text{ച}^4}{24\text{ത്രി}^3}. \text{ (തൃതീയസംകലിതം)}$$

ഇവിടേയും ചാപത്തെ ഉപയോഗിക്കകൊണ്ട് ശരസംസ്കാരത്തിലും സ്ഥൗല്യമുണ്ട്. എന്നാൽ ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെയുള്ള സംസ്കാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി ചാപങ്ങളിലും ശരത്തിലും സംസ്കരിച്ചാൽ സൂക്ഷ്മതരങ്ങളായ ജ്യാശരങ്ങൾ ഉണ്ടാകും.

ഇവിടെ ഇഷ്ടചാപം അന്ത്യപദമായിട്ടുള്ള ആദ്യസംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചപ്പോൾ ശരം വന്നു. ഇഷ്ടം അന്ത്യപദമായിട്ടുണ്ടാക്കിയ ദ്വിതീയസംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടുതന്നെ ഹരിച്ചപ്പോൾ ജ്യാചാപാന്തരം വന്നു. ജ്യാചാപാന്തരം അന്ത്യപദമായിട്ടുണ്ടാക്കിയ തൃതീയസംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചപ്പോൾ ശരസംസ്കാരം വരും. ഈ ശരസംസ്കാരത്തെ അന്ത്യപദമായി ചതുർത്ഥസംകലിതം ചെയ്തു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരമുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെയുള്ള ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരങ്ങളും ശരസംസ്കാരങ്ങളും ഉണ്ടാക്കി ചാപത്തിലും ശരത്തിലും സംസ്കരിച്ചാൽ ജ്യാശരങ്ങൾ സൂക്ഷ്മതരങ്ങളായിട്ടു വരും. ഇവിടെ ചാപം ജ്യാവിനേക്കാൾ ഏറും. ജ്യാചാപാന്തരത്തെ ചാപത്തിൽനിന്നു കളയേണം. ജ്യാചാപാന്തരം വരുത്തുന്നതിലും ജ്യാവിനു പകരം ചാപം ഉപയോഗിക്കയാൽ ജ്യാചാപാന്തരം വേണ്ടതിലധികമായതുകൊണ്ടു ഫലം വേണ്ടതിലധികം കുറഞ്ഞു പോയി. അപ്പോൾ ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരഫലത്തെ ധനമായിട്ടു സംസ്കരിക്കേണം. ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ജ്യാചാപാന്തരത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ സംസ്കാരഫലത്തെ കളയേണം. പിന്നത്തെ തൃ

ട്ടുന്നം. ഇങ്ങനെ ആവശ്യത്തോളം ക്രിയ ചെയ്യാം. അഥവാ, ആവശ്യാപേക്ഷ ഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി, അവയിലൊടുക്കത്തേതിനെ അതിന്റെ മുമ്പിലെ ഫലത്തിൽനിന്നു കളയുക; ഈ ശേഷത്തെ അതിന്റെ മുമ്പിലെ ഫലത്തിൽനിന്നു കളയുക. ഇങ്ങനെ ഒടുക്കത്തെ ഫലശേഷത്തെ ചാപത്തിൽനിന്നും കളയുക. എന്നാൽ ഇഷ്ടജ്യാവു് ഒട്ടു സൂക്ഷ്മമാകും. ഇങ്ങനെതന്നെ ശരത്തിങ്കലും സംസ്കാരം. ഇവിടെ ഒടുക്കത്തെ ഫലശേഷം തന്നെ സൂക്ഷ്മശരം.

$$\text{ഇഷ്ടചാപം} = \text{ച} \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\text{ച}}{\lfloor 1}$$

$$\text{ഇഷ്ടശരം} = \left\{\frac{\text{ച}+(\text{ച}-1)+(\text{ച}-2)+\ldots}{\text{ത്രി}}\right\} = \frac{\text{ച}^2}{2\text{ത്രി}} = \frac{\text{ച}^2}{\lfloor 2\times\text{ത്രി}}$$

$$\text{ജ്യാചാപാന്തരം} = \left\{\frac{\text{ച}^2+(\text{ച}-1)^2+\ldots\ldots}{\lfloor 2\text{ത്രി}\times\text{ത്രി}}\right\} = \frac{\text{ച}^3}{\lfloor 2\times 3\text{ത്രി}^2} = \frac{\text{ച}^3}{\lfloor 3\text{ത്രി}^2}$$

$$\text{ആദ്യശരസംസ്കാരം} = \left\{\frac{\text{ച}^3+(\text{ച}-1)^3+\ldots\ldots}{\lfloor 3\times\text{ത്രി}^2\times\text{ത്രി}}\right\} = \frac{\text{ച}^4}{\lfloor 3\times 4\text{ത്രി}^3} = \frac{\text{ച}^4}{\lfloor 4\text{ത്രി}^3}$$

$$\text{ആദ്യജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരം} = \left\{\frac{\text{ച}^4+(\text{ച}-1)^4+\ldots\ldots}{\lfloor 4\times\text{ത്രി}^3\times\text{ത്രി}}\right\} = \frac{\text{ച}^5}{\lfloor 4\times 5\text{ത്രി}^4} = \frac{\text{ച}^5}{\lfloor 5\text{ത്രി}^4}$$

$$\text{രണ്ടാംശരസംസ്കാരം} = \left\{\frac{\text{ച}^5+(\text{ച}-1)^5+\ldots\ldots}{\lfloor 5\times\text{ത്രി}^4\times\text{ത്രി}}\right\} = \frac{\text{ച}^6}{\lfloor 5\times 6\times\text{ത്രി}^5} = \frac{\text{ച}^6}{\lfloor 6\text{ത്രി}^5}$$

....

....

$$\therefore \text{സൂക്ഷ്മമായ ഇഷ്ടജ്യാവു്} = \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{6\text{ത്രി}^2} + \frac{\text{ച}^5}{120\text{ത്രി}^4} - \frac{\text{ച}^7}{5040\text{ത്രി}^6} + \ldots\ldots \text{*}$$

$$= \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{\lfloor 3\text{ത്രി}^2} + \frac{\text{ച}^5}{\lfloor 5\text{ത്രി}^4} - \frac{\text{ച}^7}{\lfloor 7\text{ത്രി}^6} + \ldots\ldots$$

$$\text{സൂക്ഷ്മശരം} = \frac{\text{ച}^2}{\lfloor 2\text{ത്രി}} - \frac{\text{ച}^4}{\lfloor 4\text{ത്രി}^3} + \frac{\text{ച}^6}{\lfloor 6\text{ത്രി}^5} - \ldots\ldots$$

$$\therefore \text{ഇഷ്ടജ്യാകോടി} = \text{ത്രി} - \left(\frac{\text{ച}^2}{\lfloor 2\text{ത്രി}} - \frac{\text{ച}^4}{\lfloor 4\text{ത്രി}^3} + \frac{\text{ച}^6}{\lfloor 6\text{ത്രി}^5} - \ldots\ldots\right)$$

"വിദ്വാംസ്തുന്നബലഃ........" എന്നും "സ്തേനസ്ത്രീപിശുനഃ........" എന്നുമുള്ള വാക്യങ്ങളെ ഇവിടെ ഉദ്ധരിക്കുന്നു.

---

* In Trigonometrical language,

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{\lfloor 3} + \frac{\theta^5}{\lfloor 5} - \frac{\theta^7}{\lfloor 7} + \ldots\ldots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{\lfloor 2} + \frac{\theta^4}{\lfloor 4} - \frac{\theta^6}{\lfloor 6} + \ldots\ldots$$

"വിദ്വാംസ്തുന്നബലഃ കവീശനിചയ-
സ്സർവ്വാർത്ഥശീലസ്ഥിരോ
നിർവ്വിദ്ധാംഗനരേന്ദ്രരുങ് നിഗദിതേ-
ഷ്വേഷു ക്രമാൽ പഞ്ചസു।
ആധസ്ത്യാൽ ഗുണിതാദഭീഷ്ടധനുഷഃ
കൃത്യാ വിഹൃത്യാന്തിമ-
സ്യാപ്തം ശോദ്ധ്യമുപര്യുപര്യഥ ഫലേ-
നൈവം ധനുഷ്യന്തതഃ"॥—ഇതി മാധവഃ.

വിദ്വാനാദി അഞ്ചുവാക്യങ്ങൾ തല്പരാദി കലാന്തങ്ങളാകുന്നു. ഇവയെ കീഴെനിന്നു തുടങ്ങി മേല്പോട്ടു ക്രമേണ വെക്ക. എല്ലാറ്റിലും കീഴത്തിനെ ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിരാശിവർഗ്ഗമായ "നാനാജ്ഞാനതപോധനഃ" (29160000) എന്നതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചു ഫലത്തെ അടുത്ത മേലെ വാക്യത്തിൽനിന്നും കളയു. അവിടെ ശേഷിച്ചതിനെ ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിരാശിവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചു. ഫലത്തെ അതിന്റെ മേലെ വാക്യത്തിൽനിന്നും കളയു. ഈവണ്ണം ക്രിയചെയ്തു് എല്ലാറ്റിലുമൊടുക്കത്തെ ശേഷത്തെ ഇഷ്ടചാപഘനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിരാശിഘനമായ "അജ്ഞാനനുന്നോ നവതപസംശയഃ" (157464000000) എന്നതുകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തെ ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കൽനിന്നു കളഞ്ഞാൽ ശിഷ്ടം ഇഷ്ടജ്യാവു്.

"സ്തേനസ്ത്രീ പിശുനസ്സുഗന്ധിനഗനുൽഭദ്രാംഗഭവ്യാസനോ।
മീനാംഗോ നരസിംഹ ഉനധനകൃൽഭൂരേവ ഷൾസ്വേഷു തു॥
ആധസ്ത്യാൽ ഗുണിതാദഭീഷ്ടധനുഷഃ കൃത്യാ വിഹൃത്യാന്തിമ-
സ്യാപ്തം ശോദ്ധ്യമുപര്യുപര്യഥ ഫലം സ്യാദുൽക്രമജ്യാന്ത്യജം"॥

ഇതി മാധവഃ

സ്തേനാദിവാക്യങ്ങൾ ആറും തല്പരാദികലാന്തങ്ങളാകുന്നു. അവറ്റെ കീഴിൽനിന്നു തുടങ്ങി മേലെ മേലെവെച്ചു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയവണ്ണം ക്രിയ ചെയ്ക. ആറാംവാക്യത്തിൽ ശേഷിച്ചതിനേയും ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിരാശിചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടുതന്നെ ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം ഇഷ്ടജ്യാവിന്റെ ഉൽക്രമജ്യാവായിട്ടു വരും. ശരത്തിന്നു ബാണമെന്നും ഉൽക്രമജ്യാവെന്നും പേരുകളുണ്ടു്.

ത്രിരാശി ചാപലിപ്തയെവെച്ചു, "നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ......" എന്ന ന്യായംകൊണ്ടാണു് ഈ വാക്യങ്ങളെ വരുത്തിയിരിക്കുന്നതു്. ച=5400 ഇലി.

ഇഷ്ടചാപം=ച=5400′.

1. $\frac{ച^3}{2ത} = \frac{5400^2 \times 60 \times 60}{2 \times 12375888}$ ....$=4241' - 9'' - 0$ ഊനധനകൃൽഭൂരേവ

2. $\frac{ച^3}{\lfloor 3\, ത^2} = \frac{4241' - 9'' - 0 \times ച}{3 \times ത} = 2220' - 39'' - 40'''$ നിർവ്വിദ്ധാംഗനരേന്ദ്ര രുങ്

3. $\frac{\text{ച}^4}{\angle 4\text{ത്രി}^3}=\frac{2220'-39''-40'''\times\text{ച}}{4\text{ത്രി}}$ .... $872'-3''-5'''$ മീനാംഗോ നരസിംഹഃ

4. $\frac{\text{ച}^5}{\angle 5\text{ത്രി}^4}=\frac{872'-3''-5'''\times\text{ച}}{5\text{ത്രി}}$ ... $273'-57''-47'$ സർവ്വാർത്ഥശീലസ്ഥിരഃ

5. $\frac{\text{ച}^6}{\angle 6\times\text{ത്രി}^5}=\frac{273'-57''-47'''\times\text{ച}}{6\text{ത്രി}}$ .... $71'-43'-24''$ ഭദ്രാംഗഭവ്യാസനഃ

5. $\frac{\text{ച}^7}{\angle 7\times\text{ത്രി}^6}=\frac{71-43''-24'''\times\text{ച}}{7\text{ത്രി}}$ ... $16'-5''-41'''$ കവീശനിചയഃ

7. $\frac{\text{ച}^8}{\angle 8\text{ത്രി}^7}=\frac{16'-5''-41'''\times\text{ച}}{8\text{ത്രി}}$ .... $3'-9''-37''$ സുഗന്ധിനഗരുൽ

8. $\frac{\text{ച}^9}{\angle 9\text{ത്രി}^8}=\frac{3'-9''-37'''\times\text{ച}}{9\text{ത്രി}}$ .... $0'-33''-6'''$ തുന്നബലഃ

9. $\frac{\text{ച}^{10}}{\angle 10\text{ത്രി}^9}=\frac{0'-33-''6'''}{10\text{ത്രി}}$ .... $0'-5''-12'''$ സ്ത്രീപിശുനഃ

1 . $\frac{\text{ച}^{11}}{\angle 11\text{ത്രി}^{10}}=\frac{0'-5''-12'''\times\text{ച}}{11\text{ത്രി}}$ ...... $0'-0''-44'''$ വിദ്വാൻ

11. $\frac{\text{ച}^{12}}{\angle 12\text{ത്രി}^{11}}=\frac{0'-0''-44'''\times\text{ച}}{12\text{ത്രി}}$ .... $0'-0''-6'''$ സ്തേന

(ചില സ്ഥലങ്ങളിൽ ശരിയായ ഫലം കിട്ടുവാൻ പ്രത്യല്പരവരെവച്ചു ക്രിയ ചെയ്യണം).

“നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ........” എന്ന ന്യായംകൊണ്ടും ഈ വാക്യങ്ങളിൽനിന്നും ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവയ്ക്കുദാഹരണങ്ങൾ.

“നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ........” എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു ജ്യാശരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കും പ്രകാരം:—

$$\text{ഇഷ്ടചാപത്തിന്റെ ജ്യാവ്}=\text{ച}-\frac{\text{ച}^3}{\angle 3\text{ത്രി}^2}+\frac{\text{ച}^5}{\angle 5\text{ത്രി}^4}-\frac{\text{ച}^7}{\angle 7\text{ത്രി}^6}\ldots\ldots$$

$$\text{ച}=1200'-0''-0'''$$

$$\frac{\text{ച}^3}{\angle 3\times\text{ത്രി}^2}=\frac{1200\times1200\times1200}{6\times\text{ത്രി}^2}=24'-22''-10''$$

$$\frac{\text{ച}^5}{\angle 5\times\text{ത്രി}^4}=\frac{24'-22''-10''\times1200\times1200}{20\text{ത്രി}^2}=0'-8''-54'''$$

$$\frac{\text{ച}^7}{\angle 7\times\text{ത്രി}^6}=\frac{0'-8''-54''\times1200\times1200}{42\text{ത്രി}^2}=0'-0''-[\text{illegible}]$$

$$\therefore \text{ഇഷ്ടജ്യാവ്}=(1200'-0''-0''')-(24'-22''-10''')+(0'-8''-54''')-(0'-0''-2')$$

$$=\underline{1175'-46''-42''}$$

$$\text{ശരം}=\frac{\text{ചാ}^2}{\angle 2\,\text{ത്രി}}-\frac{\text{ചാ}^4}{\angle 4\,\text{ത്രി}^3}+\frac{\text{ചാ}^6}{\angle 6\,\text{ത്രി}^5}\cdots\cdots$$

$$\frac{\text{ചാ}^2}{\angle 2\,\text{ത്രി}}=\frac{1200\times 1200}{2\times\text{ത്രി}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=209'-26''-21'''$$

$$\frac{\text{ചാ}^4}{\angle 4\,\text{ത്രി}^3}=\frac{209'-26''-21'''\times 1200\times 1200}{4\times 3\,\text{ത്രി}^2}=2-7''-36'''$$

$$\frac{\text{ചാ}^6}{\angle 6\,\text{ത്രി}^5}=\frac{2'-7''-36'''\times 1200\times 1200}{6\times 5\,\text{ത്രി}^2}\cdots=0'-0-''-31'''$$

$$\therefore\text{ഇഷ്ടജ്യാശരം}=(209'-26''-21''')-(2'-7''-36''')+(0'-0''-31''')$$
$$=\underline{207'-19''-16'''}$$

$$\therefore\text{ഇഷ്ടജ്യാകോടി}=\text{ത്രിജ്യ}-\text{ശരം}$$
$$=(3437'-44''-48''')-(207'-19''-16''')$$
$$=\underline{3230'-25''-32'''}$$

പിന്നെ വാക്യങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കും പ്രകാരം:—

$$0'-0''-44'''\times\frac{1200^2}{5400^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0'-0-''-2'''$$

$$\{(0'-33''-6''')-(0'-0''-2''')\}\times\frac{1200^2}{5400^2}\cdots\cdots=0'-1''-38'''$$

$$\{(16'-5'-41''')-(0'-1''-38''')\}\times\frac{1200^2}{5400^2}\cdots\cdots=0'-47''-36'''$$

$$\{(273'-57''-47''')-(0'-47''-36''')\}\times\frac{1200^2}{5400^2}\cdots\cdots=18'-29''-23'''$$

$$\{(2220'-39'-40''')-(18'-29''-23''')\}\times\frac{1200^3}{5400^3}\cdots\cdots=24'-18''-17'''$$

$$\therefore\text{ഇഷ്ടജ്യാവു്}=(1200'-0''-0''')-(24'-18''-17''')=\underline{1175-46-43.}$$

$$0'-0''-6'''\times\frac{1200^2}{5400^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0'-0'-0'''$$

$$0'-5'-12'''\times\frac{1200^3}{5400^3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0'-0''-15'''$$

$$\{(3'-9''-37''')-(0'-0''-15''')\}\times\frac{1200^2}{5400^2}\cdots\cdots=0'-9-22'''$$

$$\{(71'-43''-24''')-(0'-9''-22''')\}\times\frac{1200^2}{5400^2}\cdots\cdots=3'-32''-3'''$$

$$\{(872'-3''-5''')-(3'-32''-3''')\}\times\frac{1200^2}{5400^2}\cdots\cdots=42'-53''-23'''$$

$$\{(4241-9''-0''')-(42'-53''-23''')\}\times\frac{1200^2}{5400^2}\cdots\cdots=207'-19''-17'''$$

$$\text{ഇഷ്ടചാപശരം}=\underline{207'-19''-17'''}$$

$$\text{ഇഷ്ടജ്യാകോടി}=\underline{3230'-25''-31'''}$$

ഇങ്ങനെ 225′, 450′, 675′.......എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള 24 ചാപങ്ങളേയും വെച്ചു "നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ......." എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു ക്രിയ ചെയ്താൽ 24 മഹാജ്യാക്കളേയും ഏറ്റവും സൂക്ഷ്മമായിട്ടു വരുത്താം.

മാധവോദിതങ്ങളായിരിക്കുന്ന തല്പരാദിമഹാജ്യാക്കളെ താഴെ ചേർക്കുന്നു:—

"ശ്രേഷ്ഠനാമവരിഷ്ഠാനാം ഹിമാദ്രിർവ്വേദഭാവനഃ ।
തപനോ ഭാനുസൂക്തജ്ഞോ മദ്ധ്യമം വിദ്ധി ദോഹനം ।
ധിഗാജ്യോ നാശനം കഷ്ടം ഛന്നഭോഗാശയാംബികാ ।
മൃഗാഹാരോ നരേശോയം വീരവരോ രണോത്സുകഃ ।
മൂലം വിശുദ്ധം നാളസ്യ ഗാനേഷു വിരളാ നരാഃ ।
അശുദ്ധിഗുപ്താ ചോരശ്രീഃ ശങ്കുകർണ്ണോ നഗേശ്വരഃ ॥
തനുജോ ഗർഭജോ മിത്രം ശ്രീമാനത്ര സുഖീ സഖേ ।
ശശീ രാത്രൗ ഹിമാഹാരോ വേഗജ്ഞഃ പഥി സിന്ധുരഃ ॥
ഛായാലയോ ഗജോ നീലോ നിർമ്മലോ നാസ്തി സൽകുലേ ।
രാത്രൗ ദർപ്പണമഭ്രാംഗം നാഗസ്തുംഗനഖോ ബലീ ।
ധീരോ യുവാ കഥാലോലഃ പൂജ്യോ നാരീജനൈർഭഗഃ ।
കന്യാഗാരേ നാഗവല്ലീ ദേവോ വിശ്വസ്ഥലീ ഭൃഗുഃ ॥
തല്പരാദികലാന്താസ്തു മഹാജ്യാ മാധവോദിതാഃ"।

ത്രിജ്യാ=ശ്രേഷ്ഠോ ദേവോ വിശ്വസ്ഥലീ ഭൃഗുഃ 3437′—44″—48‴—22.

ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം=ഭഗാനാം പ്രാണകലാനാം നവവനശത്രൂൻ നാഡ്യാദൌപാദപീഡ്യാ
—11818102—50—40—3—15—20—4.

നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു ചെറിയ ജ്യാക്കളെ ചാപിക്കും പ്രകാരം:—

$$\text{ഇഷ്ടജ്യാവ} = \text{ഇഷ്ടചാപം} - \frac{\text{ഇഷ്ടചാപഘനം}}{6 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

ചാപം ചെറുതാകയാൽ $\frac{\text{ചാപഘനം}}{6 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$ എന്നതിനെ $\frac{\text{ജ്യാഘനം}}{6 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$ എന്നതിനോടു തുല്യമെന്നു കല്പിക്കാം.

$$\therefore \text{ഇഷ്ടചാപം} = \text{ജ്യാവു്} + \frac{\text{ജ്യാഘനം}}{6 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} \Big]$$

പ്രായികപരിധിയെ സൂക്ഷ്മമാക്കുംപ്രകാരം

അനന്തരം ഈ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ഇഷ്ടവ്യാസത്തിന്നു പ്രായികമായിട്ടു് ഒരു പരിധിയെ ഉണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്നതിനെ സൂക്ഷ്മമാക്കുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ നടേ ഇഷ്ടമായി ഒരു വ്യാസത്തെ കല്പിച്ചു് അതിന്നു പ്രായികമായിട്ടു് ഒരു പരിധിയെ

ഉണ്ടാക്കൂ, 'ഏഴിന്' ഇരുപത്തിരണ്ട്' എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള പ്രായികവ്യാസപരിധികളെക്കൊണ്ടു ത്രൈരാശികത്തിന്നു തക്കവണ്ണം. പിന്നെ ഇഷ്ടവ്യാസത്തെ വ്യാസാർദ്ധമെന്നു കല്പിച്ച് ഇച്ചൊല്ലിയ പ്രായികപരിധിടെ നാലൊന്ന് അവിടെ മിക്കവാറും എട്ടൊന്നായിട്ടിരിക്കും. ഇതിന്ന് ഇച്ചൊല്ലിയ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ജ്യാവിനെ ഉണ്ടാക്കൂ. അപ്പോളത്' ഇഷ്ടവ്യാസം വ്യാസാർദ്ധമായിട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിങ്കൽ യാതൊന്നു* സൂക്ഷ്മമായിട്ടിരിക്കുന്ന പരിധീടെ അഷ്ടാംശമാകുന്നത് അതിന്റെ ജ്യാവിനോടു മിക്കതുമൊത്തിരിക്കും ഈ ഉണ്ടാക്കിയ ജ്യാവ്. ഇവിടെ നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ എന്ന ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ജ്യാവിനെ വരുത്തുന്നേടത്തു നടേത്തെ ഹാരകമാകുന്ന ത്രിജ്യാവർഗ്ഗത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത് ഇഷ്ടവ്യാസവർഗ്ഗത്തെ കൊള്ളൂ, ദ്വിഗുണവ്യാസവൃത്തത്തിങ്കലെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗമാകയാൽ. ഇത്ര ഇഷ്ടവ്യാസത്തിങ്കൽ ഈ ജ്യാവുണ്ടാക്കുന്നേടത്തു വിശേഷമുള്ളൂ. പിന്നെ ഈ ജ്യാവിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളയൂ. ശേഷം കോടിവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ സൂക്ഷ്മമായിട്ടിരിക്കുന്ന പരിധ്യഷ്ടാംശത്തിന്റെ ജ്യാവർഗ്ഗം വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ പാതി ആയിട്ടിരിക്കും. കോടിവർഗ്ഗവും അത്രതന്നെ ആയിട്ടിരിക്കും. അഷ്ടാംശം പരിധിപാദത്തിൽ അർദ്ധമാകയാൽ ഭുജാകോടികൾ സമങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ പ്രായികമായിട്ടുണ്ടാക്കിയ പരിധ്യഷ്ടാംശത്തിന്റെയും സൂക്ഷ്മമായിരിക്കുന്ന പരിധ്യഷ്ടാംശത്തിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെ ജ്യാവിനെ മേലിൽ ചൊല്ലുവാനിരിക്കുന്ന 'ജീവേ പരസ്പരം' എന്ന ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ഉണ്ടാക്കാം. അതിന്നു പ്രായികഭുജാകോടികളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളെ സൂക്ഷ്മകോടിഭുജാവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങൾ പ്രായികഭുജാകോടിവർഗ്ഗങ്ങളുടെ അർദ്ധങ്ങളായിട്ടിരിക്കും, ഗുണകാരങ്ങൾ പാതിയും ഇരട്ടിയും ആയിട്ടിരിക്കയാൽ. പിന്നെ ഇവറ്റിന്റെ മൂലങ്ങൾ തങ്ങളിൽ അന്തരിപ്പൂ. ശേഷം സൂക്ഷ്മപ്രായികപരിധികളുടെ അഷ്ടാംശങ്ങളുടെ അന്തരത്തിന്റെ ജ്യാവ്. ഇതിനെ ചാപിപ്പൂ. അതിന്ന് ഇതിന്റെ ഘനത്തിങ്കന്നു വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ ആറിൽ ഗുണിച്ച് അതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ ഈ അന്തരജ്യാവിൽ കൂട്ടൂ. ഇത് അന്തരചാപമാകുന്നത്. പിന്നെ ഇതിനെ പ്രായികാഷ്ടാംശചാപത്തിൽ കൂട്ടൂ, പ്രായികജ്യാവർഗ്ഗം വ്യാസവർഗ്ഗാർദ്ധത്തെക്കാൾ ചെറുത് എന്നിരിക്കിൽ; വലുത് എന്നിരിക്കിൽ കളവൂ. അ

* 'യാതൊന്നു' എന്നതിന്നു യാതൊരു ചാപമെന്നർത്ഥം.

പ്പോൾ സൂക്ഷ്മാഷ്ടാംശമായിട്ടു വരുമത്രേ പരിധിയുടെ, ദ്വിഗുണവ്യാസത്തിങ്കൽ. ഇഷ്ടവ്യാസത്തിങ്കൽ പരിധീടെ ചതുരംശം ആയിട്ടിരിക്കും. അതിനെ നാലിൽ ഗുണിച്ചാൽ സൂക്ഷ്മമായിരിക്കുന്ന പരിധി. ഇങ്ങനെ പ്രായികപരിധിയെ സൂക്ഷ്മമാക്കും പ്രകാരം.

[ഇവിടെ "നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ......" എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു സ്ഥൂലമായിട്ടു വരുത്തിയ പരിധിയെ സൂക്ഷ്മമാക്കും പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

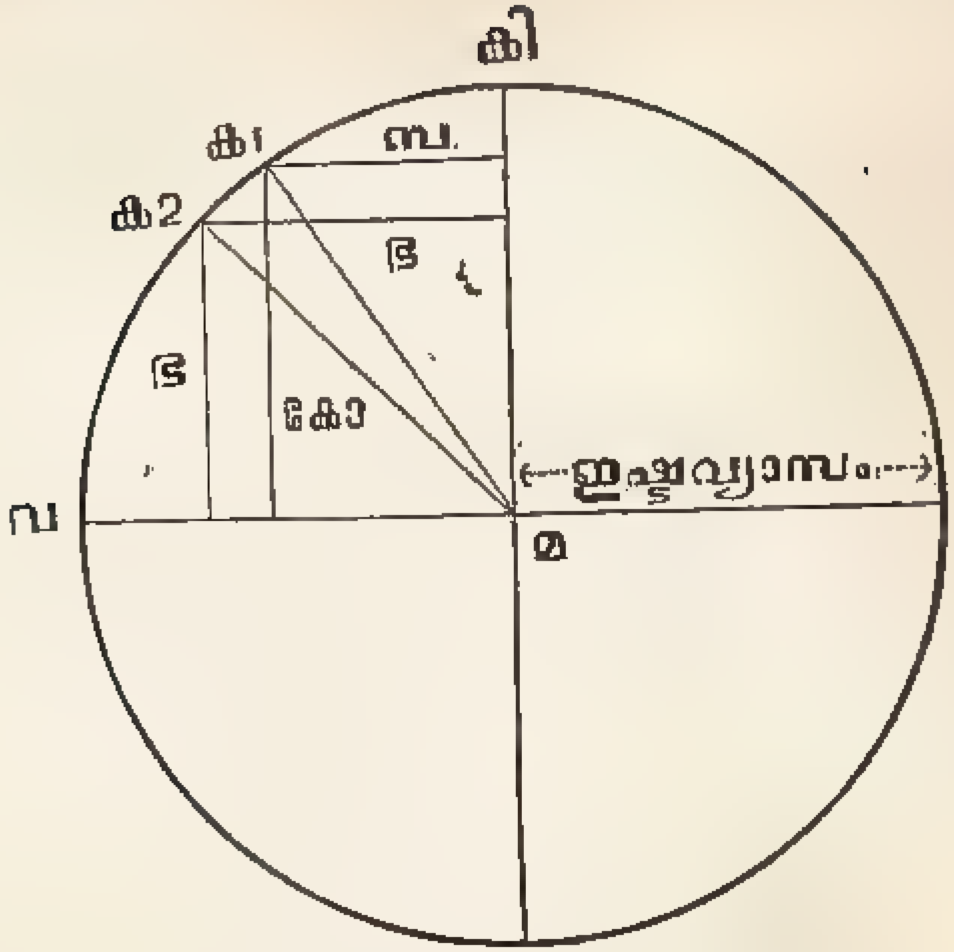
"ന്യായേനാനേന പരിധിമിഷ്ടവ്യാസസ്യ കല്പയേൽ ।
ഇഷ്ടവ്യാസസ്യ പരിധിതുര്യം ചാപം പ്രകല്പയേൽ ॥
നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ ചാപം തത്തൽഫലാനി ച ।
ഹരേൽ സമൂലയുഗ്വർഗ്ഗൈർവ്യാസവർഗ്ഗഹതൈഃ ക്രമാൽ ॥
ചാപം ഫലാനി ചാധോധോ ന്യസ്യോപര്യുപരി ത്യജേൽ ।
ശിഷ്ടം ഗുണസ്യ വർഗ്ഗോ യോ വ്യാസവർഗ്ഗാന്തരം ച യൽ ॥
തയോർവ്യേ ദളമൂലേ തൽഭേദം സ ഫലാനാഷ്യതഃ ।
വ്യാസവർഗ്ഗാപ്തസംയുക്താ ചതുർഘ്നാ പരിധേസ്ത്യജേൽ ॥
ആദ്യമൂലേധികേ, യോജ്യമൂനേ സ്യാൽപരിധിസ്ഫുടഃ ।"(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഒന്നിനു മൂന്ന്, ഏഴിന്നു ഇരുപത്തിരണ്ട് എന്നു തുടങ്ങിയ ഏതെങ്കിലുമൊന്നുകൊണ്ട് ഒരിഷ്ടവ്യാസത്തിനു പരിധിയെ വരുത്തൂ. ആ പരിധിയുടെ നാലൊന്നിനെ ഇഷ്ടചാപമെന്നു കല്പിക്ക. ഈ ചാപത്തിനു "നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ......" എന്ന ന്യായേന ജ്യാവിനെ ഉണ്ടാക്ക. ജ്യാനയനത്തിങ്കൽ ത്രിജ്യാവർഗ്ഗത്തിനു പകരം ഇഷ്ടവ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്ന് ഈ ജ്യാവർഗ്ഗത്തെ വാങ്ങൂ. ഈ ശേഷത്തെയും ജ്യാവർഗ്ഗത്തെയും വെവ്വേറെ അർദ്ധിച്ചു മൂലിപ്പൂ. ഈ രാശികളുടെ അന്തരത്തെ രണ്ടേടത്തുവെച്ച് ഒന്നിന്റെ ഘനത്തെ ആറിലും വ്യാസവർഗ്ഗത്തിലും ഹരിപ്പൂ ഈ ഫലത്തെ വേറെ വെച്ചിരിക്കുന്ന രാശ്യന്തരത്തിൽ കൂട്ടൂ. ഇതിനെ നാലിൽ ഗുണിച്ചു സ്ഥൂലപരിധിയിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ സൂക്ഷ്മമായിരിക്കുന്ന പരിധി വരും. ഇവിടെ ജ്യാവർഗ്ഗാർദ്ധം ജ്യാവ്യാസവർഗ്ഗാന്തരാർദ്ധത്തെക്കാൾ ഏറുമെങ്കിൽ, സംസ്കാരം ഋണം; അല്ലെങ്കിൽ ധനം.

ഈ ക്രിയയുടെ യുക്തി:—

പരിലേഖം 38-ൽ ഇഷ്ടവ്യാസം (വ്യ) വ്യാസാർദ്ധമായ വൃത്തത്തിൽ കേന്ദ്രം മ, കിക$_1$ സ്ഥൂലപരിധിയിൽ നാലൊന്നായ ചാപം. ഇഷ്ടവ്യാസം വ്യാസാർദ്ധമായിട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിൽ കിക$_1$ പരിധിയുടെ എട്ടൊന്നിനോടു മിക്കതും തുല്യമായിട്ടിരിക്കും. കിക$_2$ സൂക്ഷ്മപരിധിയുടെ എട്ടൊന്ന്.

അന്തരചാപം = ക$_1$ക$_2$



പരിലേഖം 38.

കികം$_1$ എന്ന ചാപത്തിന്നു "നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ......." എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു ജ്യാവിനെ ഉണ്ടാക്കു. ഈ വലിയ വൃത്തത്തിലെ വ്യാസാർദ്ധം ഇഷ്ടവ്യാസമാകയാൽ ത്രിജ്യാവർഗ്ഗത്തിന്നു പകരം ഇഷ്ടവ്യാസവർഗ്ഗത്തെ ഹാരകമായി കല്പിക്കേണം. കികം$_1$ എന്ന ചാപത്തെ ച$_1$ എന്നു കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ

$$\text{ച}_1 \text{ എന്ന ചാപത്തിൻെറ ജ്യാവ് (ബ)} = \text{ച}_1 - \frac{\text{ച}_1^3}{6\text{വ്യ}^2} + \frac{\text{ച}_1^5}{120\text{വ്യ}^4} - \ldots\ldots$$

$$\text{ച}_1 \text{ എന്ന ചാപത്തിൻെറ കോടിവർഗ്ഗം} = \text{വ്യ}^2 - \text{ബ}^2 (= \text{കോ}^2)$$

വൃത്തത്തിൻെറ എട്ടൊന്നിൻെറ ഭുജാകോടികൾ സമങ്ങളാകുന്നു. എന്തെന്നാൽ സൂക്ഷ്മപരിധിയുടെ എട്ടൊന്നു പദാൎദ്ധമാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഭുജാചാപവും കോടിചാപവും തുല്യങ്ങളാകയാൽ, ജ്യാക്കളും തുല്യങ്ങൾ. സൂക്ഷ്മപരിധ്യഷ്ടാംശത്തിൻെറ ഭുജാകോടികളും സ്ഥൂലപരിധ്യഷ്ടാംശത്തിൻെറ ഭുജാകോടികളും തമ്മിൽ കുറച്ചന്തരമുണ്ടാകും. ഈ അന്തരത്തെയാണിവിടെ കാണേണ്ടതു്.

സൂക്ഷ്മപരിധ്യഷ്ടാംശത്തിൻെറ ചാപം = ച$_2$

സൂക്ഷ്മപരിധ്യഷ്ടാംശഭുജ = അതിൻെറ കോടി = ഭ

$$\text{ച}_2 \sim \text{ച}_1 \text{ എന്ന ചാപത്തിൻെറ ഭുജാ} = \frac{\text{ബ} \times \text{ഭ} \sim \text{കോ} \times \text{ഭ}}{\text{വ്യ}}$$ (ജീവേ പരസ്പരം ന്യായേന)

ഭുജാകോടി കൎണ്ണന്യായേന, ഭുജാകോടിവൎഗ്ഗയോഗം=കൎണ്ണവൎഗ്ഗം

$\therefore ഭ^2 + ഭ^2 = വ്യ^2$

$ഭ^2 = \frac{വ്യ^2}{2}$

$\frac{ബാ^2 \times ഭ^2}{വ്യ^2} = \frac{ബാ^2 \times വ്യ^2/_2}{വ്യ^2} = \frac{ബാ^2}{2}$

അതുപോലെതന്നെ $\frac{കോ^2 \times ഭ^2}{വ്യ^2} = \frac{കോ^2}{2}$

അപ്പോൾ ചാപാന്തരജ്യാ $= \frac{\sqrt{ബാ^2}}{\sqrt{2}} \backsim \frac{\sqrt{കോ^2}}{\sqrt{2}}$

ഇതിനെ ചാപിച്ചാൽ ചാപാന്തരം $ച = \left(\frac{\sqrt{ബാ^2}}{\sqrt{2}} \backsim \frac{\sqrt{കോ^2}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\left(\frac{\sqrt{ബാ^2}}{\sqrt{2}} \backsim \frac{\sqrt{കോ^2}}{\sqrt{2}}\right)^3}{6വ്യ^2}$

(ഈ ചാപീകരണപ്രകാരത്തിന്റെ യുക്തി മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലൊ).

∴ സൂക്ഷ്മപരിധിയുടെ എട്ടൊന്ന് $= ച_1 \pm ച$.

കോ²-നേക്കാൾ ബാ² ഏറുമെങ്കിൽ $ച_1$ എന്നതു $ച_2$ എന്നതിനേക്കാളേറും.

അപ്പോൾ സൂക്ഷ്മപരിധിയുടെ എട്ടൊന്ന $= ച_1 - ച$

ബാ² കുറയുമെങ്കിൽ $ച_1$നേക്കാൾ $ച_2$ ഏറും.

അപ്പോൾ സൂക്ഷ്മപരിധിയുടെ എട്ടൊന്ന് $= ച_1 + ച$

അപ്പോൾ വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ സൂക്ഷ്മപരിധി $= 8(ച_1 \pm ച)$

∴ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ സൂക്ഷ്മപരിധി $= 4(ച_1 \pm ച)$

$= 4ച_1 \pm 4ച$

= സ്ഥൂലപരിധി ± 4 × ചാപാന്തരം.

ഉദാഹരണം:—

ഇഷ്ടവ്യാസം = 1400

സ്ഥൂലപരിധി $= 1400 \times \frac{22}{7} = 4400$

ഇതിന്റെ നാലൊന്ന് = 1100

	ധനം	ഋണം
ചാപം .... =	1100−0−0	
ആദ്യഫലം $= \frac{1100^3}{6 \times 1400^2}$ .... =		113−10−49
ദ്വിതീയഫലം $= \frac{113-10-49 \times 1100^2}{20 \times 1400}$ ... =	3−29−37	
തൃതീയഫലം $= \frac{3-29-37 \times 1100^2}{42 \times 1400^2}$ .... =		0−3−5
ചതുൎത്ഥഫലം $= \frac{0-3-5 \times 1100^2}{72 \times 1400^2}$ .... =	0−0−2	
	1103−29−39	113−13−54

1100 എന്ന ചാപത്തിന്റെ ഭുജം=990 − 15 − 45

ഭുജാവൎഗ്ഗം=980619 − 49 − 8 − 3 − 45

കോടിവൎഗ്ഗം=1960000 − ഭുജാവൎഗ്ഗം=979380 − 10 − 51 − 56 − 15

ഭുജാവൎഗ്ഗാൎദ്ധമൂലം=$\sqrt{490309 - 54 \quad 34}$=700 − 13 − 17

കോടിവൎഗ്ഗാൎദ്ധമൂലം=$\sqrt{489690 - 5 - 26}$=699 − 46 − 44

ഇവയുടെ അന്തരം=0 − 26 − 33

ഇതിന്റെ ചാപം=0 − 26 − 33 തന്നെ

ഭുജാവൎഗ്ഗം > കോടിവൎഗ്ഗം; അതുകൊണ്ടു സംസ്കാരം ഋണം.

അപ്പോൾ സൂക്ഷ്മപരിധി=4400 − (0 − 26 − 33)×4

=4398 13 − 48

(3. 14159265×1400=4398 − 13 − 47)]

ജ്യാവൎഗ്ഗാനയനം

അനന്തരം നിഹത്യ ചാപവൎഗ്ഗേണ എന്ന ന്യായത്തിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊരു വിശേഷംകൊണ്ടു ജ്യാവൎഗ്ഗമുണ്ടാകും എന്നതിനെ ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ ചാപവൎഗ്ഗത്തെ ചാപവൎഗ്ഗംകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിക്കുന്നു. ചാപവൎഗ്ഗത്തേയും ഫലങ്ങളേയും കീഴെ കീഴെ വെക്കുന്നതും. പിന്നെ രണ്ടു തുടങ്ങി മൂന്ന്, നാല്, അഞ്ച്, എന്നിങ്ങനെയുള്ള നിരന്തരസംഖ്യകളുടെ വൎഗ്ഗങ്ങളിൽനിന്നു തന്റെ തന്റെ മൂലാൎദ്ധത്തെ കളഞ്ഞ ശേഷത്തെക്കൊണ്ടു വ്യാസാൎദ്ധവൎഗ്ഗത്തെ ഗുണിച്ച് അവറ്റെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഇത്രേ വിശേഷമുള്ളൂ. കടക്കത്തേതു ശേഷിക്കുന്നതു ജ്യാവൎഗ്ഗം. പിന്നെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടു ശരവൎഗ്ഗത്തേയും ഉണ്ടാക്കാം. ഇവിടെ "വിദ്വാംസ്തുന്നബലഃ" എന്നതിന്റെ സ്ഥാനത്തു "ശൌരിൎജ്ജയതി" എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളവ.

[ക്രമജ്യാവിന്റെ വൎഗ്ഗങ്ങളെ വരുത്തുംപ്രകാരം:—

"നിഹത്യ ചാപവൎഗ്ഗേണ ചാപവൎഗ്ഗം ഫലാനി ച।
നിരന്തരദ്വ്യാദിവൎഗ്ഗാന്മൂലാൎദ്ധോനഹതൈൎഹരേൽ ॥
ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗൈൎദ്ധനുൎവ്വൎഗ്ഗമധോധസ്തൽഫലാനി ച।
ന്യസ്യോപൎയ്യുപരി ത്യാജ്യമിഷ്ടജീവാകൃതിൎഭവേൽ"

(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഇവിടെ ഗുണകാരം എല്ലായിടത്തും ചാപവൎഗ്ഗം. രണ്ട്, മൂന്ന്, നാല്, അഞ്ചു മുതലായ നിരന്തരസംഖ്യകളുടെ വൎഗ്ഗങ്ങളിൽനിന്നു തന്റെ തന്റെ മൂലാൎദ്ധങ്ങളെ വാങ്ങിയശേഷങ്ങളെക്കൊണ്ടു ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗത്തെ ഗുണിച്ചവ മേലെ മേലെയുള്ള ഹാരകങ്ങളാം. ചാപവൎഗ്ഗത്തെ വല്ലിയുടെ മേലെ വെക്കു.

ഇതിനെ ഇതുകൊണ്ടു തന്നെ ഗുണിച്ചു $(2^2 - \frac{2}{2})$ എന്ന മൂന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തെ ചാപവർഗ്ഗത്തിന്റെ കീഴെ വെക്ക. ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെയുള്ള ഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി കീഴെ കീഴെ വെക്ക. ഒടുക്കത്തെ ഫലത്തെ അതിന്റെ മേലേതിങ്കന്നു കളയൂ. ആ ശേഷത്തെ അതിന്നു മേലേതിങ്കന്നു കളയൂ ഇങ്ങനെ ഒടുക്കത്തെ ഫലശേഷത്തെ ചാപവർഗ്ഗത്തിൽനിന്നു കളയൂ. എന്നാലിഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗം വരും.

ഇഷ്ടചാപം $=$ ച.

$$\text{എന്നാൽ ജ്യാവർഗ്ഗം} = \text{ച}^2 - \frac{\text{ച}^2 \times \text{ച}^2}{(2^2 - \frac{2}{2})\text{ത്രി}^2} + \frac{\text{ച}^4}{3\text{ത്രി}^2} \times \frac{\text{ച}^2}{(3^2 - \frac{3}{2})\text{ത്രി}^2} - \frac{\text{ച}^6}{3 \times 7\frac{1}{2}\text{ത്രി}^4} \times \frac{\text{ച}^2}{(4^2 - \frac{4}{2})\text{ത്രി}^2} + \cdots\cdots$$

ഇതിന്റെ യുക്തി:—

$$\text{ഇഷ്ടജ്യാവ്} = \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{\angle 3\,\text{ത്രി}^2} + \frac{\text{ച}^5}{\angle 5\,\text{ത്രി}^4} - \frac{\text{ച}^7}{\angle 7\,\text{ത്രി}^6} + \cdots\cdots$$

$$\text{ഇഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗം} = \left(\text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{\angle 3\,\text{ത്രി}^2} + \frac{\text{ച}^5}{\angle 5\,\text{ത്രി}^4} - \frac{\text{ച}^7}{\angle 7\,\text{ത്രി}^6} + \cdots\cdots\right)^2$$

$$= \text{ച}^2 - 2\text{ച}\left(\frac{\text{ച}^3}{\angle 3\,\text{ത്രി}^2} - \frac{\text{ച}^5}{\angle 5\,\text{ത്രി}^4} + \frac{\text{ച}^7}{\angle 7\,\text{ത്രി}^6} - \cdots\cdots\right) + \frac{\text{ച}^6}{36\,\text{ത്രി}^4}$$

$$- \frac{2\text{ച}^3}{\angle 3\,\text{ത്രി}^2}\left(\frac{\text{ച}^5}{\angle 5\,\text{ത്രി}^4} - \frac{\text{ച}^7}{\angle 7\,\text{ത്രി}^6} + \cdots\cdots\right) + \frac{\text{ച}^{10}}{(\angle 5)^2 \times \text{ത്രി}^8} -$$

$$\frac{2\text{ച}^5}{\angle 5\,\text{ത്രി}^4} \times \frac{\text{ച}^7}{\angle 7 \times \text{ത്രി}^6} + \frac{\text{ച}^{14}}{(\angle 7)^2 \times \text{ത്രി}^{12}} \cdots\cdots$$

$$= \text{ച}^2 - \frac{2\text{ച}^4}{\angle 3\,\text{ത്രി}^2} + \frac{\text{ച}^6}{\text{ത്രി}^4}\left(\frac{2}{\angle 5} + \frac{1}{36}\right) - \frac{\text{ച}^8}{\text{ത്രി}^6}\left(\frac{2}{\angle 7} + \frac{2}{\angle 3 \times \angle 5}\right)$$

$$+ \frac{\text{ച}^{10}}{\text{ത്രി}^8}\left(\frac{2}{\angle 9} + \frac{2}{\angle 3 \times \angle 7} + \frac{1}{(\angle 5)^2}\right) \cdots\cdots$$

$$= \text{ച}^2 - \frac{\text{ച}^4}{3\text{ത്രി}^2} + \frac{\text{ച}^6}{3\text{ത്രി}^4}\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{12}\right) - \frac{2\text{ച}^8}{\angle 6\,\text{ത്രി}^6}\left(\frac{1}{7} + 1\right) +$$

$$\frac{2\text{ച}^{10}}{\angle 6\,\text{ത്രി}^8}\left(\frac{1}{7 \times 8 \times 9} + \frac{1}{2 \times 3 \times 7} + \frac{1}{40}\right)$$

....

$$= \text{ച}^2 - \frac{\text{ച}^4}{3\text{ത്രി}^2} + \frac{\text{ച}^6}{3\text{ത്രി}^4} \times \frac{2}{15} - \frac{\text{ച}^8}{315\,\text{ത്രി}^6} + \frac{2\text{ച}^{10}}{315 \times 45 \times \text{ത്രി}^8} - \cdots\cdots$$

$$= \text{ച}^2 - \frac{\text{ച}^4}{(2^2 - \frac{2}{2})\text{ത്രി}^2} + \frac{\text{ച}^4}{3\text{ത്രി}^2} \times \frac{\text{ച}^2}{(3^2 - \frac{3}{2})\text{ത്രി}^2} - \frac{\text{ച}^6}{3 \times \frac{15}{2}\text{ത്രി}^4} \times \frac{\text{ച}^2}{(4^2 - \frac{4}{2})\text{ത്രി}^2} \cdots\cdots$$

ഉദാഹരണം:—

ചാപം=1800 ഇലി.

	ധനം	ഋണം.
ചാ^{2}=1800×1800	=3240000	
$\frac{1800^2 \times 1800^2}{3 ത്ര^2}$		=296088
$\frac{296088 \times 1800^2}{(3^2-\frac{3}{2})ത്ര^2}$	= 10823	
$\frac{10823 \times 1800^2}{(4^2-\frac{4}{2}) \times ത്ര^2}$		= 212
$\frac{212 \times 1800^2}{(5^2-\frac{5}{2}) \times ത്ര^2}$	= 3	
അപ്പോൾ ജ്യാവർഗ്ഗം	=3250826 —	296300
	=2954526	

∴ ഇഷ്ടജ്യാവ്=$\sqrt{2954526}$=1718′–52″–25‴

(1800 ഇലിയുടെ ജ്യാവ്=എട്ടാം ജ്യാവ്="വീരോ രണജയോത്സുകഃ"

=1718′–52″–24‴

ജ്യാനയനത്തിങ്കൽ "വിദ്വാംസ്തുന്ന ബലഃ......" എന്നപോലെ ജ്യാവർഗ്ഗാനയനത്തിങ്കലും ഉപകരിക്കാവുന്ന വാക്യങ്ങളെ വരുത്താം. ത്രിരാശിചാപവർഗ്ഗത്തെവെച്ച് മുമ്പിലെ ക്രിയ ചെയ്താൽ ഈ വാക്യങ്ങൾ വരും.

	ക്രിയ	ധനം	ഋണം	വാക്യങ്ങൾ
ആദ്യഫലം	ത്രിരാശിചാപവർഗ്ഗം	29160000		നാനാജ്ഞാന തപോധരഃ
രണ്ടാംഫലം	$\frac{29160000^2}{(2^2-\frac{2}{2})ത്ര^2}$		23983138	മിഗാപാംശേജജ്ഞാംഗസ്ത്രീ
മൂന്നാംഫലം	$\frac{23983138 \times 29160000}{(3^2-\frac{3}{2})ത്ര^2}$	7890136		ചണ്ഡാപന്നാധീശിത്സനാ
നാലാംഫലം	$\frac{7890136 \times 29160000}{(4^2-\frac{4}{2}) \times ത്ര^2}$		1390581	ധജകാനന്ധലോകേന
അഞ്ചാംഫലം	$\frac{1390581 \times 29160000}{(5^2-\frac{5}{2}) \times ത്ര^2}$	152494		വിദ്ധ്വാവരാശയഃ
ആറാംഫലം	$\frac{152494 \times 29160000}{(6^2-\frac{6}{2}) \times ത്ര^2}$		11402	രത്നൌഘലംപ്പഃ
ഏഴാംഫലം	$\frac{11402 \times 29160000}{(7^2-\frac{7}{2})ത്ര^2}$	618		ജയതി
എട്ടാംഫലം	$\frac{618 \times 29160000}{(8^2-\frac{8}{2})ത്ര^2}$		25	ശൌരിഃ

“ശൌരിജ്ജയതി വിഘ്നൌഘപൃഷ്ഠോ വിഭവരാശയഃ ।
യജമാനോന്ധലോകേന ഖണ്ഡാപന്നാധിരിസ്തനാഃ ॥
വിഗാപാംഗജഗാംഗസ്ത്രീ നാനാജ്ഞാനതപോധരഃ ।
ഏതേഷ്വാദ്യാസ്വധോധസ്ഥാദിഷ്ടചാപകൃതിഘ്നതഃ ॥
അന്ത്യചാപസ്യ കൃത്യാപ്തമുപര്യുപരി ശോധയേൽ ।
അന്ത്യേഽന്ത്യഞ്ച യന്മൂലം തദിഷ്ടഗുണോ ഭവേൽ” ॥(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഇവിടെ ഒടുക്കത്തെ ഫലത്തെ ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിംശിചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടിയതിനെ മേലെ വാക്യത്തിൽനിന്നു കളയൂ. ഇങ്ങനെ കളഞ്ഞു കളഞ്ഞു ഒടുക്കത്തേതിലുണ്ടാകുന്ന ഫലം ഇഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിന്റെ മൂലം ഇഷ്ടജ്യാവായിട്ടു ഭവിക്കും.

ഉദാഹരണം:—

ചാപം=1800 ഇലി. ചാപവർഗ്ഗം=3240000

$$(1)\ 25'\times\frac{3240000}{29160000}=2'-46''-40'''$$

$$(2)\ (618'-2'-46'-40''')\times\frac{3240000}{29160000}=68'-21''-29'''$$

$$(3)\ (11402'-68'-21''-29''')\times\frac{3240000}{29160000}=1259'-17''-37'''$$

$$(4)\ (152494'-1259'-17''-37''')\times\frac{3240000}{29160000}=16803'-51'-23'''$$

$$(5)\ (1390581-16803'-51''-23''')\times\frac{3240000}{29160000}=152641'-54''-17'''$$

$$(6)\ (7890136'-152641'-54''-17''')\times\frac{3240000}{29160000}=859721'-33''-58'''$$

$$(7)\ (23983138-859721'-33'-58''')\times\frac{3240000}{29160000}=2569268'-29''-34'''$$

$$(8)\ 29160000-2569268'-29''-34''')\times\frac{3240000}{29160000}=2954525'-43''-23'''$$

അപ്പോൾ ഇഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗം $=2954525'-43''-23''$

∴ ഇഷ്ടജ്യാവ് $=\sqrt{2954525'-43''-23'''}=1718'-52''-25'''$

(8-ാം ജ്യാവ് $=1718'-52''-24''$ — വിദ്വോ രണജയോത്സുകഃ)]

“ജീവേ പരസ്പരം” ന്യായവും തദ്വാരാ ജ്യാക്കളെ വരുത്തും പ്രകാരവും

ഇച്ചൊല്ലിയ ന്യായത്തിങ്കൽ എല്ലാടവും ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവു മുഴുവനേ ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നതു്. ഇനി മേലിൽ ചൊല്ലു

ന്നതിങ്കൽ സമസ്തജ്യാവിന്റെ അൎദ്ധം ഇച്ഛാരാശി എന്നു ഭേദമാകുന്നത്. ഇവിടെ പ്രഥമചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലും തൃതീയചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലും സ്പൎശിച്ചു രണ്ടു ഖണ്ഡത്തിന്നുംകൂടി ഒരു സമസ്തജ്യാവു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പൎശിച്ചിട്ട് ഒരു വ്യാസാൎദ്ധത്തെ കല്പിപ്പൂ ആ വ്യാസാൎദ്ധകൎണ്ണത്തിന്നു ദ്വിതീയജ്യാവും ഇരുപത്തിരണ്ടാംജ്യാവും ഭുജാകോടികളാകുന്നത്. ഇവിടേയും സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യം വ്യാസാൎദ്ധകൎണ്ണത്തിങ്കൽ സ്പൎശിക്കും. ഇതിന്റെ അൎദ്ധങ്ങൾ രണ്ടും ഓരോ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അൎദ്ധജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും. ഈ അൎദ്ധജ്യാക്കൾ ഇവിടെ ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നത്. എന്നാൽ ദ്വിതീയജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ചാപഖണ്ഡാൎദ്ധജ്യാവിനെ ഗുണിച്ചു വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറായിരിപ്പോരു കോടിജ്യാഖണ്ഡമുണ്ടാകും. പിന്നെ ഇരുപത്തിരണ്ടാംജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം തൃതീയചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നു കോടിഖണ്ഡമൂലത്തോളമുള്ള ഭുജാഖണ്ഡമുണ്ടാകും, തെക്കുവടക്കായിട്ട്. പിന്നെ രണ്ടു ചാപഖണ്ഡത്തിന്നുംകൂടിയുള്ള സമസ്തജ്യാകൎണ്ണമദ്ധ്യവും വ്യാസാൎദ്ധകൎണ്ണവും തങ്ങളിൽ സ്പൎശിച്ചേടത്തുന്നു പൂൎവ്വാപരസൂത്രത്തോളവും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തോളവുമുള്ള അകലമുണ്ടാക്കേണം. ഇവിടെ ത്രിജ്യാവു കൎണ്ണമാകുമ്പോൾ രണ്ടാംജ്യാവും ഇരുപത്തിരണ്ടാംജ്യാവും ഭുജാകോടികളാകുന്നത്. സമസ്തജ്യാശരോനമായിരിക്കുന്ന വ്യാസാൎദ്ധഭാഗം കൎണ്ണമാകുമ്പോൾ എന്തു ഭുജാകോടികൾ എന്ന ത്രൈരാശികംകൊണ്ടുണ്ടാകുമവ രണ്ടും. പിന്നെ ഇവിടെ ശരോനവ്യാസാൎദ്ധത്തിന്റെ ഭുജയിങ്കൽ ഭുജാഖണ്ഡം കൂട്ടൂ. എന്നാൽ മൂന്നാംജ്യാവുണ്ടാകും; കളകിൽ പ്രഥമജ്യാവുണ്ടാകും; പിന്നെ ശരോനവ്യാസാൎദ്ധത്തിന്റെ കോടിയിങ്കന്നു കോടിഖണ്ഡം കളവൂ. എന്നാൽ ഇരുപത്തൊന്നാംജ്യാവുണ്ടാകും. ആ കോടിയിൽ കോടിഖണ്ഡം കൂട്ടുകിൽ ഇരുപത്തിമൂന്നാംജ്യാവുണ്ടാകും. സമസ്തജ്യാകൎണ്ണത്തിന്റെ അൎദ്ധങ്ങൾ രണ്ടും ഇച്ഛാരാശിയായി കല്പിക്കുമ്പോളെ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങൾ തുല്യങ്ങൾ രണ്ടു ഖണ്ഡത്തിന്നും, എന്നിട്ട്. ശരോനവ്യാസാൎദ്ധത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടായ ഭുജാകോടികൾ അൎദ്ധജ്യാകൎണ്ണത്തിങ്കന്നു ഉണ്ടായ ഖണ്ഡജ്യാക്കൾക്ക് അവധികളാകുന്നത്, എന്നിട്ട്. ഇങ്ങനെ പഠിതജ്യാക്കളെ വരുത്തുംപ്രകാരം. പിന്നെ ഇവ്വണ്ണംതന്നെ ശിഷ്ടചാപത്തിന്റെ അൎദ്ധജ്യാകൎണ്ണത്തിന്ന് ഉണ്ടായ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളും ശിഷ്ടചാപശരോനവ്യാസാൎദ്ധത്തിന്നും ഭു

ജ്യാകോടികളെ ഉണ്ടാക്കി അവയുംകൂടി ഇഷ്ടജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കിക്കൊള്ളൂ *.

[ഇതി ജ്യാചാപയോഃ കാര്യം ഗ്രഹണം മാധവോദിതം।
വിധാന്തരഞ്ച തേനോക്തം തയോസ്സൂക്ഷ്മത്വമിച്ഛതാ॥ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)
“ജീവേ പരസ്പരനിജേതരമൌർവ്വികാഭ്യാ-
മഭ്യസ്യ വിസ്തൃതിഹൃതേന വിജ്യേമാനേ।
അന്യോന്യയോഗവിരഹാനുഗുണേ ഭവേതാം” । — ഇതി മാധവഃ.

രണ്ടു ചാപങ്ങളുടെ ജ്യാക്കളെ വെവ്വേറെ അറിഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ, ആ ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും യോഗത്തിന്റെയോ അന്തരത്തിന്റെയോ ജ്യാവിനെ അറിയേണമെങ്കിൽ, ഒന്നിന്റെ ഭുജയെ മറ്റതിന്റെ കോടികൊണ്ടു ഗുണിച്ചും മറ്റതിന്റെ ഭുജയെ ആദ്യത്തേതിന്റെ കോടികൊണ്ടു ഗുണിച്ചു

---

* Trigonometically Sin $(A+B)=\text{Sin } A \cos B+\cos A \sin B$

Sin $(A-B)=\text{Sin } A \cos A-\cos A \sin B$

Vide. fig. (39) Denoting the successive Bhujas(ordinates) as J_1, J_2, J_3 ....and the successive Kotis (abscissae) as c_1, c_2, c_3.........,

We have $J_3=\text{ഖ}_3\,\text{ഘ}_3=\text{ഖ}_3\,\text{ഠ}_2+\text{ഠ}_2\,\text{ഘ}_3$

$$=\text{ഖ}_3\,\text{ഠ}_2+\text{ല}\,\text{ച}$$

Now $\text{ഖ}_3\,\text{ഠ}_2 : \text{ഖ}_3\,\text{ല}=\text{ഖ}_2\,\text{ട}_2 : r$. (where r=the radius)

$$\therefore \text{ഖ}_3\,\text{ഠ}_2=\frac{\text{ഖ}_3\text{ല}\times\text{ഖ}_2\text{ട}_2}{r}=\frac{J_1\ c_2}{r}$$

$$\text{ലച} : \text{ഖ}_2\,\text{ഘ}_2=\text{ലമ} : \text{ഖ}_2\,\text{മ}.$$

$$\therefore \text{ലച}=\frac{\text{ഖ}_2\text{ഘ}_2\times\text{ലമ}}{\text{ഖ}_2\text{മ}}=\frac{J_2\ c_1}{r}$$

$$\therefore J_3=\frac{J_1c_2+J_2c_1}{r}$$

Similarly $c_3=\text{ഖ}_3\text{ട}_3=\text{ഠ}_2\text{ട}=\text{ലട}-\text{ലഠ}_2$

But $\text{ലട} : \text{ഖ}_2\text{ട}_2=\text{ലമ} : \text{ഖ}_2\text{മ}$

$$\therefore \text{ലട}=\frac{c_2\times c_1}{r}$$

and $\text{ലഠ}_2 : \text{ലഖ}_3=\text{ഖ}_2\text{ഘ}_2 : \text{ഖ}_2\text{മ}$

$$\therefore \text{ലഠ}_2=\frac{J_1\times J_2}{r}$$

$$\therefore c_3=\frac{c_1c_2-J_1J_2}{r}$$

Generally $J_{m\pm n}=\dfrac{J_m\ c_n\pm c_m\ J_n}{r}$

$$c_{m\pm n}=\frac{c_m\ c_n\pm J_m\ J_n}{r}$$

മായ ഘാതങ്ങൾ രണ്ടിനേയും ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ രാശികളുടെ യോഗമോ അന്തരമോ ചാപയോഗത്തിൻറയോ ചാപാന്തരത്തിൻറയോ ക്രമേണ ജ്യാവായിട്ടു വരും. ത്രിജ്യാഹരണം ഘാതയോഗാന്തരത്തിനു ശേഷവുമാവാം. ഫലം തുല്യം.

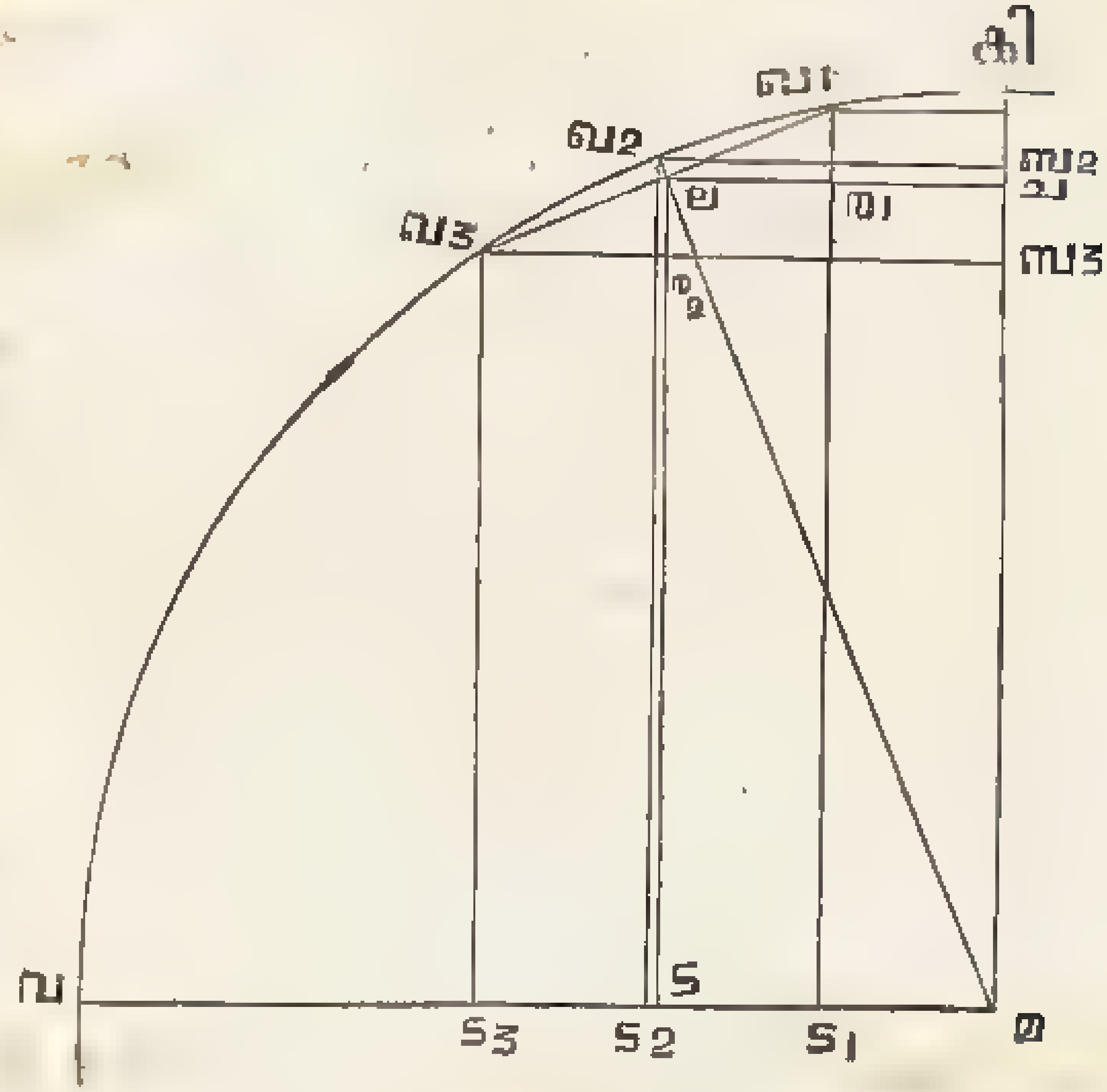
ഇതിൻെറ യുക്തി:—

ജ$_1$, ജ$_2$, ജ$_3$......ഇങ്ങനെ 24 ജ്യാക്കൾ.

പരിലേഖം 39-ൽ കിഖ$_1$, ഖ$_1$ഖ$_2$, ഖ$_2$ ഖ$_3$ ഇങ്ങനെ മൂന്നു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ.

ഖ$_2$ ബ$_2$ = രണ്ടാംജ്യാവ് = ജ$_2$

ഖ$_3$ ബ$_3$ = മൂന്നാംജ്യാവ് = ജ$_3$



പരിലേഖം 39.

മഖ$_2$ എന്ന വ്യാസാർദ്ധം ഖ$_1$ഖ$_3$ എന്ന സമസ്തജ്യാവിൻെറ മദ്ധ്യമാകുന്ന ല എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. ഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽനിന്നു കോടിജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കുക. ല എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നു ക്രമേണ ഭുജകൾക്കും കോടികൾക്കും തുല്യദിക്കുകളായിട്ടു പൂർവ്വോത്തരസൂത്രാവധി ലച, ലട എന്ന രേഖകളെ വരക്കുക. ഖ$_1$ട$_1$, ലച ഇവയുടെ യോഗപ്രദേശം ര$_1$; ലട, ഖ$_3$ബ$_3$ ഇവയുടെ യോഗപ്രദേശം ര$_2$.

ഖ$_1$ലര$_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ഭുജാകോടികർണ്ണങ്ങൾ ലഖ$_3$ര$_2$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ഭുജാകോടികർണ്ണങ്ങളോടു തുല്യങ്ങളെന്നു നിയതമായിട്ടിവിടെ കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു. എന്തെന്നാൽ ഖ$_1$ലര$_1$, ലഖ$_3$ര$_2$ ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ; സമസ്തജ്യാവിൻെറ അർദ്ധങ്ങളാകയാൽ ലഖ$_1$ = ലഖ$_3$.

∴ ലര$_1$ = ഖ$_3$ര$_2$; ഖ$_1$ര$_1$ = ലര$_2$.

മല = ശരോനവ്യാസാർദ്ധം = 23-ാം ജ്യാവ് = $ജ_{23}$.

മഖ$_2$ഘ$_2$, ഖര$_2$ഘ$_3$ ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

അപ്പോൾ കോടിഖണ്ഡം ലര$_2$ = ഘ$_1$ര$_1$ $= \dfrac{\text{ഘ}_2\text{ഖ}_2 \times \text{ഘ}_3\text{ല}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}} = \dfrac{ജ_2 \times ജ_1}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$

ഭുജാഖണ്ഡം = ഘ$_3$ര$_2$ = ലര$_1$ $= \dfrac{ജ_{23} \times ജ_1}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$

പിന്നെയും മഖ$_2$ഖ$_2$, മലച എന്നീ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\text{ലച} = \frac{\text{ഖ}_2\text{ഘ}_2 \times \text{മല}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}} = \frac{ജ_2 \times ജ_{23}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\text{മച} = \text{ലട} = \frac{\text{മഖ}_2 \times \text{മല}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}} = \frac{ജ_{22} \times ജ_{23}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

∴ ലച + ഘ$_3$ര$_2$ = ഘ$_3$ഖ$_3$ = തൃതീയജ്യാവ്

$$= \frac{ജ_3 \times ജ_{23} + ജ_{22} \times ജ_1}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ലച − ഘ$_3$ര$_2$ = ര$_1$ച = ആദ്യജ്യാവ്

$$= \frac{ജ_2 \times ജ_{23} - ജ_{22} \times ജ_1}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ലട − ലര$_2$ = ര$_2$ട = ഘ$_3$ട$_3$ = തൃതീയജ്യാകോടി

= 21-ാം ജ്യാവ്

$$= \frac{ജ_{22} \times ജ_{23} - ജ_2 \times ജ_1}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ലട + ഘ$_1$ര$_1$ = ഘ$_1$ട$_1$ = പ്രഥമജ്യാകോടി = 23-ാം ജ്യാവ്

$$= \frac{ജ_{22} \times ജ_{23} + ജ_2 \times ജ_1}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ഇവിടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത് ഒന്നും, രണ്ടും ചാപഖണ്ഡങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചാകുന്നു. സാമാന്യമായിട്ടുള്ള ക്രിയ മനസ്സിലാക്കുവാൻ ഒരുദാഹരണവും കൂടി കാണിക്കാം. 14-ാം ജ്യാവിന്റെയും ആറാം ജ്യാവിന്റെയും ചാപങ്ങളുടെ യോഗാന്തരങ്ങളുടെ ഭുജാകോടികളെ വരുത്തുന്നതിന്റെ യുക്തിയേയും കാണിക്കാം.

പരിലേഖം 40-ൽ ചാപം കിഖ$_{20}$ = ചാപയോഗം

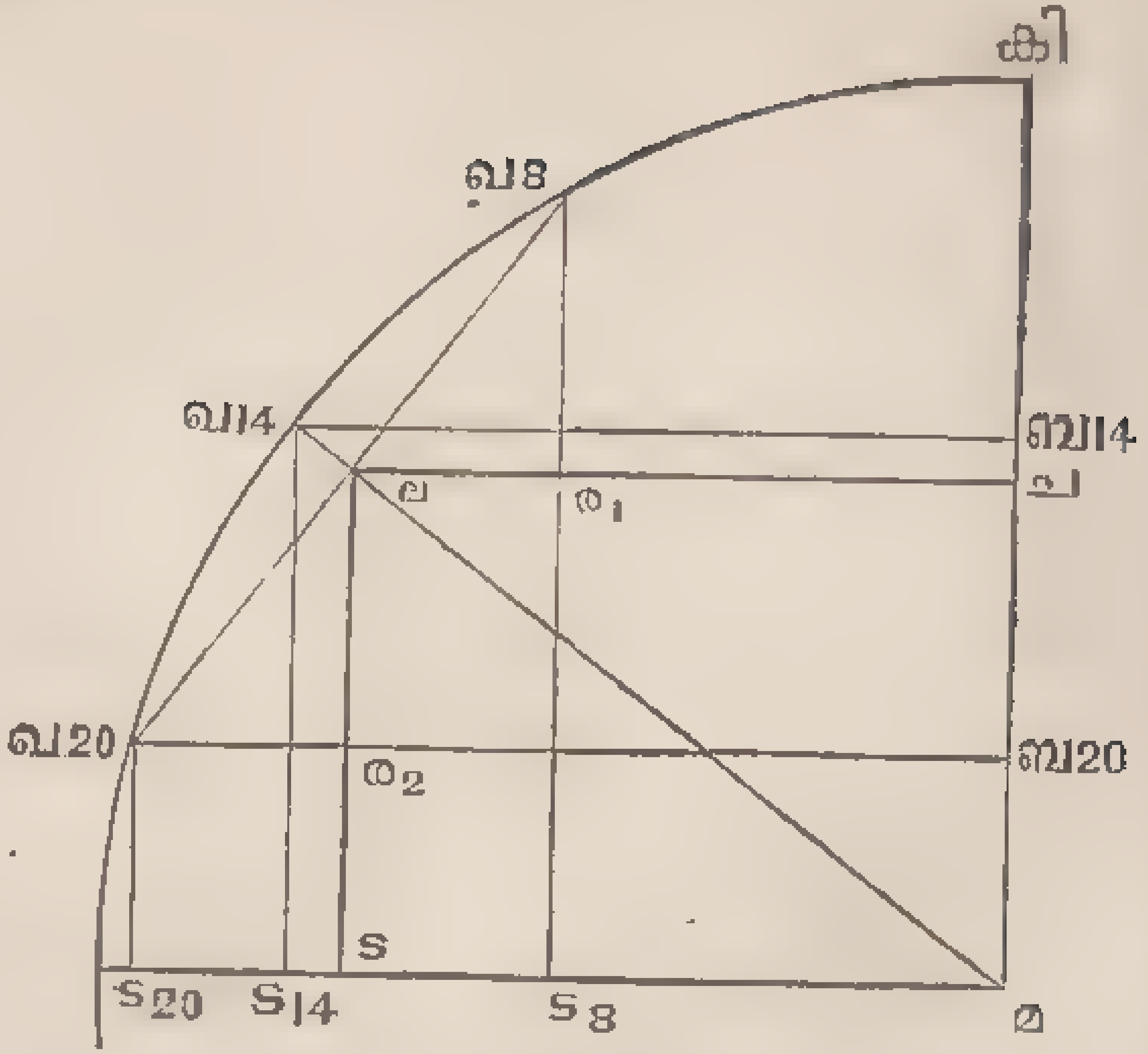
= 20 (= 14 + 6) ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗം

കിഖ$_8$ = ചാപാന്തരം = 8 (= 14 − 6) ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗം

സമസ്തജ്യാവ് ഖ$_8$ഖ$_{20}$ = 12 ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവ്. ഈ സമസ്തജ്യാവിന്റെ ചാപത്തിന്റെ മദ്ധ്യം ഖ$_{14}$ = പതിനാലാം ജ്യാവിന്റെ അഗ്രം. മഖ$_{14}$ എന്ന വ്യാസാർദ്ധം സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യമായിരിക്കുന്ന ല എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു.

അപ്പോൾ ഖ$_8$ല = ഖ$_{20}$ല = ആറു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ അർദ്ധജ്യാവ്.

അതുകൊണ്ട് ശരോനവ്യാസാർദ്ധമായിരിക്കുന്ന മല = പതിനെട്ടാം ജ്യാവ്.



പരിലേഖം 40.

മുമ്പിലെ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ

$$\text{ഖര}_2 = \text{ഖ}_8\text{ര}_1 = \frac{\text{ജ}_8 \times \text{ജ}_{14}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\text{ഖ}_{14}\text{ര}_1 = \text{ലര}_1 = \frac{\text{ജ}_6 \times \text{ജ}_{10}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\text{ചല} = \frac{\text{ജ}_{14} \times \text{ജ}_{18}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\text{ഖച} = \text{ലട} = \frac{\text{ജ}_{18} \times \text{ജ}_{10}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ചാപയോഗജ്യാവ് = 20-ാം ജ്യാവ്

$$= \text{ഖ}_{20}\text{ബ}_{20}$$

$$= \text{ഖ}_{20}\text{ര}_2 + \text{ര}_2\text{ബ}_{20}$$

$$= \text{ഖര}_1 + \text{ചല}$$

$$= \frac{\text{ജ}_{14} \times \text{ജ}_{18} + \text{ജ}_6 \times \text{ജ}_{10}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$= \frac{\text{പതിനാലാംജ്യാവ്} \times \text{ആറാംജ്യാവിന്റെകോടി} + \text{ആറാംജ്യാവ്} \times \text{14-ാംജ്യാവിന്റെകോടി}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ചാപഖണ്ഡാന്തരജ്യാവ് = 8-ാം ജ്യാവ്

$$= \text{ര}_1\text{ല}$$

$$= \text{ചല} - \text{ഖര}_1$$

$$=\frac{\text{ക}_{18}\text{ക}_{14}-\text{ക}_{6}\times\text{ക}_{10}}{\text{വ്യാസാൎദ്ധം}}$$

$$=\frac{\text{പതിനാലാംജ്യാവു്}\times\text{ആറാംജ്യാകോടി}-\text{ആറാംജ്യാവു്}\times 14\text{-ാംജ്യാകോടി}}{\text{വ്യാസാൎദ്ധം}}$$

$$\text{ചാപഖണ്ഡയോഗകോടിജ്യാവു്}=20\text{ജ്യാവിന്റെ കോടി}$$

$$=\text{മബ}_{20}=\text{മച}-\text{ചബ}_{20}$$

$$=\text{മല}-\text{ലര}_{2}$$

$$=\frac{\text{ക}_{18}\times\text{ക}_{10}-\text{ക}_{6}\times\text{ക}_{14}}{\text{വ്യാസാൎദ്ധം}}$$

$$=\frac{\text{പതിനാലാംജ്യാകോടി}\times 6\text{-ാംജ്യാകോടി}-14\text{-ാംജ്യാവു്}\times 6\text{-ാംജ്യാവു്}}{\text{വ്യാസാൎദ്ധം}}$$

$$\text{ചാപഖണ്ഡാന്തരകോടിജ്യാവു്}=8\text{-ാംജ്യാവിന്റെ കോടി}$$

$$=\text{ഖ}_{8}\text{ട}_{8}=\text{ഖ}_{1}\text{ട}_{8}+\text{ഖ}_{1}\text{ഖ}_{1}$$

$$=\text{ഖട}+\text{ലര}_{2}$$

$$=\frac{14\text{-ാംജ്യാകോടി}\times 6\text{-ാംജ്യാകോടി}+14\text{-ാംജ്യാവു്}\times 6\text{-ാംജ്യാവു്}}{\text{വ്യാസാൎദ്ധം}}\Big]$$

പ്രകാരാന്തരം

അനന്തരം ഈ ന്യായത്തിന്നുതന്നെ പ്രകാരഭേദം ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ തൃതീയചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കന്നു പൂൎവ്വസൂത്രത്തോളമുള്ളതു തൃതീയജ്യാവാകുന്നതു്. ഇതിങ്കൽ സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു് ഉണ്ടാകുന്ന കോടിഖണ്ഡം യാതൊരിടത്തു സ്പർശിക്കുന്നു തൃതീയജ്യാവിങ്കൽ, അവിടുന്നു് ഇരുപുറവുമോരോഖണ്ഡം. ഇതിൽ വടക്കെ ഖണ്ഡം ഭുജയായി കോടിഖണ്ഡം കോടിയായി സമസ്തജ്യാൎദ്ധം കൎണ്ണമായിട്ടിരിപ്പോരു ത്ര്യശ്രം. പിന്നെ തൃതീയജ്യാവിങ്കലെ തെക്കെ ഖണ്ഡത്തിന്നും ഇച്ചൊല്ലിയ കോടിഖണ്ഡം തന്നെ കോടിയാകുന്നതു്. ദ്വിതീയജ്യാവിനോടു തുല്യമായിരിക്കും കൎണ്ണം. ഇവിടയ്ക്കു സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു തൃതീയജ്യാവും പൂൎവ്വസൂത്രവും തങ്ങളിലുള്ള സംപാതത്തോളമുള്ളതു കൎണ്ണമാകുന്നതു്. ഇവിടെ ഇതു ദ്വിതീയജ്യാവിനോടു തുല്യമാകുന്നു. ഇവ്വണ്ണം ത്രിജ്യാപ്രമാണം, സമസ്തജ്യാൎദ്ധവും ഇതിന്റെ ശരോനവ്യാസാൎദ്ധമാകുന്ന കോടിയും രണ്ടു പ്രമാണഫലങ്ങൾ. ദ്വിതീയജ്യാവു് ഇച്ഛാ. സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നുള്ള കോടിഖണ്ഡവും ഇതിന്റെ സംപാതത്തിങ്കന്നു തൃതീയജ്യാവിന്റെ ദക്ഷിണഖണ്ഡവും ഇവ രണ്ടും ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ*. യാതൊരുപ്രകാരം ഭുജാകോടികളാ

* ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടും തുല്യാകാരങ്ങളാണെങ്കിലും മുമ്പിൽ തുല്യാകാരത്തിന്റെ ലക്ഷണങ്ങൾ പറഞ്ഞതിൽനിന്നും ഇതു വ്യക്തമാകുന്നില്ല. എന്നാൽ ഇവ തുല്യാകാരങ്ങളാണെന്നു് ഒരുപ്രകാരം വ്യാഖ്യാനത്തിൽ സ്ഥാപിക്കുന്നുണ്ടു്.

യിരിക്കുന്ന പ്രമാണഫലങ്ങൾക്കു കർണ്ണമായിരിക്കുന്ന പ്രമാണരാശി ഇവ്വണ്ണം ഭുജാകോടികളായിരിക്കുന്ന ഇച്ഛാഫലങ്ങൾക്കു കർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും ഇച്ഛാരാശി എന്നു നിയതം. ഇങ്ങനെ ദ്വിതീയജ്യാകർണ്ണമായി തൃതീയജ്യാവിന്റെ തെക്കെഖണ്ഡം ഭുജയായി ത്രൈരാശികം കൊണ്ടു വരുത്തിയ കോടിഖണ്ഡം കോടി. ഇങ്ങനെ ഒരു ത്ര്യശ്രം. സമസ്തജ്യാവിന്റെ വടക്കെ അർദ്ധം കർണ്ണം, തൃതീയജ്യാവിന്റെ വടക്കെ ഖണ്ഡം ഭുജ, കോടിഖണ്ഡംതന്നെ കോടിയാകുന്നതു്, ഇങ്ങനെ ഒരു ത്ര്യശ്രം. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ പ്രഥമജ്യാവും ദ്വിതീയജ്യാവും ഭുജകളായി തൃതീയജ്യാവു ഭൂമിയായി കോടിഖണ്ഡം ലംബമായി ഇരിപ്പോരു ത്ര്യശ്രമിതു്. എന്നാൽ ലംബവർഗ്ഗത്തെ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങൾ രണ്ടിങ്കന്നും കളഞ്ഞു മൂലിച്ചാൽ വെവ്വേറെ രണ്ടു് ആബാധകൾ ഉണ്ടാകും. ഇവററിന്റെ യോഗം ഭൂമിയാകുന്ന തൃതീയജ്യാവു്. ഇങ്ങനേയും പഠിതജ്യാക്കളേയും ഇഷ്ടജ്യാക്കളേയുമുണ്ടാക്കാം. ഇങ്ങനെ രണ്ടു് അർദ്ധജ്യാക്കളെ വെവ്വേറെ അറിഞ്ഞാൽ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടേയും ചാപയോഗത്തിന്റെ ജ്യാവു വരുത്തുവാനുള്ള ഉപായം ചൊല്ലീതായി.

[“യദ്വാ സചലംബകൃതിഃ ദ്വേപദീകൃതേ ദ്വേ” ഇതി മാധവഃ

ജ്യാക്കൾ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗങ്ങളിൽനിന്നു വെവ്വേറെ അവ രണ്ടിന്നും സാധാരണമായിരിക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു മൂലിച്ചവ രണ്ടിന്റേയും യോഗമോ അന്തരമോ ചാപയോഗത്തിന്റേയോ അന്തരത്തിന്റേയോ ജ്യാവായിട്ടു വരും. ലംബത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരം പിന്നെ. “ജ്യായോഃ പരസ്പരം ഘാതാൽ ത്രിജ്യാപ്തം ലംബ ഇഷ്യതേ.” അതായതു ജ്യാക്കൾ രണ്ടിനേയും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു ലംബമാകുന്നു.

ഇവിടേയും (പരിലേഖം 41), 14-ാംജ്യാവിന്റേയും 6-ാംജ്യാവിന്റേയും ചാപങ്ങളുടെ യോഗാന്തരങ്ങളുടെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളെ വരുത്തേണമെന്നു നിരൂപിക്കുക.

പരിലേഖം 41-ൽ കിഖ$_1$=ചാപാന്തരം(=8ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗചാപം)

കിഖ$_2$=ചാപയോഗം(=20ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗചാപം)

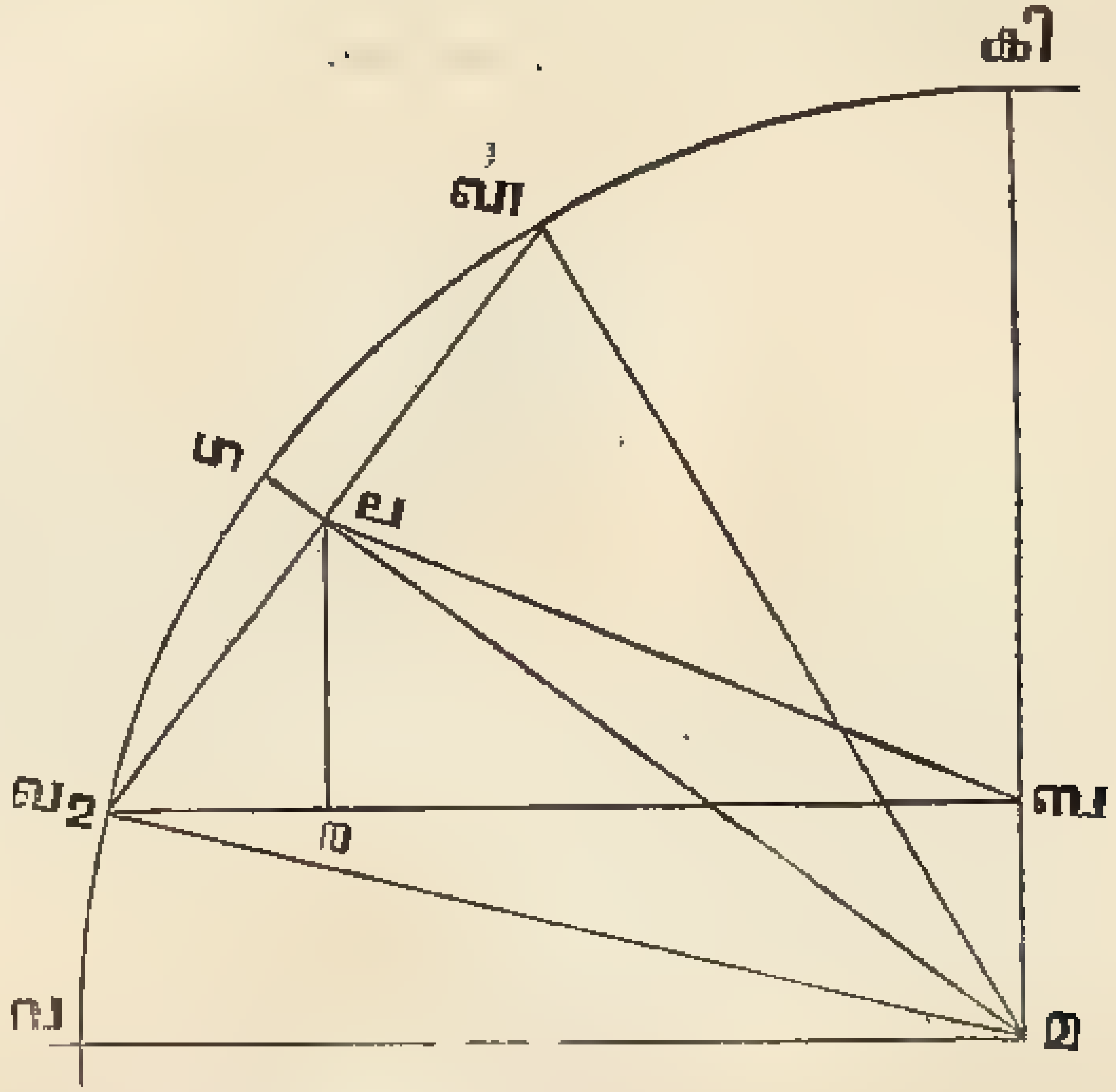
∴ ഖ$_1$ഗ=ഗഖ$_2$=ആറു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ കൂടിയതു്.

മഗ എന്ന വ്യാസാർദ്ധം ഖ$_1$ഖ$_2$ എന്ന സമസ്തജ്യാവിനെ അതിന്റെ മദ്ധ്യമായ ല എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു.

ഖ$_3$ബ=20-ാംജ്യാവു് (ജ$_{20}$)

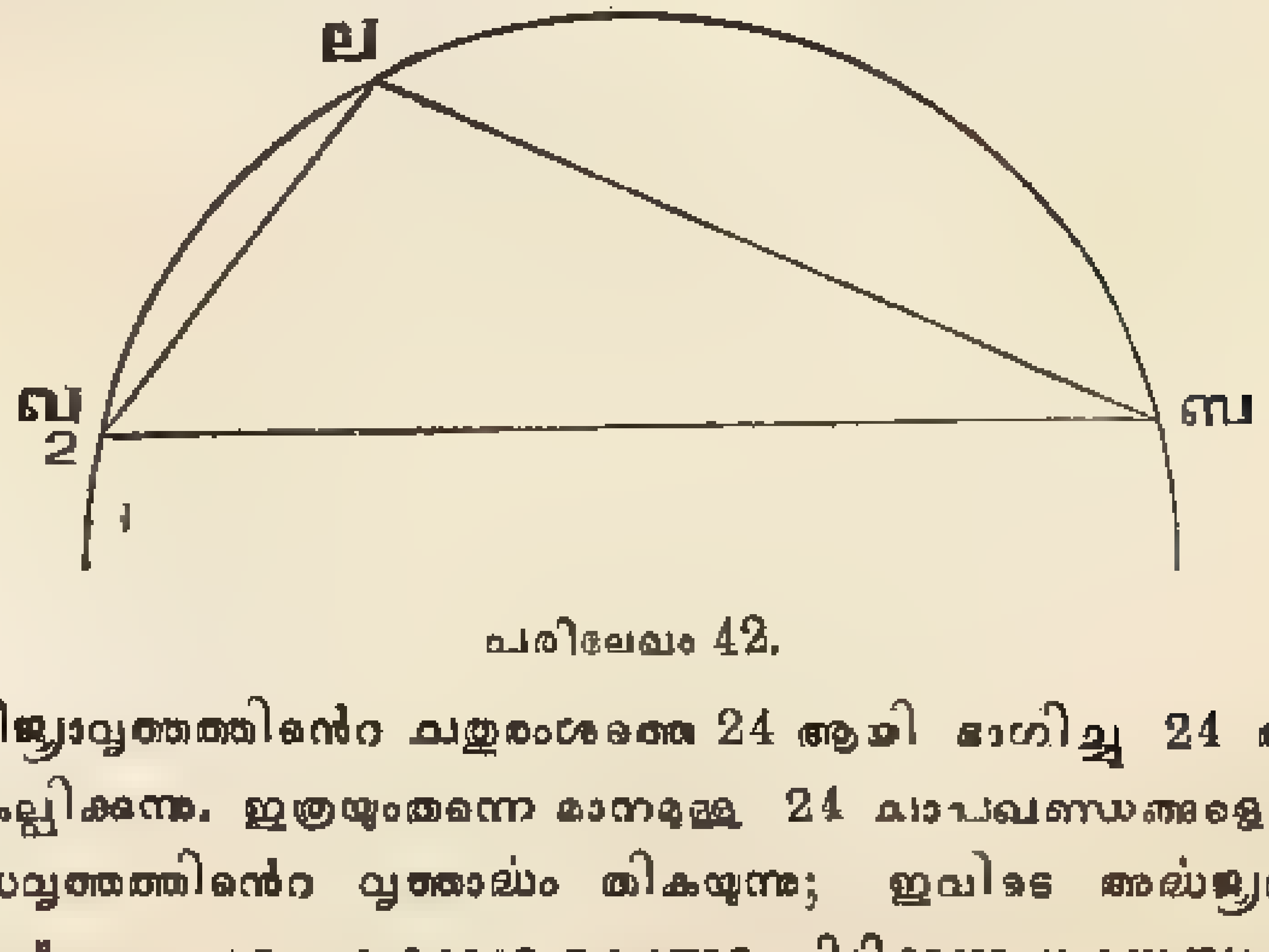
ഖ$_2$ല=6-ാംജ്യാവു് (ജ$_6$)

മല=ശരോനവ്യാസാർദ്ധം=18-ാംജ്യാവു് (ജ$_{18}$)



പരിലേഖം 41.

ഖ₂ലബ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ ഭൂമിയായ ഖ₂ബ, ബാഹുക്കളായ ഖ₂ല, ലബ ഇവ സമസ്തജ്യാക്കളായിട്ട് ഒരു വൃത്തം വരക്കാം. (പരിലേഖം 42).

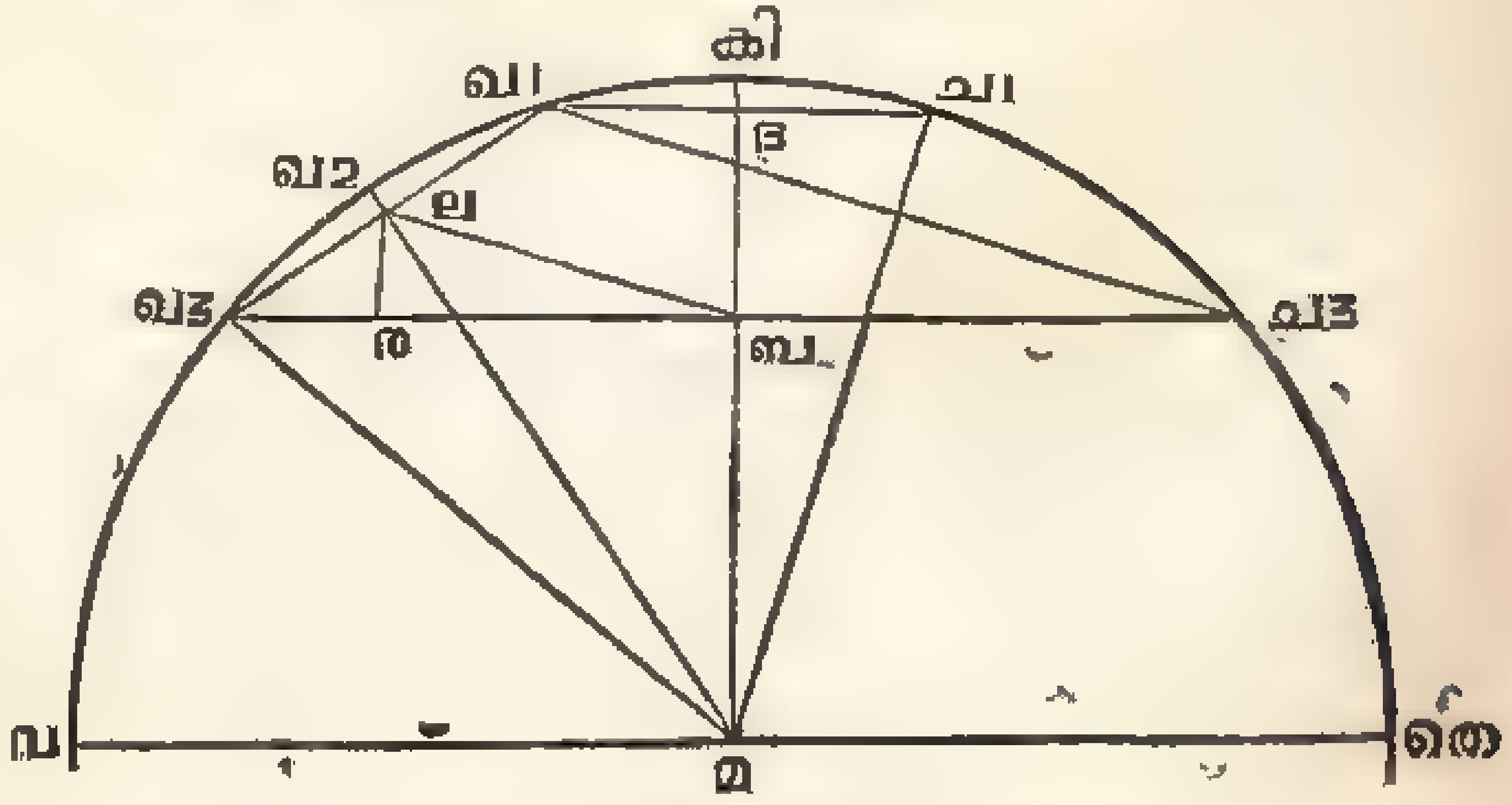


പരിലേഖം 42.

ത്രിജ്യാവൃത്തത്തിന്റെ ചതുരംശത്തെ 24 ആയി ഭാഗിച്ച 24 അർദ്ധജ്യാക്കളെ കല്പിക്കുന്നു. ഇത്രയുംതന്നെ മാനമുള്ള 24 ചാപഖണ്ഡങ്ങളെക്കൊണ്ടു ത്രിജ്യാർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വൃത്താർദ്ധം തികയുന്നു; ഇവിടെ അർദ്ധജ്യാക്കളുടെ സ്ഥാനത്തു് അവയുടെ മാനത്തോടു തുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന സമസ്തജ്യാക്കളേയും കല്പിക്കാം. ത്രിജ്യാർദ്ധവൃത്തത്തിങ്കൽ ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവു ത്രിജ്യാവൃത്തത്തിങ്കൽ ആദ്യത്തെ അർദ്ധജ്യാവു്. ത്രിജ്യാർദ്ധവൃത്തത്തിനാൽ രണ്ടു

ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാവു ത്രിജ്യാവൃത്തത്തിങ്കൽ രണ്ടാമദ്ധ്യാവാകുന്നു. ഇങ്ങനെ മേല്പോട്ടുമൂഹിച്ചുകൊള്ളണം. പരിലേഖം 42-ലെ വൃത്തം ത്രിജ്യാർദ്ധവൃത്തമെന്നു കല്പിക്കുന്നു. ഖ$_2$ബ 20-ാമത്തെ ജ്യാവാകയാൽ, ഖ$_2$ലബ എന്ന ചാപം 20 ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ കൂടിയതെന്നു വന്നു. അതുപോലെ ഖ$_2$ല ആറു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ കൂടിയതു്. അപ്പോൾ ലബ 14 ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗം. അപ്പോൾ ലബ ത്രിജ്യാർദ്ധവൃത്തത്തിൽ 14-ാം സമസ്തജ്യാവെന്നു വന്നു. അപ്പോൾ ത്രിജ്യാവൃത്തത്തിൽ അതു 14-ാം അർദ്ധജ്യാവെന്നും വന്നു. ഖ$_2$ബ, ഖ$_2$ല, ലബ അർദ്ധജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കുന്ന പരിലേഖം (41)ലെ വൃത്തം ത്രിജ്യാവൃത്തമാണല്ലോ. അപ്പോൾ അവിടെ ലബ എന്നതു 14-ാം അർദ്ധജ്യാവു്.

ഈ തത്വത്തെത്തന്നെ പ്രകാരാന്തരേണയും സാധിക്കാം



പരിലേഖം 43.

പരിലേഖം 43-ൽ കിഖ$_1$, ഖ$_1$ഖ$_2$, ഖ$_2$ഖ$_3$ ആദ്യത്തെ മൂന്നു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ.

ഖ$_1$ദ, ഖ$_3$ബ എന്നിവ കിഖ$_1$, കിഖ$_3$ എന്ന ചാപങ്ങളുടെ അർദ്ധജ്യാക്കൾ.

ഖ$_1$ഖ$_3$ എന്ന സമസ്തജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യം ല.

മ വൃത്തകേന്ദ്രം.

ഖ$_1$ദ, ഖ$_3$ബ എന്ന അർദ്ധജ്യാക്കൾ വൃത്തത്തെ ച$_1$, ച$_3$ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കത്തക്കവണ്ണം അവയെ നീട്ടികല്പിപ്പൂ.

കിച$_1$=ഒരു ചാപഖണ്ഡം=കിഖ$_1$.

കിച$_3$=മൂന്നു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗം=കിഖ$_3$.

ഖ$_1$ച$_3$=നാലു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ കൂടിയതു്.

ഇവിടെ ലബ രണ്ടു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാവാണെന്നും ത്ര്യശ്രങ്ങൾ ലരബ, മലഖ$_3$ രണ്ടും തുല്യാകാരങ്ങളെന്നും കാണിക്കുന്നു.

ഇവിടെ ഖ$_1$ച$_3$ഖ$_3$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ, ല, ബ എന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഖ$_3$ഖ$_1$, ഖ$_3$ച$_3$ എന്ന ഭുജകളുടെ മദ്ധ്യങ്ങളാകുന്നു.

∴ ഖ$_1$ഖ$_3$=2ഖ$_3$ല.

ഖ$_3$ച$_3$=2ഖ$_3$ബ.

ഖ$_3$ബല, ഖ$_3$ച$_3$ഖ$_1$ ഇവ തുല്യാകാരക്ഷേത്രങ്ങളാണെങ്കിൽ,

ഖ$_1$ഖ$_3$=2ഖ$_3$ല

ഖ$_3$ച$_3$=2ഖ$_3$ബ എന്നും വരുമല്ലോ.

വിപരീതന്യായംകൊണ്ട്,

ഖ$_1$ഖ$_3$=2ഖ$_3$ല

ഖ$_3$ച$_3$=2ഖ$_3$ബ

എന്നിപ്രകാരം ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, ത്ര്യശ്രങ്ങൾ ഖ$_3$ബല, ഖ$_3$ച$_3$ഖ$_1$ തുല്യാകാരങ്ങളാവുമെന്നും വരുമല്ലോ.

അപ്പോൾ ലബ, ഖ$_1$ച$_3$ തുല്യദിക്കുകളെന്നും ഖ$_1$ച$_3$=2ലബ എന്നും സിദ്ധമായി. ഖ$_1$ച$_3$ നാലു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാവാണല്ലോ. എന്നിട്ടു ലബ രണ്ടു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ അർദ്ധജ്യാവെന്നും വന്നു.

മലഖ$_3$, മരച$_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ,

മഖ$_3$=മച$_1$ (രണ്ടും വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ എന്നിട്ട്)

ലഖ$_3$=ച$_1$ര (ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാക്കൾ എന്നിട്ട്)

മല=മര (ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ശരോനവ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ എന്നിട്ട്)

അപ്പോൾ മലഖ$_3$, മരച$_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ സർവ്വപ്രകാരേണ തുല്യങ്ങൾ എന്നു വന്നു. ലരബ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ രബ=ഭുജ, രല=കോടി, ലബ=കർണ്ണം. മരച$_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ മര=ഭുജ, ച$_1$ര=കോടി, മച$_1$ കർണ്ണം. ഒന്നിങ്കലെ ഭുജാകോടി കർണ്ണങ്ങൾ മറ്റേതിങ്കലെ ഭുജാകോടി കർണ്ണങ്ങൾക്കു ക്രമേണ വിപരീതദിക്കുകളാകയാൽ, ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടും തുല്യാകാരങ്ങൾ. മഖ$_3$ല, മച$_1$ര എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ സർവ്വപ്രകാരേണ തുല്യങ്ങളായതുകൊണ്ടു, ലരബ, ലഖ$_3$മ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങളും തുല്യാകാരങ്ങൾതന്നെ.

പരിലേഖം 41-ൽ ലയിൽനിന്നും ഖ$_3$ബയിലേയ്ക്കു ലംബം ലര.

ഖ$_3$ലമ, ലരബ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ. ഖ$_3$ലമ പ്രമാണക്ഷേത്രം, ലരബ ഇച്ഛാക്ഷേത്രം.

പ്രമാണം—മഖ$_3$; ഇച്ഛാ—ബല.

പ്രമാണഫലങ്ങൾ—മല, ലഖ$_3$; ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ—ബര, ലര.

$$\therefore \text{ലര} = \frac{\text{ബല} \times \text{ലഖ}_3}{\text{മഖ}_3} = \frac{\text{ജ}_{14} \times \text{ജ}_0}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\text{ബര} = \frac{\text{ബല} \times \text{മല}}{\text{മഖ}_3} = \frac{\text{ജ}_{14} \times \text{ജ}_{13}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ബലര എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിലും കർണ്ണം=ബല; ഭുജ=ബര; കോടി=രല.

$$\therefore \text{ബര}^2 = \text{ബല}^2 - \text{രല}^2 = \text{ജ}_{14}{}^2 - \text{ലംബം}^2.$$

$$\text{ബര} = \sqrt{\text{ജ}_{14}{}^2 - \text{ലംബം}^2}$$

ഇതുപോലെതന്നെ രഖ$_3$^{2}=ലഖ$_3$^{2}−ലര^2=ജ$_0$^{2}−ലംബം^{2}

$$\therefore \text{ഖ}_2 = \sqrt{\text{ജ}_6^2 - \text{ലംബം}^2}$$

$$\therefore 20\text{-ാംജ്യാവ്} = \text{ഖ}_1 + \text{ഖ}_2$$

$$= \sqrt{\text{ജ}_{14}^2 - \text{ലംബം}^2} + \sqrt{\text{ജ}_6^2 - \text{ലംബം}^2}$$

$$\text{ലംബവർഗ്ഗം} = \frac{\text{ജ}_{14}^2 \times \text{ജ}_6^2}{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}$$

$$\therefore \text{ജ}_{14}^2 - \text{ലംബം}^2 = \text{ജ}_{14}^2 - \frac{\text{ജ}_{14}^2 \times \text{ജ}_6^2}{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{ജ}_6^2 - \text{ലംബം}^2 = \text{ജ}_6^2 - \frac{\text{ജ}_6^2 \times \text{ജ}_{14}^2}{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}$$

$$\therefore 20\text{-ാംജ്യാവ്} = \sqrt{\left(\text{ജ}_{14}^2 - \frac{\text{ജ}_{14}^2 \times \text{ജ}_6^2}{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}\right)} + \sqrt{\left(\text{ജ}_6^2 - \frac{\text{ജ}_6^2 \times \text{ജ}_{14}^2}{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}\right)}$$

$$= \frac{\text{ജ}_{14}\sqrt{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം} - \text{ജ}_6^2} + \text{ജ}_6\sqrt{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം} - \text{ജ}_{14}^2}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$= \frac{\text{ജ}_{14} \times \text{ജ}_{18} + \text{ജ}_6 \times \text{ജ}_{10}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$= \frac{14\text{-ാംജ്യ} \times 6\text{-ാംജ്യാകോടി} + 6\text{-ാംജ്യ} \times 14\text{-ാംജ്യാകോടി}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ഇതു ജീവേ പരസ്പരം ന്യായം തന്നെ.

ഈ ഫലംതന്നെ ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗന്യായംകൊണ്ടും വരുത്താം. ഈ ക്രിയ മേലിൽ പറയുന്നുണ്ട്.

<u>ഉദാഹരണം:—</u>

3375 ഇലി ചാപത്തിന്റെ ജ്യാവ് (15-ാംമഹാജ്യാവ്) = 2858′—23″
1575 ഇലി ചാപത്തിന്റെ ജ്യാവ് (7-ാം മഹാജ്യാവ്) = 1520′—29″

എന്നാൽ ഇവയുടെ യോഗമായ 4950′ ചാപത്തിന്റേയും അന്തരമായ 1800′ ചാപത്തിന്റേയും ജ്യാക്കളെ വരുത്തേണം. അതായതു 22-ാമത്തേയും 8-ാമത്തേയും മഹാജ്യാക്കൾ ഏവ?

15-ാംജ്യാവ് = 2858′ − 23″

15ാംജ്യാവിന്റെകോടി = 1909′ − 55″

7-ാംജ്യാവ് = 1520′ − 29″

7-ാംജ്യാവിന്റെകോടി = 3083′ − 13″

$$\text{അപ്പോൾ } 22\text{-ാംജ്യാവ്} = \frac{2858'-23'' \times 3083'-13'' + 1520'-29'' \times 1909'-55''}{3437'-45''}$$

$$= \frac{8813015-7-59+2903996-27-35}{3437'-45''} = \frac{11717011-35-34}{3437-45}$$

$$= 3408'-20''$$ (നീരദാനന്ദരാഗം)

$$8\text{-ാംജ്യാവ്} = \frac{(8813015-5-59)-(2903996-27-35)}{3437'-45''}$$

$$= \frac{5909018-40-24}{3437'-45''}$$

$$= 1718'-52''$$ (രാമോ ജയോത്സുകഃ)

ഇഷ്ടജ്യാവിനെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം:—

ഇഷ്ടചാപം = 1രാ – 9തി – 44ഇലി.

പഠിതജ്യാവുംചാപവുമായിട്ട് ശിഷ്ടചാപം = 134′

ശിഷ്ടചാപത്തെത്തന്നെ അതിന്റെ അർദ്ധജ്യാവെന്നു കല്പിക്ക.

$$\text{ശിഷ്ടചാപകോടി} = \sqrt{11818103-17956}$$

$$= 3435'-8''$$

$$10\text{-ാംജ്യാവ്} = 2092'-46'',\ \text{അതിന്റെ കോടി} = 2727'-21''$$

$$\text{അപ്പോൾ ഇഷ്ടജ്യാവ്} = \frac{2092'-46'' \times 3435'-8'' + 134' \times 2727'-21''}{3437'-45''}$$

$$= \frac{7554397-26-8}{3437'-45''}$$

$$= \underline{2197'-29''}$$

ലംബംകൊണ്ട് ചാപയോഗാന്തരജ്യാക്കളെ വരുത്തുംപ്രകാരം:—

15-ാംജ്യാവിൽനിന്നും 7-ാംജ്യാവിൽനിന്നും 22-ാംജ്യാവിനേയും 8-ാംജ്യാവിനേയും വരുത്തണം.

$$\text{ലംബം} = \frac{2858'-23'' \times 1520'-29''}{3437'-45''}$$

$$= \frac{4346124-13-7}{3437'-45}$$

$$= \underline{1264'-14''}$$

$$\text{ലംബവർഗ്ഗം} = 1598285-55-16$$

$$15\text{-ാംജ്യാവർഗ്ഗം} = 8170355-12-16$$

$$7\text{-ാംജ്യാവർഗ്ഗം} = 2311869-14-1$$

$$\sqrt{15\text{-ാംജ്യാവർഗ്ഗം} - \text{ലംബവർഗ്ഗം}} = \sqrt{8170355-12-16-1598285-55-16}$$

$$= \sqrt{6572069-17}$$

$$= 2563'-36''$$

$$\sqrt{7\text{-ാംജ്യാവർഗ്ഗം} - \text{ലംബവർഗ്ഗം}} = \sqrt{2311869-14-1-1598285-55-16}$$

$$= \sqrt{713583-18-45}$$

$$= 844'-44''$$

$$\text{അപ്പോൾ } 22\text{-ാംജ്യാവ്} = 2563'-36'' + 844'-44'' = \underline{3408'-20''}$$

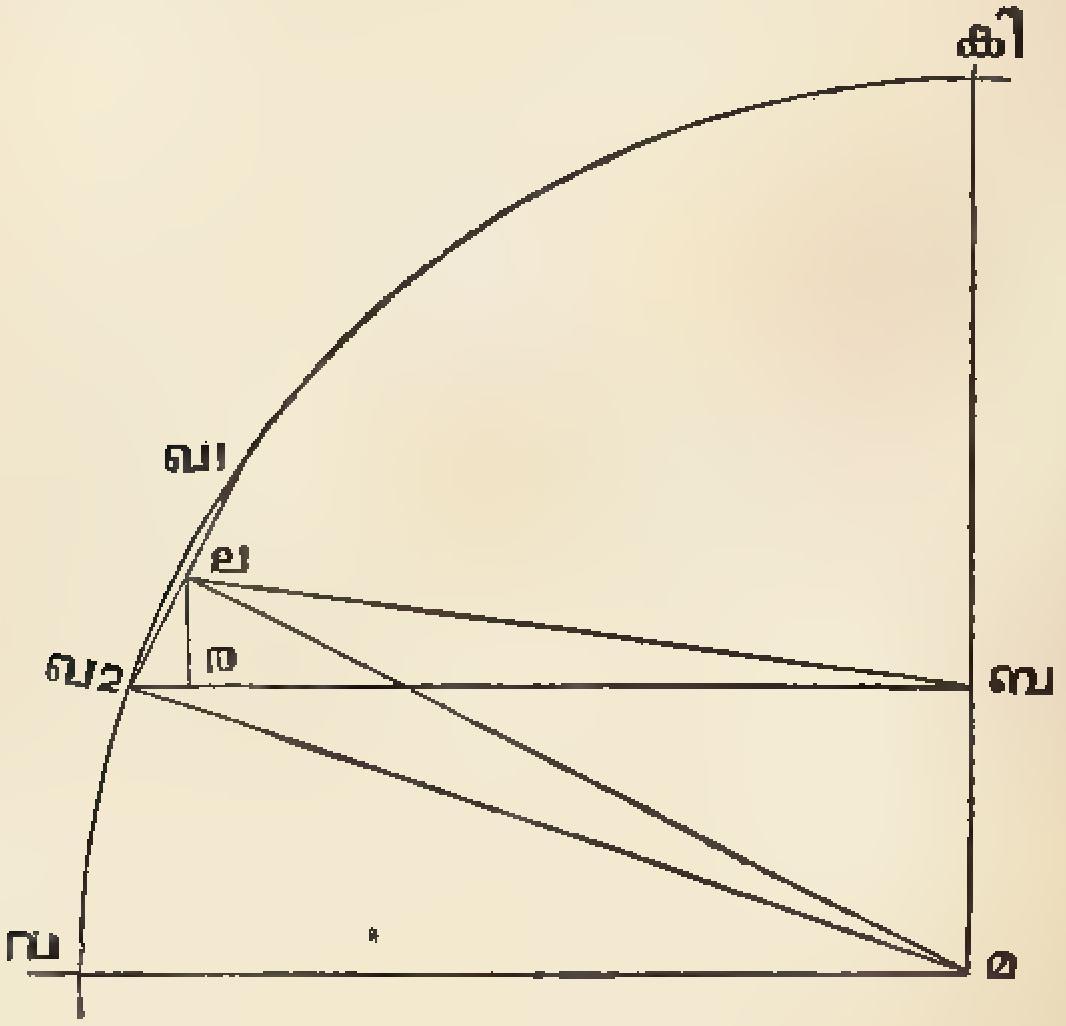
$$8\text{-ാംജ്യാവ്} = 2563'-36-844'-44'' = \underline{1718'-52''}.$$

ഈ ലംബാനയനന്യായംകൊണ്ടും "ജീവേ പരസ്പരം" ന്യായംകൊണ്ടും

"തത്തജ്ജ്യാവർഗ്ഗാദാദ്യജ്യാവർഗ്ഗഹീനം ഹരേൽ പുനഃ ।
ആസന്നാധസ്ഥശിഞ്ജിന്യാ ലബ്ധസ്സ്യാദുത്തരോത്തരാഃ" ॥

(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

എന്ന ജ്യാനയനത്തിന്റെ യുക്തിയെ കാണിക്കാം. രണ്ടാംജ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നാദ്യജ്യാവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞ് ആദ്യജ്യാവുകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം മൂന്നാം ജ്യാവായിട്ടു വരും. മൂന്നാംജ്യാവിന്റെ വർഗ്ഗത്തിൽനിന്നാദ്യജ്യാവിന്റെ വർഗ്ഗത്തെകളഞ്ഞു രണ്ടാംജ്യാവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം നാലാംജ്യാവായിട്ടു വരും. ഇങ്ങനെ അതാതു ജ്യാവർഗ്ഗത്തിൽനിന്ന് ആദ്യജ്യാവർഗ്ഗത്തെകളഞ്ഞ് അടുത്തു കീഴെ ജ്യാവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം മേലെ മേലെ ജ്യാവായിട്ടു വരും*.



പരിലേഖം 44

---

* $\sin(A+B)\sin(A-B)$

$$=\sin^2 A-\sin^2 B$$

$$\therefore \sin(A+B)=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin(A-B)}$$

i.e $J_{n+1}=\dfrac{J_n^2-J_1^2}{J_{n-1}}$, when $J_1, J_2, J_3 \ldots \ldots$ are the successive Bhujas.

പരിലേഖം 44-ൽ $\text{ഖ}_2\text{ബ}$=20-ാംജ്യാവു്. $\text{ഖ}_2\text{ഖ}$ ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ജ്യാവു്. ഖബ 19-ാമത്തെ ജ്യാവാണെന്നു വരും. എന്നാൽ

$$\text{ജ}_{19}^2=\text{ബല}^2=\text{ബര}^2+\text{രല}^2$$

$$\text{ജ}_1^2=\text{ലഖ}_2=\text{രഖ}_2^2+\text{രല}^2$$

$$\text{ജ}_{19}^2-\text{ജ}_1^2=\text{ബര}^2-\text{രഖ}_2^2$$

$$=(\text{ബര}+\text{രഖ}_2)\,(\text{ബര}-\text{രഖ}_2)$$

$$=\text{ജ}_{20}\left\{\sqrt{\text{ജ}_{19}^2-\frac{\text{ജ}_{19}^2\times\text{ജ}_1^2}{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}}-\sqrt{\text{ജ}_1^2-\frac{\text{ജ}_{19}^2\times\text{ജ}_1^2}{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}}\right\}$$

$$=\frac{\text{ജ}_{20}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}\left\{\text{ജ}_{19}\sqrt{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}-\text{ജ}_1^2}-\text{ജ}_1\sqrt{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}-\text{ജ}_{19}^2}\right\}$$

$$=\frac{\text{ജ}_{20}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}\,(\text{ജ}_{19}\times\text{ജ}_{23}-\text{ജ}_1\times\text{ജ}_5)$$

$$=\text{ജ}_{20}\times\text{ജ}_{18}\ (\text{ജീവേ പരസ്പരം ന്യായേന})$$

$$\therefore\ \text{ജ}_{20}=\frac{\text{ജ}_{19}^2-\text{ജ}_1^2}{\text{ജ}_{18}}$$

ജീവേ പരസ്പരന്യായം ചാപീകരണത്തിന്നുമുപയോഗിക്കാം. ഇഷ്ടജ്യാവിനേയും അടുത്ത ചാപസന്ധിയിലെ പഠിതജ്യാവിനേയും പരസ്പരമിതരകോടികളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചുള്ള ഫലങ്ങളുടെ അന്തരം ഊനാധികധനുസ്സിന്റെ ജ്യാവായിട്ടു വരും. മേലിൽ പറയുവാൻപോകുന്ന അല്പജ്യാചാപീകരണോപായങ്ങളിലൊന്നുകൊണ്ടു് ഈ ഊനാധികധനുർജ്ജ്യാവിനെ ചാപിക്ക. ഇതിനെ കീഴെ ചാപസന്ധിധനുസ്സിൽ കൂട്ടൂ, മേലെ ചാപസന്ധിധനുസ്സാണെങ്കിൽ അതിങ്കൽനിന്നു കളയൂ. എന്നാൽ ഇഷ്ടജ്യാവിന്റെ ചാപം വരും. തന്ത്രസംഗ്രഹത്തിൽ ഈ ക്രിയ ഇങ്ങനെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു.

"അന്യോന്യകോടിഘാതയോരിഷ്ടാസന്നമൌർജ്യയോഃ |
ത്രിജ്യാപ്തവർഗ്ഗേ തൽബാണവർഗ്ഗം സത്ര്യംശകം ക്ഷിപേൽ ॥
തന്മൂലമത ഊർദ്ധ്വസ്ഥചാപസന്ധേർന്നയേൽ |
തദ്യുക്തോനം സ്വാധ ഊർദ്ധ്വചാപസന്ധിധനുർദ്ധനുഃ ॥
മൌർജ്യാകൃതേഃ കോടികർണ്ണയോഗാപ്തസ്സ്വശരോ ഭവേൽ |
കൃത്സ്നജ്യാവർഗ്ഗതൽകൃത്സ്നവ്യാസാപ്തോ വാ ശരോ ഭവേൽ" ॥

ഊനാധികധനുസ്സിന്റെ ജ്യാവിനെ വർഗ്ഗിച്ചതിൽ അതിന്റെ ബാണവർഗ്ഗത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചു മൂന്നിൽ ഹരിച്ചഫലത്തെ കൂട്ടി മൂലിച്ചാൽ ചാപം വരും. ജ്യാവർഗ്ഗത്തെ കോടികർണ്ണയോഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അതിന്റെ ബാണം വരും. ജ്യാവു വളരെ ചെറുതാണെങ്കിൽ കോടിയും കർണ്ണവും തമ്മിൽ വ്യത്യാസമില്ലെന്നു കല്പിക്കാം, ബാണം വളരെ ചെറുതാകയാൽ. എന്നാൽ ജ്യാവർഗ്ഗത്തെ വ്യാസം മുഴുവനുംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും ബാണം വരും. ചാപം

ചെറുതാണെങ്കിൽ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗത്തെതന്നെ വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും ബാണം വരും.

$$\text{ഇഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗം} = \text{ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം} - \frac{\text{ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം}}{(2^2 - \frac{2}{2}) \times \text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}} \times \text{ചാപവർഗ്ഗം}$$

$$= \text{ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം} - \frac{\text{ഇഷ്ടചാപചതുർഘാതം}}{3 \times \text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{ശരവർഗ്ഗം} = \left(\frac{\text{ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം}}{2\text{വ്യാസാർദ്ധം}}\right)^2 = \frac{\text{ഇഷ്ടചാപചതുർഘാതം}}{4\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}$$

$$\therefore \text{ഇഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗം} = \text{ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം} - \tfrac{4}{3} \times \text{ശരവർഗ്ഗം}$$

$$\therefore \text{ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം} = \text{ഇഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗം} + \tfrac{4}{3}\text{ശരവർഗ്ഗം}$$

$$\text{പിന്നെ ജ്യാവർഗ്ഗം} = \text{വലിയശരം} \times \text{ചെറിയശരം}$$

$$\text{വലിയശരം} = \text{വ്യാസം} - \text{ചെറിയശരം}$$

$$= \text{വ്യാസാർദ്ധം} + (\text{വ്യാസാർദ്ധം} - \text{ചെറിയശരം})$$

$$= \text{വ്യാസാർദ്ധം} + \text{കോടി}$$

$$\therefore \text{ചെറിയശരം} = \frac{\text{ജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{തൽകോടി} + \text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ജ്യാവു ചെറുതാണെങ്കിൽ, ശരവും വളരെ ചെറുതായിരിക്കും. അപ്പോൾ കോടികർണ്ണങ്ങൾ പ്രായേണ തുല്യങ്ങളെന്നു കല്പിക്കാം.

$$\text{അപ്പോൾ ശരം} = \frac{\text{ജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{വ്യാസം}}$$

ജ്യാവു ചെറുതാണെങ്കിൽ സമസ്തജ്യാവിനെതന്നെ ജ്യാവെന്നു കല്പിക്കാം.

$$\text{അപ്പോൾ ശരം} = \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{വ്യാസം}}$$

<u>പ്രകാരാന്തരേണ അല്പജ്യാചാപീകരണോപായം:—</u>

"ശിഷ്ടചാപഘനഷഷ്ഠഭാഗതോ വിസ്തരാർദ്ധകൃതിഭക്തവർജ്ജിതഃ।
ശിഷ്ടചാപമിഹ ശിഞ്ജിനീ ഭവേൽ സ്പഷ്ടതാം ഭവതി ചാല്പതാവശാൽ ॥

(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഇങ്ങനെ ശിഷ്ടചാപജ്യാവിനെ വരുത്താം. ഇതിന്റെ വിപരീതക്രിയകൊണ്ടു ചെറിയ ജ്യാക്കളുടെ ചാപീകരണം സാധിക്കാമെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.

$$\text{ഇഷ്ടജ്യാവ്} = \text{ഇഷ്ടചാപം} - \frac{\text{ചാപഘനം}}{6 \times \text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}$$

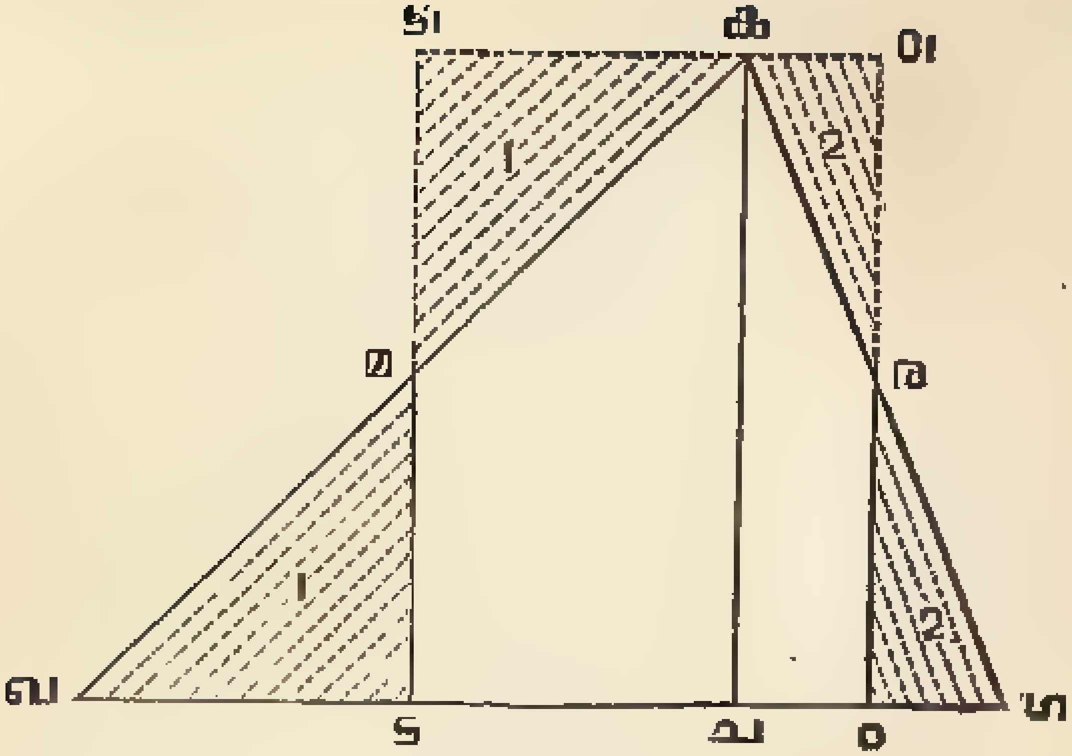
$$\text{ഇഷ്ടചാപം} = \text{ഇഷ്ടജ്യാവ്} + \frac{\text{ഇഷ്ടജ്യാഘനം}}{6 \times \text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}} \Big]$$

വ്യാസാർദ്ധംകൂടാതെ ജ്യാക്കളെവരുത്തുംപ്രകാരം.

ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രന്യായം: അനന്തരം വ്യാസാർദ്ധംകൂടാതെ ജ്യാക്കളെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. ത്രിഭുജക്ഷേത്രന്യായത്തെക്കൊണ്ടു സിദ്ധിക്കേണം. എന്നിട്ട് അതിനെ നടേ ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ വിഷമത്ര്യശ്രത്തിങ്കൽ * മൂന്നിലുംവെച്ചു വലിയ ഭുജയെ പടിഞ്ഞാറെ തെക്കുവടക്കു നീളമായിട്ടു കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്നു ഭൂമി എന്നു പേർ. പിന്നെ മറ്റെ ഭുജകൾ രണ്ടിനേയും ഭൂമ്യഗ്രങ്ങൾ രണ്ടിങ്കന്നു തുടങ്ങി കിഴക്കു തങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. ഇവററിന്നു ഭുജകൾ എന്നു പേർ. പിന്നെ ഈ ഭുജകൾ തങ്ങളിൽ കൂടുന്നേടത്തുനിന്നു ഭൂമിക്കു വിപരീതമായി ഭൂമിയോളം ഒരു സൂത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്നു ലംബമെന്നു പേർ. ലംബസംപാതത്തിങ്കന്നു ഇരുപുറവുമുള്ള ഭൂഖണ്ഡങ്ങൾക്ക് ആബാധകൾ എന്നു പേർ. ഭുജാകോടികളായിരിക്കുന്ന ആബാധാലംബങ്ങൾക്കു കർണ്ണമായിട്ടിരിപ്പോ ചിലവ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ. ഇവിടെ വലിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ചെറിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞാൽ ചെറിയ ആബാധാവർഗ്ഗത്തേക്കാൾ എത്ര വലുതു വലിയ ആബാധാവർഗ്ഗം, അതു് ഇവിടെ ശേഷിപ്പതു്, ലംബവർഗ്ഗം രണ്ടു കർണ്ണവർഗ്ഗത്തിങ്കലും തുല്യമല്ലൊ എന്നിട്ടു്. ആകയാൽ ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരവും ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നെ ആയിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ ഭുജായോഗത്തെ ഭുജാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരം, അതുതന്നെ ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരവുമാകയാൽ ആബാധായോഗരൂപമായിരിക്കുന്ന ഭൂമിയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം ആബാധാന്തരം. ഇതിനെ ഭൂമിയിൽ കൂട്ടുകയും കളകയും ചെയ്തിട്ടു് അർദ്ധിച്ചാൽ ആബാധകളുണ്ടാകും. പിന്നെ അതതു് ആബാധാവർഗ്ഗത്തെ അതതു ഭുജാവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു മൂലിച്ചാൽ ലംബമുണ്ടാകും. ലംബത്തെ ഭൂമ്യർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാകും. ഇവിടെ രണ്ടു ഭുജാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നും അതതു് ആബാധാമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന സൂത്രമാർഗ്ഗേണ പൊളിച്ചു ത്ര്യശ്രഖണ്ഡങ്ങൾ രണ്ടിനേയും ലംബാഗ്രത്തിങ്കൽ ഭൂമ്യഗ്രമാകുന്ന പ്രദേശവും കർണ്ണരേഖാമാർഗ്ഗത്തിങ്കൽ കർണ്ണരേഖയും സ്പർശിക്കുമാറു വെപ്പൂ. അപ്പോൾ ഭൂമ്യർദ്ധതുല്യമായിട്ടു രണ്ടു ഭുജകൾ, പിന്നെ ലംബതുല്യങ്ങളായിട്ടു രണ്ടു ഭുജകൾ ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പോരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ആകയാൽ ഭൂമ്യർദ്ധലംബങ്ങളുടെ ഘാതം ക്ഷേത്രഫലം ആയിട്ടിരിക്കും. ഇതു ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രന്യായമാകുന്നതു്.

---

* അന്യോന്യം തുല്യങ്ങളല്ലാത്ത ഭുജകളോടുകൂടിയ ത്ര്യശ്രം വിഷമത്ര്യശ്രം.



പരിലേഖം 45

[പരിലേഖം 45-ൽ കഖഗ എന്നൊരു വിഷമത്ര്യശ്രം. ഖഗ ഇതിന്റെ ഭൂമി. കഖ, കഗ ഇതിന്റെ ബാഹുക്കൾ. മ, ര ബാഹുക്കളുടെ മദ്ധ്യങ്ങൾ. മട, രഠ ഇവ മ യിൽനിന്നും ര യിൽനിന്നും ഭൂമിയിലേക്കു ക്രമേണയുള്ള ലംബങ്ങൾ. ഇവ ഭൂമിയെ ട, ഠ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഖച, ചഗ എന്ന ആബാധകളുടെ മദ്ധ്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും.

$$\text{ചട} = \text{ടഖ} = \tfrac{1}{2}\text{ചഖ}.$$

$$\text{ചഠ} = \text{ഠഗ} = \tfrac{1}{2}\text{ചഗ}.$$

$$\therefore \text{ചട} + \text{ചഠ} = \text{ടഠ} = \tfrac{1}{2}\text{ഖഗ} = \text{ഭൂമ്യർദ്ധം}.$$

ഭുജാകോടിവർഗ്ഗയോഗം കർണ്ണവർഗ്ഗം എന്ന ന്യായംകൊണ്ട്,

$$\text{കഖ}^2 = \text{ചഖ}^2 + \text{കച}^2$$

$$\text{കഗ}^2 = \text{ചഗ}^2 + \text{കച}^2$$

$$\therefore \text{കഖ}^2 - \text{കഗ}^2 = \text{ചഖ}^2 - \text{ചഗ}^2$$

$$(\text{കഖ} + \text{കഗ})\ (\text{കഖ} - \text{കഗ}) = (\text{ചഖ} + \text{ചഗ})\ (\text{ചഖ} - \text{ചഗ})$$

$$= \text{ഭൂമി} \times \text{ആബാധാന്തരം}$$

$$\therefore \text{ആബാധാന്തരം} = \frac{\text{കഖ}^2 - \text{കഗ}^2}{\text{ഭൂമി}}$$

$$\text{ആബാധായോഗം} = \text{ചഖ} + \text{ചഗ} = \text{ഖഗ} = \text{ഭൂമി}.$$

$$2\text{ചഖ} = \text{ഭൂമി} + \frac{\text{കഖ}^2 - \text{കഗ}^2}{\text{ഭൂമി}}$$

$$\text{ചഖ} = \tfrac{1}{2}\left\{\text{ഭൂമി} + \frac{\text{കഖ}^2 - \text{കഗ}^2}{\text{ഭൂമി}}\right\}$$

$$\text{ചഗ} = \tfrac{1}{2}\left\{\text{ഭൂമി} - \frac{\text{കഖ}^2 - \text{കഗ}^2}{\text{ഭൂമി}}\right\}$$

ബാഹുക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരത്തെ ഭൂമികൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടിയ ഫലത്തെ ഭൂമിയിൽ കൂട്ടി അർദ്ധിച്ചാൽ വലിയ ആബാധ വരും; ഭൂമിയിൽനിന്നു കളഞ്ഞർദ്ധിച്ചാൽ ചെറിയ ആബാധ വരും.

$$\text{ലംബം} = \sqrt{\text{കഖ}^2 - \text{ചഖ}^2} = \sqrt{\text{കഗ}^2 - \text{ചഗ}^2}$$

ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം:—പരിലേഖം 45-ൽ മഖട എന്ന ത്ര്യശ്രത്തെ മറിച്ചെടുത്തു്, ഖ എന്നതു ക_1 യിലും, ട എന്നതു് ട_1 യിലും, മഖ എന്ന രേഖയെ മക എന്ന മാർഗ്ഗേണയും പരിലേഖത്തിൽ കാണിച്ചപോലെ യോജിപ്പിക്ക. അതുപോലെതന്നെ മഗഠ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തെയും $\text{മ ഠ}_1\text{ക}$ എന്ന സ്ഥാനത്തും വെക്ക. അപ്പോൾ $\text{ട ഠ ഠ}_1\text{ ട}_1$ എന്നൊരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും.

ഈ ചതുരശ്രത്തിൽ, $\text{ടഠ} = \text{ട}_1\text{ഠ}_1 = \text{ഭൂമ്യർദ്ധം}$

$$\text{ടട}_1 = \text{ഠഠ}_1 = \text{ലംബം}$$

$$\therefore \text{ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലം} = \text{ഈ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം}$$

$$= \text{ഭൂമ്യർദ്ധം} \times \text{ലംബം}.\ ]$$

ചതുരശ്രക്ഷേത്രന്യായം: അനന്തരം ഇതിനെക്കൊണ്ടു ചതുരശ്രക്ഷേത്രന്യായത്തെ അറിയുംപ്രകാരം ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ നടേ ഒരു വൃത്തത്തെ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ വൃത്താന്തർഭാഗത്തിങ്കൽ ഒരു ചതുരശ്രത്തെ കോണു നാലും വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. ഇച്ചതുരശ്രത്തിന്റെ ഭുജകൾ നാലും അന്യോന്യതുല്യങ്ങളല്ലാതെയും ഇരിപ്പൂ. പിന്നെ ഈ ചതുരശ്രബാഹുക്കളുടെ പരിമാണത്തെക്കൊണ്ടു് ഇതിങ്കലെ കർണ്ണങ്ങളെയുമറിയേണം. ഇതിന്റെ പ്രകാരം. ഇവിടെ വ്യവഹാരാർത്ഥമായിട്ടു ഭുജകൾക്കു് ഒരു നിയമത്തെ കല്പിച്ചുകൊള്ളൂ. ഈ ഭുജകളിൽ എല്ലായിലും വലുതു പടിഞ്ഞാറേതു്. അതിനു ഭൂമി എന്നു പേർ. പിന്നെ തെക്കേതു്, പിന്നെ വടക്കേതു്. ഇവ രണ്ടിന്നും ഭുജകൾ എന്നു പേർ. പിന്നെ എല്ലായിലും ചെറിയതു കിഴക്കേതു്. ഇതിന്നു മുഖമെന്നു പേർ. എന്നിങ്ങനെ കല്പിപ്പൂ. ഇബ്ബാഹുക്കൾ രണ്ടു് അഗ്രവും വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കയാൽ സമസ്തജ്യാക്കളായിട്ടിരിന്നൊ ചിലവ. ഈ നാലു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടും വൃത്തം മുഴുവൻ തികഞ്ഞിരിക്കും, ജ്യാഗ്രങ്ങൾ തങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കയാൽ. ഇവിടെ അടുത്ത ജ്യാക്കൾ ഈ രണ്ടിന്റെ ചാപയോഗങ്ങളാകുന്നവ യാവചിലവ, ഇവററിന്റെ ജ്യാക്കൾ ചതുരശ്രത്തിങ്കലെ കർണ്ണങ്ങളാകുന്നവ. ഇക്കർണ്ണങ്ങളിലൊന്നിനെക്കൊണ്ടു ചതുരശ്രത്തെ രണ്ടായി പകുത്താൽ ഇക്കർണ്ണത്തിന്റെ രണ്ടു പാർശ്വത്തിങ്കലും ഓരോ ത്ര്യശ്രങ്ങളുണ്ടാകും. രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കും സാധാരണമായിട്ടിരിപ്പോരു ഭൂമി ആയിട്ടിരിപ്പോന്നു് ഇക്കർണ്ണം. ഭുജ

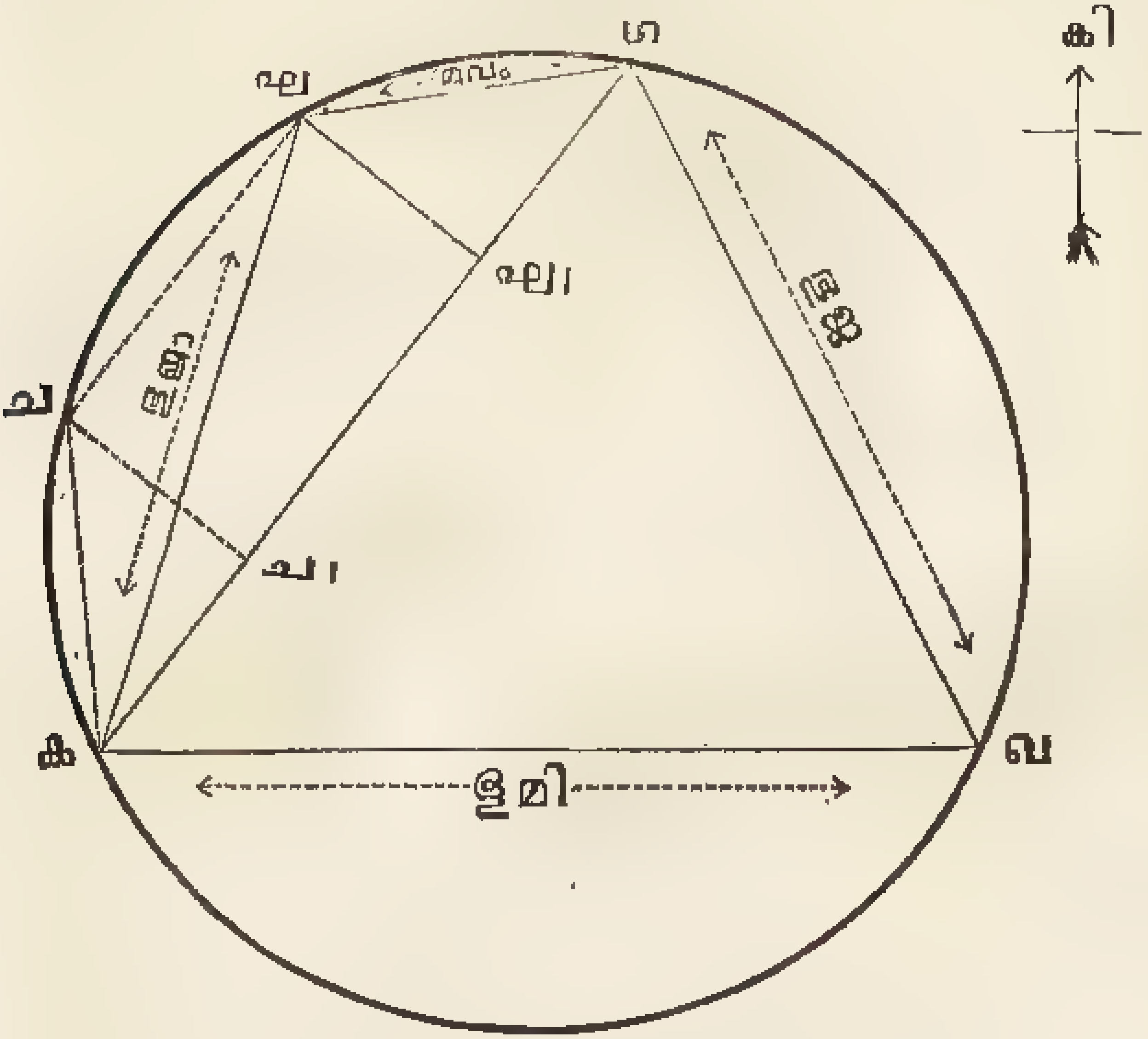
കൾ ഈരണ്ടും ഭുജകളായിട്ടിരിപ്പോന്ന്. പിന്നെ ഈവണ്ണംതന്നെ മററ കർണ്ണത്തെക്കൊണ്ടും താൻ ഭൂമിയായിട്ടു രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾ ഉളവാകും. പിന്നെ ഇക്കർണ്ണങ്ങളിലിഷ്ടം ആകുന്നതിന്റെ ഒരു പാൎശ്വത്തിങ്കലെ ഭുജകൾ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തെ തങ്ങളിലെ അന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ അതു് ആബാധായോഗത്തിന്റേയും ആബാധാന്തരത്തിന്റേയും ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ആബാധായോഗമാകുന്നതു പിന്നെ ഈ രണ്ടു ഭുജകളുടേയും യോഗചാപത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇവററിന്റെ തന്നെ അന്തരചാപത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവായിട്ടിരിക്കും ആബാധാന്തരം. പിന്നെ ഈ ആബാധായോഗമാകുന്ന ഇഷ്ടകർണ്ണത്തെ ഭൂമിയായി കല്പിച്ചു് ആബാധാന്തരത്തെ മുഖമായിട്ടും ചെറിയ ഭുജയോടു തുല്യമായിട്ടു വലിയ ഭുജയേയും കല്പിച്ചാൽ ഈ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരു പാൎശ്വത്തിങ്കൽ സമലംബമായിരിപ്പോരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ഇവിടെ ലംബാഗ്രാന്തരം ആബാധാന്തരമാകുന്നതു്. എന്നാൽ ചാപാന്തരസമസ്തജ്യാവു് ആബാധാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. ചതുരശ്രത്തിങ്കൽ പാൎശ്വഭുജകൾ സമങ്ങൾ എങ്കിൽ ലംബങ്ങളും സമങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇവററിന്റെ ആബാധകളും സമങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ഭൂമിയിങ്കലെ ലംബമൂലാന്തരം ആബാധാന്തരമാകുന്നതു്. ലംബാഗ്രാന്തരവും ഇതുതന്നെ ആകയാൽ ചാപാന്തരസമസ്തജ്യാവു് ആബാധാന്തരമാകുന്നതു്. ചാപയോഗസമസ്തജ്യാവു് ഭൂമി ആകുന്നതു്. ഇതുതന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണമാകുന്നതും. ആകയാൽ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരു പുറത്തെ ഭുജകൾ രണ്ടിന്റേയും വൎഗ്ഗാന്തരം ഈ ജ്യാക്കളുടെ യോഗചാപജ്യാവും അന്തരചാപജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ഇവ്വണ്ണമിരിക്കയാലെ യോഗാന്തരചാപജ്യാക്കളുടെ ഘാതം* യാതൊന്നു് ഇതു യോഗാന്തരചാപാൎദ്ധജ്യാക്കളുടെ വൎഗ്ഗാന്തരവുമായിട്ടിരിക്കും. എന്നാലിതു വന്നുകൂടിയ ന്യായമാകുന്നതു്. യാവ ചിലവ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടേയും ഘാതം യാതൊന്നു് അതു് അച്ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും യോഗാന്തരങ്ങളുടെ അൎദ്ധങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കൾ യാവ ചിലവ, അവററിന്റെ വൎഗ്ഗാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വൎഗ്ഗാന്തരം യാതൊന്നു് അതു് ഇജ്ജ്യാക്കളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപങ്ങളുടെ യോഗാന്തരങ്ങൾ യാവചിലവ അ

---

* യാവചില ജ്യാക്കളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള യോഗാന്തരചാപങ്ങൾ, അജ്ജ്യാക്കളുടെ ഘാതമെന്നൎത്ഥം.

വറെറ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കളുടെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും*. ഈ ന്യായത്തെ കർണ്ണാനയനത്തിൽ നടേ അറിയേണം.

[ത്ര്യശ്രന്യായത്തെക്കൊണ്ടു ചതുരശ്രന്യായത്തെ അറിയുംപ്രകാരത്തെ പറയുന്നു. ഇവിടെ നിയതങ്ങളായിരിക്കുന്ന ചില ന്യായങ്ങളെ ആദ്യമായി അറിയേണ്ടതുണ്ട്. അവയെ മുമ്പിൽ ചൊല്ലുന്നു.



പരിലേഖം 46.

പരിലേഖം 46_ൽ കഖഗഘ വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന ഒരു വിഷമചതുരശ്രം.

ഭൂമി=കഖ

മുഖം=ഗഘ

ഭുജകൾ=ഖഗ, കഘ

കർണ്ണങ്ങൾ=ഖഘ, കഗ

കഖ, ഖഗ, ഗഘ, ഘക എന്ന നാലു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം മുഴുവൻ തികയുന്നു. കർണ്ണം കഗ ചതുരശ്രത്തെ കഖഗ, കഘഗ എന്നു രണ്ടു

---

* Trigonometricaly,

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin (A+B) \sin (A-B)$$

$$\sin A \times \sin B = \sin^2 \frac{A+B}{2} - \sin^2 \frac{A-B}{2}$$

ത്ര്യശ്രങ്ങളായിട്ടു ഭാഗിക്കുന്നു. അതുപോലെതന്നെ മറെറ കർണ്ണവും. കഗ എന്ന കർണ്ണം കഖഗ, കഘഗ എന്ന രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കും സാധാരണമായിരിക്കുന്ന ഭൂമി. കഘ എന്ന ചാപത്തിൽനിന്നു ഗഘ എന്ന ചാപത്തോടു തുല്യമായിട്ടു കച എന്ന ചാപത്തെ ഉണ്ടാക്കുക. അപ്പോൾ കഗഘച എന്നൊരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ഈ ചതുരശ്രത്തിൽ കഗ ഭൂമി; കച, ഗഘ എന്ന ചാപങ്ങൾ തുല്യങ്ങളാകയാൽ ഭുജകൾ കച, ഗഘ തുല്യങ്ങൾ. ഘഘ$_1$, ചച$_1$ എന്ന ലംബങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുക. വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന കഗഘച എന്ന ചതുരശ്രത്തിൽ കച, ഗഘ എന്ന ഭുജകൾ തുല്യങ്ങളാകയാൽ ലംബങ്ങളായ ചച$_1$, ഘഘ$_1$ ഇവയും തുല്യങ്ങൾ. ചഘ എന്ന ചാപം കഘ, ഗഘ എന്ന ചാപങ്ങളുടെ അന്തരമാകയാൽ ചതുരശ്രത്തിന്റെ മുഖമായ ചഘ ചാപാന്തരസമസ്തജ്യാവെന്നു വന്നു.

$$\text{ച}_1\text{ഘ}_1 = \text{ചഘ}$$

$$\text{ഇവിടെ കച}_1 = \text{ഗഘ}_1,$$

$$\text{കഘ}_1 = \text{ഗച}_1$$

കഘഗ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ആബാധാന്തരം $= \text{കഘ}_1 - \text{ഘ}_1\text{ഗ}$

$$= \text{കഘ}_1 - \text{കച}_1$$

$$= \text{ച}_1\text{ഘ}_1$$

$$= \text{ചഘ} = \text{ചാപാന്തരസമസ്തജ്യാവ്.}$$

$$\text{ആബാധായോഗം} = \text{ഇഷ്ടകർണ്ണം} = \text{ബാഹുചാപയോഗസമസ്തജ്യാവ്}$$

$$\text{ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരം} = \text{കഘ}_1^2 - \text{ഘ}_1\text{ഗ}^2 \text{ (ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരം)}$$

$$= (\text{കഘ}_1 + \text{ഘ}_1\text{ഗ})(\text{കഘ}_1 - \text{ഘ}_1\text{ഗ})$$

$$= \text{കഗ} \times \text{ച}_1\text{ഘ}_1$$

$$= \text{കഗ} \times \text{ചഘ}$$

$$= \text{ചാപയോഗസമസ്തജ്യാവ്} \times \text{ചാപാന്തരസമസ്തജ്യാവ്}$$

ബാഹുക്കളെ സംബന്ധിച്ചേടത്തോളം,

$$\text{ചാപയോഗം} = \text{ചാപം കഗ} = \text{ചാപം കഘ} + \text{ചാപം ഘഗ}$$

$$\text{ചാപാന്തരം} = \text{ചാപം ഘച}$$

ഈ ചാപയോഗാന്തരങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചേടത്തോളം,

$$\text{ചാപയോഗം} = \text{ചാപം കഗ} + \text{ചാപം ഘച}$$

$$= \text{ചാപം കഘ} + \text{ചാപം ഗഘ} + \text{ചാപം കഘ} - \text{ചാപം ഗഘ}$$

$$= 2 \times \text{ചാപം കഘ}$$

$$\text{ചാപാന്തരം} = \text{ചാപം കഘ} + \text{ചാപം ഗഘ} - \text{ചാപം കഘ} + \text{ചാപം ഗഘ}$$

$$= 2 \times \text{ചാപം ഗഘ}$$

$$\therefore \text{ചാപം കഘ} = \frac{\text{ചാപയോഗം}}{2}; \quad \text{ചാപം ഗഘ} = \frac{\text{ചാപാന്തരം}}{2}$$

$\frac{\text{ചാപയോഗം}}{2}$, $\frac{\text{ചാപാന്തരം}}{2}$ എന്ന ചാപങ്ങളുടെ ജ്യാക്കളെ ഭുജകളെന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ,

$$\frac{\text{ചാപയോഗം}}{2}\ \text{എന്നതിന്റെ ജ്യാവർഗ്ഗം} - \frac{\text{ചാപാന്തരം}}{2}\ \text{എന്നതിന്റെ ജ്യാവർഗ്ഗം}$$

$$= \text{ജ്യാവ് കഖ} \times \text{ജ്യാവ് ഖഗ}$$

എന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ടു വന്നു.

അതായത്, ചാപയോഗാർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗം − ചാപാന്തരാർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗം = കഖ × ഖഗ

ഇങ്ങനെ കർണ്ണാനയനത്തിൽ ആവശ്യമുള്ള രണ്ടു ന്യായങ്ങൾ:—

(1) രണ്ടുജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം യാതൊന്ന് അത് ആ ജ്യാക്കളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപങ്ങളുടെ യോഗാന്തരങ്ങൾ യാവ ചിലവ അവററെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കളുടെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും.

(2) യാവ ചിലവ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ ഘാതം അത് അച്ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും യോഗാന്തരാർദ്ധങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കൾ യാവ ചിലവ അവററിന്റെ വർഗ്ഗാന്തരമായിട്ടിരിക്കും.]

വൃത്താന്തർഗ്ഗതചതുരശ്രക്ഷേത്രകർണ്ണാനയനം: അനന്തരം ഈ ന്യായത്തെക്കൊണ്ടു കർണ്ണമുണ്ടാക്കുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന വിഷമചതുരശ്രത്തിങ്കലെ എല്ലായിലും വലിയ ഭുജയെ പടിഞ്ഞാറെ ഭൂമി എന്നും എല്ലായിലും ചെറിയ ഭുജയെ കിഴക്കു മുഖമെന്നും പിന്നെ അവററിൽ വലിയതു ദക്ഷിണഭുജ, ചെറിയത് ഉത്തരഭുജ എന്നിങ്ങനെ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയവണ്ണംതന്നെ കല്പിച്ചു പിന്നെ ഭൂമീടെ തെക്കെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു മുഖത്തിന്റെ വടക്കെ അഗ്രത്തോളം ഉള്ളതു നടേത്തെ കർണ്ണം, പിന്നെ ഭൂമീടെ വടക്കെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു മുഖത്തിന്റെ തെക്കെ അഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്നതു രണ്ടാംകർണ്ണം എന്നും കല്പിച്ചു പിന്നെ അടുത്ത് ഈ രണ്ടു കർണ്ണാഗ്രങ്ങളുടെ അന്തരങ്ങളിലെ വൃത്തഭാഗങ്ങളെ ഓരോ ഭുജകളുടെ ചാപങ്ങൾ എന്നും കല്പിച്ച് ഇച്ചാപഖണ്ഡങ്ങളിൽ ചില ബിന്ദുക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ. അവിടെ ഭൂമീടെ വടക്കെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു സൌമ്യഭുജാചാപത്തിങ്കൽ മുഖചാപത്തോളം ചെന്നേടത്ത് ഒരു ബിന്ദുവിട്ടു. ഈ ബിന്ദുവിങ്കന്നു വൃത്തത്തിൽ മുഖത്തിന്റെ വടക്കെ അഗ്രത്തോടിടയ്ക്കു മുഖസൌമ്യഭുജാചാപാന്തരമെന്നു പേർ. ഇതിന്റെ നടുവിൽ സ്പർശിക്കും വ്യാസാർദ്ധരേഖയുടെ ഒരു അഗ്രം. പിന്നെ ഭൂമീടെ വടക്കെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു ഭൂചാപത്തിൽ യാമ്യഭുജാചാപത്തോളം ചെന്നേടത്ത് ഒരു ബിന്ദുവിട്ടു. ഈ ബിന്ദുവിങ്കന്നു ഭൂമീടെ യാമ്യാഗ്രത്തോടിടയ്ക്കു ഭൂയാമ്യചാപാന്തരമെന്നു പേർ. ഇതിന്റെ മദ്ധ്യത്തിൽ സ്പർശിക്കും വ്യാസരേഖയുടെ മററെ അഗ്രം. ഇതു വ്യാസത്തിന്റെ മൂലം. പിന്നെ വ്യാസമൂലത്തിങ്കന്നു ഭൂമീടെ യാമ്യാഗ്ര

ത്തോളമുള്ള പഴുതു ഭുജയാമ്യഭുജാചാപാന്തരാർദ്ധം. ആകയാൽ വ്യാസമൂലത്തിങ്കന്നു ഭുമിടെ വടക്കെത്തലയ്ക്കും തെക്കെ ഭുജടെ കിഴക്കെത്തലയ്ക്കും അകലമൊക്കും വൃത്തത്തിങ്കൽ. പിന്നെ വ്യാസാഗ്രത്തിങ്കന്നും വടക്കെ ഭുജടെ പടിഞ്ഞാറെ അഗ്രവും കിഴക്കെ ഭുജടെ തെക്കെ അഗ്രവും അകലമൊക്കും. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്തു മുഖവും സൌമ്യഭുജയും തങ്ങളിൽ ഗുണിപ്പൂ. അതിനെ യാമ്യഭുജയും ഭുമിയും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിൽ കൂട്ടൂ. എന്നാലതു രണ്ടു വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ യോഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടേയും മുഖസൌമ്യചാപങ്ങളെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയും അന്തരിച്ചും അർദ്ധിച്ചിരിക്കുന്നവററിന്റെ സമസ്തജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം നടേത്തത്. പിന്നെ ഭുയാമ്യചാപങ്ങളുടെ യോഗാന്തരാർദ്ധങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള സമസ്തജ്യാക്കളെ വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിച്ചത് രണ്ടാമത്. ഇതു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു വരും. ഇവിടെ മുഖസൌമ്യചാപയോഗാർദ്ധവും ഭുയാമ്യചാപയോഗാർദ്ധവും ഇവ രണ്ടും കൂട്ടിയാൽ പരിധ്യർദ്ധമായിട്ടിരിക്കും. ഈ യോഗാർദ്ധചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗയോഗം വ്യാസവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, ഈ ജ്യാക്കൾ രണ്ടും ഭുജാകോടികളാകയാൽ. യാതൊരുപ്രകാരം പരിധിടെ നാലൊന്നിനെ രണ്ടായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്ന ഖണ്ഡങ്ങളുടെ അർദ്ധജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികൾ, വ്യാസാർദ്ധം കർണ്ണവും ആയിട്ടിരിക്കുന്നു, അവ്വണ്ണം പരിധ്യർദ്ധത്തെ രണ്ടായി ഖണ്ഡിച്ചവററിന്റെ സമസ്തജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികളായിട്ടിരിക്കും, വ്യാസം കർണ്ണവുമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ഇച്ചൊല്ലിയ യോഗാർദ്ധജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗയോഗം വ്യാസവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ വ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു രണ്ട് അന്തരാർദ്ധചാപങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ രണ്ടും പോയതായിട്ടിരിക്കും ഇച്ചൊല്ലിയ ജ്യാക്കളുടെ ഘാതയോഗം. അവിടെ വ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു നടേ ഒരു അന്തരാർദ്ധചാപജ്യാവർഗ്ഗം പോവൂ. അവിടെ ശേഷിച്ചത് ആയന്തരാർദ്ധജ്യാവിന്റെ കോടിവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇതു രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരമാകയാൽ ഈ ജ്യാക്കൾ രണ്ടിനേയും സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപങ്ങളെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടുകയും അന്തരിക്കുകയും ചെയ്തിരിക്കുന്ന ചാപങ്ങൾ രണ്ടും യാവചിലവ അവററെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം. ഇവിടെ പിന്നെ വ്യാസത്തിന്നു ചാപമാകുന്നതു പരിധ്യർദ്ധമാകയാൽ, വ്യാസാഗ്രത്തിങ്കൽ ചൊല്ലിയ അന്തരാർദ്ധചാപത്തെ പരിധ്യർദ്ധത്തിൽ കൂട്ടുകയും കളക

യും ചെവ്വ. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും ജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടു വരേണം ഈ വൎഗ്ഗാന്തരം, യോഗാന്തര ചാപജ്യാഘാതരൂപമായിട്ട് എല്ലൊ ഇരിപ്പൂ വൎഗ്ഗാന്തരം, എന്നിട്ട്. ഇവിടെ പിന്നെ യോഗാന്തരചാപങ്ങൾക്കു രണ്ടിനുമൊന്നേ ജ്യാക്കൾ, ശരത്തിനും ചാപത്തിനുമേ ഭേദമുള്ളൂ. വ്യാസരേഖയിങ്കന്നി ഇരുപുറവും തുല്യമായിട്ട് അകലുമ്പോൾ ജ്യാക്കൾ തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കുംഎന്നു നിയതം. യാതൊരുപ്രകാരമനന്തപുരവൃത്തത്തിങ്കൽ അൎദ്ധജ്യാക്കൾ പഠിക്കുന്നേടത്ത് ഇരുപത്തിനാലാകുന്ന പക്ഷത്തിങ്കൽ ഇരുപത്തിമൂന്നാമതും ഇരുപത്തിഅഞ്ചാമതും ഒന്നേ ആയിട്ടിരിക്കുന്നു, അവ്വണ്ണമിവിടേയും. ജ്യാക്കൾ തുല്യങ്ങളാകയാൽ ഘാതം വൎഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ വ്യാസവൎഗ്ഗത്തിങ്കന്നു മുഖോത്തരാഗ്രവും വ്യാസാഗ്രവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരചാപജ്യാവിന്റെ വൎഗ്ഗത്തെ നടേ കളയുമ്പോൾ വ്യാസമൂലത്തിങ്കന്നു മുഖോത്തരാഗ്രത്തോളമുള്ള അന്തരചാപജ്യാവിന്റെ വൎഗ്ഗം ശേഷിക്കുന്നതു്. പിന്നെ ഇതിങ്കന്നു വ്യാസമൂലത്തോടു ഭൂമിടെ ദക്ഷിണാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരചാപജ്യാവൎഗ്ഗത്തെ കളകേ വേണ്ടുവതു്. ഇതു രണ്ടാമന്തരാൎദ്ധചാപമാകുന്നതു്. എന്നിട്ട് ഇതും രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വൎഗ്ഗാന്തരമാകയാൽ ഇവററിന്റെ യോഗാന്തരചാപജ്യാഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു വ്യാസമൂലത്തോടിടയിലുള്ള പരിധ്യംശം ഒരു ചാപമാകുന്നതു്. വ്യാസമൂലത്തിങ്കന്നു ഭൂയാമ്യാഗ്രാന്തരം ഒരു ചാപമാകുന്നതു്. ഇവററിന്റെ അന്തരമാകുന്നതു മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു ഭൂയാമ്യാഗ്രത്തോടിടയിലുള്ള പരിധ്യംശം. ഇതു മുഖദക്ഷിണഭുജാചാപയോഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിന്റെ ജ്യാവാകുന്നതു് ആദ്യകൎണ്ണം. എന്നാൽ ആദ്യകൎണ്ണം അന്തരചാപജ്യാവാകുന്നതു്. പിന്നെ മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി വ്യാസമൂലം കഴിച്ചു ഭൂചാപത്തിങ്കലെ ബിന്ദുവോളമുള്ളതു യോഗചാപമാകുന്നതു്. ഇതിന്റെ ജ്യാവു മുഖഭൂചാപയോഗജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. ദക്ഷിണഭുജാചാപാഗ്രത്തെക്കാൾ ഭൂദക്ഷിണാഗ്രത്തോടു ഭൂചാപത്തിങ്കലെ ബിന്ദുവോടുള്ള അന്തരമേറീട്ടിരിക്കും ഭൂചാപം. എന്നാൽ അന്തരത്തെ ദക്ഷിണഭുജാചാപത്തിൽ കൂട്ടിയാൽ ഭൂചാപത്തോടു തുല്യമാകയാൽ ഭൂമുഖചാപയോഗജ്യാവു യോഗജ്യാവാകുന്നതു്. എന്നിട്ടു മുഖയാമ്യചാപയോഗജ്യാവും മുഖഭൂചാപയോഗജ്യാവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും മുഖസൌമ്യഭുജാഘാതവും ഭൂയാമ്യഭുജാഘാതവും തങ്ങളിലെ യോഗം. ഇതിന്നു് ആദ്യകൎണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യമെന്നു

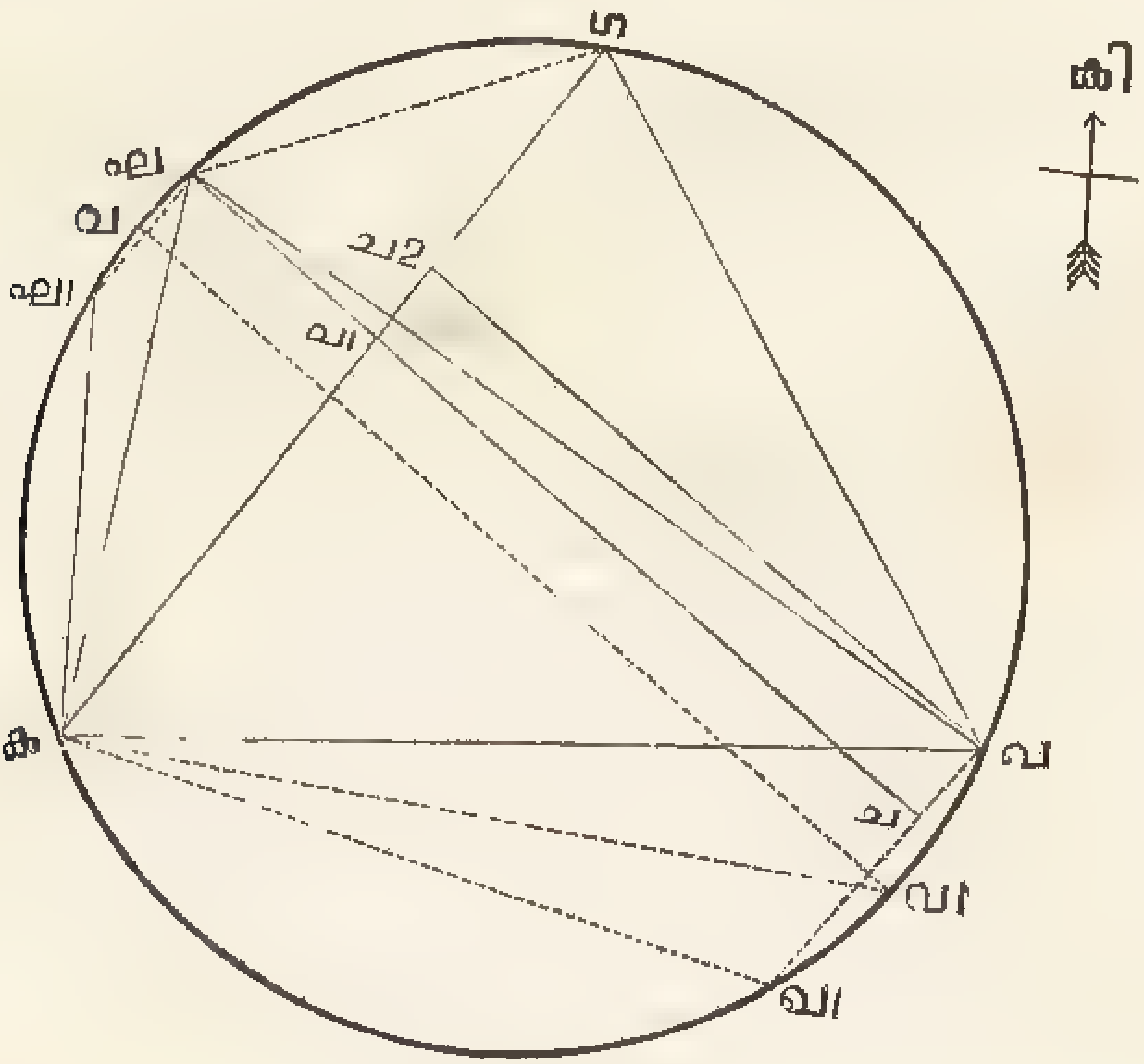
പേർ. ആദ്യകർണ്ണമാകുന്നതു് മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തോടു ഭുയാമ്യഗ്രത്തോടു സ്പർശിച്ചുള്ള കർണ്ണം. ഇതിന്റെ അഗ്രത്തെ സ്പർശിച്ചിരിപ്പോ ചിലവ മുഖസൌമ്യഭുജകൾ, മൂലത്തെ സ്പർശിപ്പോ ചിലവ ഭുയാമ്യഭുജകൾ. ഇവററിന്റെ ഘാതയോഗമാകയാൽ ആദ്യകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യമിതു്. ഇതു പിന്നെ ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിപ്പൊന്നു്. ഇവിടെ ആദ്യകർണ്ണമാകുന്നതു ഭുദക്ഷിണാഗ്രത്തിങ്കന്നു മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തോളമുള്ളതു്. തൃതീയകർണ്ണമാകുന്നതു പിന്നെ ഭുയാമ്യഭുജകളെ പകർന്നുവെച്ചാൽ അഗ്രം നടേത്തേതു തന്നെയും മൂലം മറെറാരിടത്തും സ്പർശിച്ചിട്ടിരിക്കുന്ന ഈ ആദ്യകർണ്ണം തന്നെ. ദ്വിതീയകർണ്ണം നടേത്തെപ്പോലെ ഇരിക്കും. മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന പ്രഥമകർണ്ണത്തിന്റെ മൂലം മറെറാരിടത്തായിരിക്കും എന്നു ചൊല്ലിയതു്, ഭൂചാപത്തിങ്കൽ ഭൂദക്ഷിണാഗ്രത്തിങ്കന്നു ഭുയാമ്യചാപാന്തരം ചെന്നേടത്തു യാതൊരു ബിന്ദു നടേ ചൊല്ലിയതു് അതിങ്കലായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടുന്നു മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തോളമുള്ളതു തൃതീയകർണ്ണമാകുന്നതു്. ഭുയാമ്യഭുജകളെ പകർന്നുവെക്കുമ്പോളെ ഇതു് ഉണ്ടാവൂ. ഇതിനെ തൃതീയകർണ്ണമെന്നു ചൊല്ലുന്നു. പിന്നെ ഈ കർണ്ണങ്ങൾ രണ്ടും ഭുജകളായി ഇക്കർണ്ണമൂലാന്തരത്തിങ്കലെ ചാപത്തെ ഭൂചാപമെന്നും കല്പിപ്പൂ. അതാകുന്നതു ഭൂചാപത്തിങ്കലെ ബിന്ദുവും ഭുയാമ്യാഗ്രവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരചാപം. ഇതിന്റെ ജ്യാവിനെ ഭൂമി എന്നും കല്പിച്ചിട്ടു് ഒരു ത്ര്യശ്രത്തെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഈ ഭൂമിക്കു വിപരീതമായിട്ടു മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു് ഈ ഭൂമിയോളമുള്ളതു് ഈ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ലംബമാകുന്നതു്. അവിടെ ആദ്യതൃതീയകർണ്ണങ്ങളാകുന്ന ഭുജകളുടെ ഘാതത്തെ വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലുണ്ടാകും ഈ ലംബം. എല്ലായിടത്തും ജ്യാക്കളായിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രഭുജകളുടെ ഘാതത്തെ ആ വൃത്തവ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ആ ഭുജാചാപയോഗത്തിന്റെ ജ്യാവു ഭൂമിയായിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ലംബമുണ്ടാകും എന്നു നിയതം. ഇതു 'ജീവേ പരസ്പര' എന്നാദിയായുള്ള ശ്ലോകത്തിങ്കലെ ന്യായംകൊണ്ടുവരും. ഇവിടെ പിന്നെ വിഷമചതുരശ്രത്തെ ദ്വിതീയകർണ്ണംകൊണ്ടു വിഭജിച്ചു രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളായിട്ടു കല്പിച്ചാൽ രണ്ടിങ്കലും ഓരോ ലംബമുണ്ടാകും. ഈ ലംബങ്ങൾ രണ്ടിന്നും സാധാരണമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കും ഈ ദ്വിതീയകർണ്ണം. ഇക്കർണ്ണം ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങളിലെ ലംബങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും യോഗം യാതൊന്നു് ഇതിനോടു തുല്യമായിട്ടിരിക്കും ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാ

ത്തിങ്കന്നു വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുള്ള ലംബം. അതു് എങ്ങനെ എന്നു പിന്നെ. ഇവിടെ ആദ്യതൃതീയകർണ്ണങ്ങളുടെ അഗ്രം മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ, മൂലം ഭൂയാമ്യാഗ്രത്തിങ്കലും ഭൂചാപബിന്ദുവിങ്കലും. ഈ മൂലാന്തരചാപജ്യാവു് ഇക്കർണ്ണങ്ങളാകുന്ന ത്ര്യശ്രഭുജകൾക്കു ഭൂമി ആകുന്നതു്. ഈ ഭൂമിക്കും ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്നും ഒന്നേ ദിക്കു്, ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെ രണ്ടഗ്രത്തിങ്കന്നു് ഈ ജ്യാഗ്രങ്ങൾ യാമ്യചാപത്തോടു തുല്യങ്ങളാകയാൽ. ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെ ചാപത്തിന്നും ഈ ത്ര്യശ്രഭൂമിചാപത്തിന്നും മദ്ധ്യമാകുന്നതു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ വ്യാസമൂലത്തിങ്കൽ ആയിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്നും ഈ ത്ര്യശ്രഭൂമിക്കും ദിക്കു് ഒന്നേ ആകയാൽ ദ്വിതീയകർണ്ണം ഭൂമിയായിട്ടുള്ള ലംബങ്ങൾ രണ്ടിന്നും വലിയ ലംബത്തിന്നും ദിക്കു് ഒന്നേ. പിന്നെ ദ്വിതീയകർണ്ണം ഭൂമിയായി ആദ്യതൃതീയകർണ്ണം ഭുജകളായിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ഭൂമി മുഖമായി ഇരിപ്പോരു ചതുരശ്രം സമലംബമായിട്ടിരിക്കും. ഇവ്വണ്ണം കല്പിക്കുമ്പോൾ ലംബയോഗതുല്യം വലിയ ലംബമെന്നു സ്പഷ്ടമാകും. പിന്നെ ഈ ലംബയോഗത്തെ ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെ അർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ദ്വിതീയകർണ്ണം ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടിലേയും ഫലയോഗമായിട്ടു വൃത്താന്തർഗ്ഗതചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാകും. ആകയാൽ കർണ്ണങ്ങൾ മൂന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചു് അർദ്ധിച്ചതു ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലമായിട്ടിരിക്കും. കർണ്ണത്രയഘാതത്തെ ക്ഷേത്രഫലംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഇരട്ടിച്ച വ്യാസമായിട്ടിരിക്കും. കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളുടെ ഘാതത്തെ ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ദ്വിഗുണവ്യാസവർഗ്ഗമുണ്ടാകും. ലംബയോഗം, വ്യാസം, ക്ഷേത്രഫലമെന്നിവ എല്ലാം ഇവിടെ പ്രസംഗാൽ പറഞ്ഞു. എന്നിട്ടു് ഇതിന്റെ ശേഷം മേലിൽ പറയുന്നുണ്ടു്.

ഇവിടെ കർണ്ണങ്ങളെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നതു്. അവിടെ ആദ്യകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു വിസ്തരിച്ചു ചൊല്ലീ. ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ദ്വിതീയകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതമെന്നും വരും. ഇതു മുഖയാമ്യഭുജാഘാതവും ഭൂസൌമ്യഭുജാഘാതവും കൂടിയതു്. പിന്നെ ഭൂയാമ്യഭുജകളെ പകർന്നു കല്പിച്ചാലുള്ള ദ്വിതീയകർണ്ണാശ്രിതഭുജകളുടെ ഘാതൈക്യത്തെയും ഉണ്ടാക്കൂ. അതു ഭൂമുഖഘാതവും സൌമ്യയാമ്യഭുജാഘാതവും കൂടിയതു്. ഇതിന്നു ഭുജാ

പ്രതിഭുജാഘാതയോഗമെന്നു പേർ. ഇതു പ്രഥമദ്വിതീയകർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ഇനി ഈ ഭുജകളെ പകൎന്നുവെച്ചാൽ നാലാമതു് ഒരു കർണ്ണമുണ്ടാവുകയില്ല, പ്രസ്താരം മടങ്ങിപ്പോകയാൽ. ഇവിടെ ഇവ്വണ്ണമുണ്ടാകിയ ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതത്തെ ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ആദ്യകർണ്ണവർഗ്ഗം. പിന്നെ ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതത്തെ ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ദ്വിതീയകർണ്ണവർഗ്ഗം. ഇങ്ങനെ കർണ്ണങ്ങൾ വരുത്തുംപ്രകാരം. തൃതീയകർണ്ണത്തെ വരുത്തേണ്ടാ, കല്പിതമത്രെ അതു്, എന്നിട്ടു്. ഇവ്വണ്ണംതന്നെ ഉണ്ടാക്കുകയുമാം വേണ്ടുകിൽ.

[പരിലേഖം 47-ൽ കപഗഘ വൃത്താന്തൎഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന ഒരു വിഷമചതുരശ്രം.



പരിലേഖം 47.

ഇവിടെ ഭൂമി = കഖ;
മുഖം = ഗഘ.
ആദ്യഭുജ = ഖഗ.

സൌമ്യഭുജ = കഘ.

കഖ > ഖഗ > കഘ > ഗഘ എന്നും കല്പിക്കുന്നു.

ആദ്യകർണ്ണം = ഖഘ.

ദ്വിതീയകർണ്ണം = കഗ.

കഘ എന്ന ചാപത്തിൽ ഘഗ എന്ന ചാപത്തിനോടു തുല്യമായിട്ടു കഘ$_1$ എന്ന ചാപത്തെ ഉണ്ടാക്ക. അപ്രകാരംതന്നെ കഖ എന്ന ചാപത്തിലും ഖഗ എന്ന ചാപതുല്യമായിട്ട് കഖ$_1$ എന്ന ചാപത്തെ ഉണ്ടാക്ക.

അപ്പോൾ ചാപം കഘ$_1$ = ചാപം ഗഘ = മുഖചാപം

ചാപം കഖ$_1$ = ചാപം ഖഗ = യാമ്യചാപം

ചാപം ഘഘ$_1$ = മുഖസൌമ്യഭുജാചാപാന്തരം

ചാപം ഖഖ$_1$ = ഭൂയാമ്യഭുജാചാപാന്തരം

ഘഘ$_1$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ മദ്ധ്യം = വ

ഖഖ$_1$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ മദ്ധ്യം = വ$_1$

ചാപങ്ങൾ വഘ + ഘഗ + ഗഖ + ഖവ$_1$ = ചാപങ്ങൾ വഘ$_1$ + ഘ$_1$ക + കഖ$_1$ + ഖ$_1$വ$_1$

= വൃത്താർദ്ധം

∴ വവ$_1$ = ഒരു വ്യാസമാകുന്നു.

ഇവിടെ വ വ്യാസാഗ്രവും, വ$_1$ വ്യാസമൂലവുമെന്നു കല്പിക്ക.

ചാപം വ$_1$ഖ = ചാപം വ$_1$ഖ$_1$ = ഭൂയാമ്യഭുജാചാപാന്തരാർദ്ധം

ചാപം വഘ = മുഖസൌമ്യഭുജാചാപാന്തരാർദ്ധം

ചാപം വ$_1$ക = ചാപം വ$_1$ഖ$_1$ + ചാപം ഖ$_1$ക

= ചാപം വ$_1$ഖ + ചാപം ഖഗ

= ചാപം വ$_1$ഗ.

ഇപ്രകാരംതന്നെ ചാപം വക = ചാപം വഗ

പിന്നെ മുമ്പിൽപറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ട്,

കഘ × ഘഗ = കവ^2 − വഘ^2

ഖഗ × ഖക = കവ$_1^2$ − വ$_1$ഖ^2

∴ കഘ × ഘഗ + ഖഗ × ഖക = കവ^2 + കവ$_1^2$ − വഘ^2 − വ$_1$ഖ^2

വ്യാസം ഭൂമിയായി വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന ഏതു ത്ര്യശ്രത്തിന്റെയും ഭുജകൾ ഭൂമിയാകുന്ന കർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജാകോടികളായിട്ടിരിക്കുമെന്നു നിയതം.

∴ കവ^2 + കവ$_2^2$ = വവ$_1^2$

∴ കഘ × ഘഗ + കഖ × ഖഗ = വവ$_1^2$ − വഘ^2 − വ$_1$ഖ^2

വ്യാസകർണ്ണത്തിന്നു വഘ, ഘവ$_1$ ഇവയും ഭുജാകോടികളാകുന്നു.

∴ വവ$_1^2$ = വഘ^2 + ഘവ$_1^2$

∴ വവ$_1^2$ − വഘ^2 = ഘവ$_1^2$

അപ്പോൾ കഘ × ഘഗ + കഖ × ഖഗ = വ$_1$ഘ^2 − വ$_1$ഖ^2

= ഘഖ$_1$ × ഘഖ

(ആദ്യംപറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ട്)

ഘഖ എന്നതു് ആദ്യകർണ്ണം. ഭൂമ്യാസ്യഭുജകളെ പകർന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ആദ്യകർണ്ണത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഘഖ$_1$ എന്ന കർണ്ണമുണ്ടാകുന്നു. ഇതിന്നു തൃതീയകർണ്ണമെന്നു പേർ. ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്നു സംസ്ഥാനഭേദവുമില്ല.

ആദ്യകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന ഭുജകൾ ഘക, ഘഗ; മറ്റെ അഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്നവ ഖഗ, ഖക. അതുകൊണ്ടു കഘ × ഘഗ + കഖ × ഖഗ എന്ന ഘാതയോഗത്തിന്നു ആദ്യകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യമെന്നു പേർ.

∴ ആദ്യകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം = ഘഖ × ഘഖ$_1$

= ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതം

ഘഖഖ$_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ ഖഖ$_1$ എന്നതിനെ ഭൂമി എന്നു കല്പിച്ചു ബാഹുസ്പർശാഗ്രമായ ഘ എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നു ഭൂമിയിലേക്കു ഘച എന്ന ലംബത്തെ വരക്ക.

$$\text{ലംബം ഘച} = \frac{\text{ഘഖ} \times \text{ഘഖ}_1}{\text{വ്യാസം}}$$

("ദ്വയോഃ പരസ്പരം ഘാതാത്ത്രിജ്യാപ്തം ലംബ ഇഷ്യതേ"
എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു്).

ചതുരശ്രത്തെ ദ്വിതീയകർണ്ണംകൊണ്ടു ഘകഗ, ഖകഗ എന്നു രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളായി വിഭജിച്ചു ഘ, ഖ എന്ന ബാഹുസ്പർശാഗ്രങ്ങളിൽനിന്നു സാധാരണഭൂമിയായ കഗയിലേക്കു ഘച$_1$, ഖച$_2$ എന്ന രണ്ടു ലംബങ്ങളെ വരക്കുക.

ചാപം കഖ$_1$ = ചാപം ഗഖ; ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റേയും ഖഖ$_1$ എന്നതിന്റേയും ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും മദ്ധ്യം വ്യാസമൂലമായ ഖ$_1$ൽ തന്നെ.

∴ ഖ$_1$ഖ, കഗ ഇവ തുല്യദിക്കുകൾ.

∴ കഖ$_1$ഖഗ സമലംബമായിരിക്കുന്ന ഒരു ചതുരശ്രം.

∴ ഘച, ഘച$_1$, ഖച$_2$ ഈ ലംബങ്ങളും തുല്യദിക്കുകൾ.

∴ ഘച = ഘച$_1$ + ഖച$_2$.

അപ്പോൾ വിഷമചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം.

= ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെ ഇരുപുറവുമുള്ള ത്ര്യശ്രങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലയോഗം

= ½ × ദ്വിതീയകർണ്ണം × (ഘച$_1$ + ഖച$_2$)

= ½ × ദ്വിതീയകർണ്ണം × ഘച.

$$\text{എന്നാൽ ഘച} = \frac{\text{ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതം}}{\text{വ്യാസം}}$$

$$\text{അപ്പോൾ വിഷമചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം} = \frac{\text{ആദ്യദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതം}}{2 \times \text{വ്യാസം}}$$

$$\text{വ്യാസം} = \frac{\text{ആദ്യദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതം}}{2 \times \text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം}}$$

$$\frac{\text{ആദ്യകർണ്ണവർഗ്ഗം} \times \text{ദ്വിതീയകർണ്ണവർഗ്ഗം} \times \text{തൃതീയകർണ്ണവർഗ്ഗം}}{\text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം}} = (2 \times \text{വ്യാസം})^2$$

ഇവിടെ ലംബയോഗം, ക്ഷേത്രഫലം, വ്യാസം ഇവയെ പ്രസംഗാൽ പറഞ്ഞു. അനന്തരം കർണ്ണാനയനത്തെ തുടങ്ങുന്നു.

ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതം = ആദ്യകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം

= കഘ × ഘഗ + കഖ × ഖഗ.

$$\text{ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതം} = \text{ദ്വിതീയകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം}$$
$$= \text{കഘ} \times \text{കഖ} + \text{ഗഘ} \times \text{ഗഖ}$$

പിന്നെ ഭൂയാഗ്രഭുജകളെ പകർന്നു കല്പിച്ചാൽ കഘഗഖ$_1$ എന്നൊരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ഈ ചതുരശ്രത്തിന്റെ കർണ്ണങ്ങൾ തൃതീയകർണ്ണവും ദ്വിതീയകർണ്ണവും. ആദ്യകർണ്ണം ഈ ചതുരശ്രത്തിന്റെ തൃതീയകർണ്ണമായിട്ടുവരും. ഇവിടെ കഗ എന്ന കർണ്ണത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ള കർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം = കഗ × ഘഖ = ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതം.

$$\therefore \text{ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതം} = \text{കഘ} \times \text{കഖ}_1 + \text{ഖ}_1\text{ഗ} \times \text{ഗഘ}$$
$$= \text{കഘ} \times \text{ഗഖ} + \text{കഖ} \times \text{ഗഘ}$$

കഖഗഘ എന്ന ചതുരശ്രത്തിൽ കഘ, ഗഖ ഇവയെ അന്യോന്യം ഭുജാപ്രതിഭുജകളെന്നു പറയുന്നു; കഖ, ഗഘ ഇവയേയും അന്യോന്യം ഭുജാപ്രതിഭുജകളെന്നു പറയുന്നു.

$$\text{അപ്പോൾ ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതം} = \text{ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം}$$
$$= \text{ഗഘ} \times \text{കഖ} + \text{കഘ} \times \text{ഖഗ}$$

ഭുജകളെ എങ്ങനെ പകർന്നു കല്പിച്ചാലും നാലാമതു് ഒരു കർണ്ണമുണ്ടാവുകയില്ല. ഭ$_1$, ഭ$_2$, ഭ$_3$, ഭ$_4$ എന്നു ചതുരശ്രത്തിന്റെ നാലു ഭുജകൾ എന്നു കല്പിക്ക. ഇവയിൽ ഈരണ്ടിന്റെ ഘാതം ആറുവിധത്തിൽ വരാം — ഭ$_1$ഭ$_2$, ഭ$_1$ഭ$_3$, ഭ$_1$ഭ$_4$, ഭ$_2$ഭ$_3$, ഭ$_2$ഭ$_4$, ഭ$_3$ഭ$_4$ — ഇങ്ങനെ പ്രസ്താരം ആറു്. രണ്ടു ഭുജകളുടെ ഘാതത്തിൽ ബാക്കിയുള്ള രണ്ടു ഘാതത്തെയാണു് കൂട്ടേണ്ടതു്. ഇങ്ങനെയുള്ള യോഗങ്ങൾ മൂന്നു മാത്രമെ ഉണ്ടാകയുള്ളു. അവ ഭ$_1$ഭ$_2$ + ഭ$_3$ഭ$_4$, ഭ$_1$ഭ$_3$ + ഭ$_2$ഭ$_4$, ഭ$_1$ഭ$_4$ + ഭ$_2$ഭ$_3$ ആകുന്നു. ഇവയിൽ രണ്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു മൂന്നാമതുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കർണ്ണവർഗ്ഗമുണ്ടാകുന്നു. മൂന്നുവിധം മാത്രമെ ഇതും സംഭവിക്കയുള്ളു.

$$\text{ആദ്യകർണ്ണവർഗ്ഗം} = \frac{(\text{ഭ}_1\text{ഭ}_2 + \text{ഭ}_3\text{ഭ}_4)(\text{ഭ}_1\text{ഭ}_3 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_4)}{\text{ഭ}_1\text{ഭ}_4 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_3}$$

$$\text{രണ്ടാംകർണ്ണവർഗ്ഗം} = \frac{(\text{ഭ}_1\text{ഭ}_2 + \text{ഭ}_3\text{ഭ}_4)(\text{ഭ}_1\text{ഭ}_4 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_3)}{\text{ഭ}_1\text{ഭ}_3 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_4}$$

$$\text{മൂന്നാംകർണ്ണവർഗ്ഗം} = \frac{(\text{ഭ}_1\text{ഭ}_3 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_4)(\text{ഭ}_1\text{ഭ}_4 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_3)}{\text{ഭ}_1\text{ഭ}_2 + \text{ഭ}_3\text{ഭ}_4}$$

പ്രസ്താരം ഒടുങ്ങുകയാൽ നാലാമതൊരു കർണ്ണമുണ്ടാവുകയില്ല എന്നു പറഞ്ഞതിന്റെ യുക്തി ഇപ്രകാരമാണു്.

$$\text{അപ്പോൾ } \frac{\text{ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതം} \times \text{ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതം}}{\text{ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതം}}$$

$$= \frac{\text{ഖഘ} \times \text{കഗ} \times \text{ഖഘ} \times \text{ഘഖ}_1}{\text{കഗ} \times \text{ഘഖ}_1} = \text{ഖഘ}^2 = \text{ആദ്യകർണ്ണവർഗ്ഗം.}$$

ഇങ്ങനെ എല്ലാ കർണ്ണങ്ങളേയും ഉണ്ടാക്കാം.

$$\therefore \text{ആദ്യകർണ്ണം} = \sqrt{\left\{ \frac{(\text{കഖ} \times \text{ഗഘ} + \text{ഖഗ} \times \text{കഘ})(\text{കഖ} \times \text{ഖഗ} + \text{കഘ} \times \text{ഘഗ})}{\text{കഘ} \times \text{ഖക} + \text{ഗഘ} \times \text{ഗഖ}} \right\}}$$

$$\text{ദ്വിതീയകർണ്ണം} = \sqrt{\left\{ \frac{\text{ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതം} \times \text{ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതം}}{\text{ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതം}} \right\}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{കഖ} \times \text{ഗഘ} + \text{ഖഗ} \times \text{കഘ})(\text{കഘ} \times \text{ഖക} + \text{ഗഘ} \times \text{ഗഖ})}{\text{കഖ} \times \text{ഖഗ} + \text{കഘ} \times \text{ഘഗ}}}$$

$$\text{തൃതീയകർണ്ണം} = \sqrt{\frac{\text{ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതം} \times \text{ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതം}}{\text{ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതം}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{കഖ} \times \text{ഖഗ} + \text{കഘ} \times \text{ഘഗ})(\text{കഘ} \times \text{കഖ} + \text{ഗഘ} \times \text{ഗഖ})}{\text{കഖ} \times \text{ഗഘ} + \text{ഖഗ} \times \text{കഘ}}} \Bigg]$$

"ജീവേപരസ്പരം" ന്യായത്തിന്റെ ഉപപത്തി:—അനന്തരം ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു ചൊല്ലിയതിനെ പഠിതജ്യാക്കളിൽ കാട്ടുന്നു. അവിടെ രണ്ടു ജ്യാക്കളെ പരസ്പരകോടികളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചു കൂട്ടിയാൽ ആ ജ്യാക്കളുടെ യോഗചാപത്തിന്റെ ജ്യാവുണ്ടാകും എന്നു മുമ്പിൽചൊല്ലീ. ഇവിടെ ത്രിജ്യാവു പ്രഥമകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും, യോഗചാപജ്യാവ് ദ്വിതീയകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും. ഇതരേതരകോടി മറ്റേതിന്നു പ്രതിഭുജയായിട്ടിരിക്കും. അത് എങ്ങനെ എന്ന്. അവിടെ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ ത്രിജ്യാകർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രം. ദ്വിതീയതൃതീയ ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്നുംകൂടീട്ട് ഒരു സമസ്തജ്യാവും. ഈ ജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കും ത്രിജ്യാകർണ്ണം. ഇക്കർണ്ണവും സമസ്തജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള സംപാതത്തിങ്കന്നു തൃതീയജ്യാഗ്രത്തോളമുള്ള സമസ്തജ്യാർദ്ധം ഒരു ഭുജാ. ദ്വിതീയജ്യാവിനെ പിന്നെ ഇസ്സംപാതത്തിങ്കലും തൃതീയജ്യാവും പൂർവ്വാപരസൂത്രവും തങ്ങളിലുള്ള സംപാതത്തിങ്കലും സ്പർശിച്ചിട്ടു കല്പിക്കാം. എന്നാലതൊരു ഭുജാ. തൃതീയജ്യാവ് ഒരു ഭുജാ. ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പോരു ത്ര്യശ്രമുണ്ട്. ഇവിടെ സമസ്തജ്യാർദ്ധം പ്രഥമജ്യാവ്. ഇതിനേയും ദ്വിതീയജ്യാവിനേയും ഇതരേതരകോടികളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു തങ്ങളിൽകൂട്ടി ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ തൃതീയജ്യാവായിട്ടുവരും. എന്നിതെല്ലാം മുമ്പിൽചൊല്ലീ. പിന്നെ ഇവിടെ ക്ഷേത്രകല്പനത്തെ പ്രകാരാന്തരേണ നിരൂപിക്കാം. ഇവിടെ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കലും ചതുർത്ഥജ്യാഗ്രത്തിങ്കലും സ്പർശിക്കുമാറു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇസ്സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുമാറു വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണത്തേയും ദ്വിതീയജ്യാവിനെ യഥാസ്ഥാനമായിട്ടും കല്പിച്ചു പിന്നെ ദ്വിതീയജ്യാവും പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിങ്കലെ ദ്വിതീയജ്യാകോടിയും പിന്നെ സമസ്തജ്യാർദ്ധങ്ങളിൽ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന ഭാഗവും ഇതിന്റെ കോടി വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കലെ ഭാഗവും ഇങ്ങനെ ഒരു വിഷമചതുരശ്രം. ഇവിടെ പൂർവ്വാപരസൂത്രവും ദ്വിതീയജ്യാവുമുള്ള സംപാതത്തിങ്കലും സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കലും സ്പർശിച്ചിട്ട് ഒരു കർണ്ണം. ഇതു തൃതീയജ്യാ

വായിട്ടിരിക്കും, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു്; സംസ്ഥാനഭേദം തോന്നുമെത്രെ. മറ്റെ കർണ്ണം ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിച്ചിരിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധം. ഇവിടെ ദ്വിതീയജ്യാവും പ്രഥമജ്യാകോടിയും തങ്ങളിൽ പ്രതിഭുജകളായിട്ടിരിക്കും. മറ്റെവ തങ്ങളിലും. എന്നാൽ ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതം കർണ്ണഘാതമെന്നതു് ഇവിടേയും വരും*.

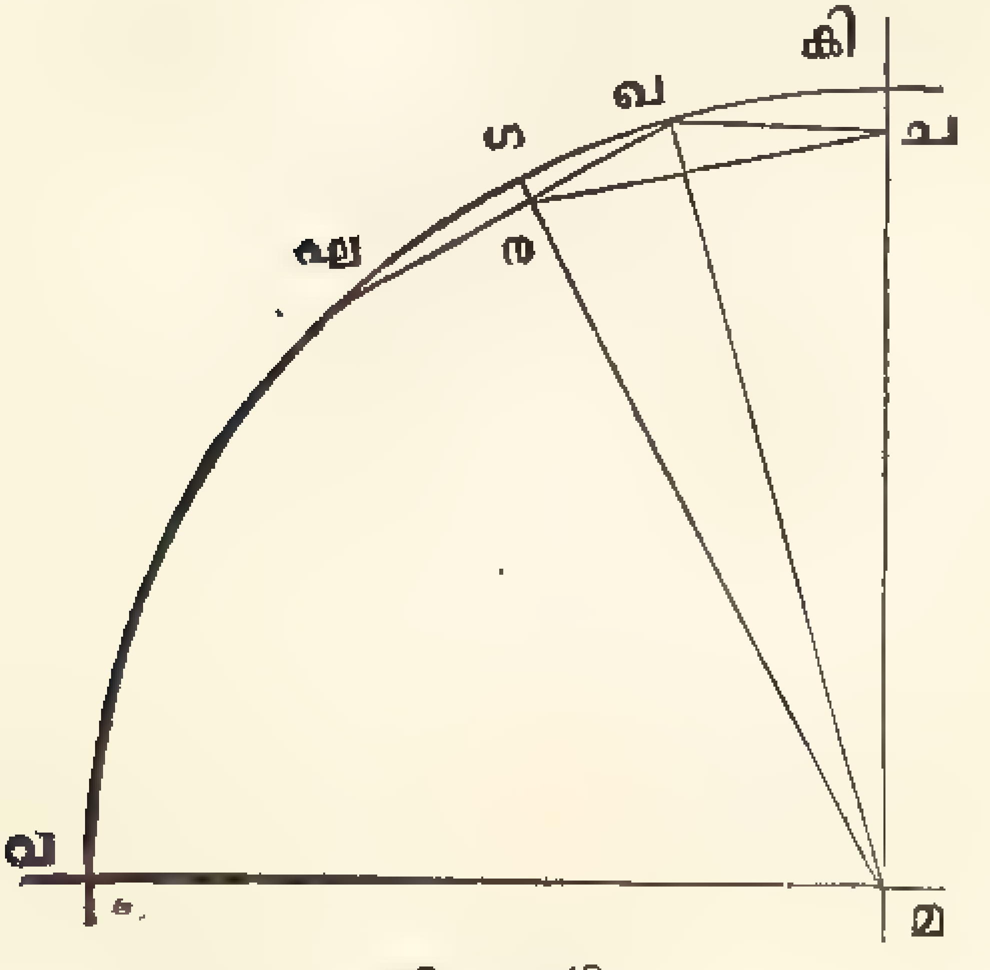
[ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം = ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതം എന്ന ന്യായത്തെ പഠിതജ്യാക്കളിൽ കാണിക്കുന്നു. ജീവേ പരസ്പരന്യായത്തെക്കൊണ്ടു് ഇതു സാധിക്കുന്നു. ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം കർണ്ണഘാതതുല്യം എന്ന ന്യായത്തെ അപേക്ഷിച്ച ജീവേ പരസ്പരന്യായത്തിന്റെ ഉപപത്തിയെ പ്രകാരാന്തരേണ പറയുന്നതായിട്ടുമിവിടെ കല്പിക്കാം. ഇവിടെ ജ്യാക്കൾക്കു ചില സംസ്ഥാനഭേദങ്ങളെ കല്പിക്കേണം. മൂലത്തിൽ ആദ്യദ്വിതീയജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു തൃതീയജ്യാവിനെ വരുത്തുവാനാണു് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതു്. ഇവിടെ തുല്യന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ അഞ്ചാമത്തേയും മൂന്നാമത്തേയും ജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു എട്ടാംജ്യാവിനെ വരുത്തുവാനാണിവിടെ പറയുന്നതു്.

പരിലേഖം 48-ൽ ചാപം കിഖ = അഞ്ചു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗം

ചാപം ഖഘ = ആറു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗം

(ചെറിയ ജ്യാവിന്റെ ചാപത്തിലിരട്ടി)

= ഷഷ്ഠംജ്യാവ് = ജ.



പരിലേഖം 48

* വൃത്താന്തസ്ഥമാകാവുന്ന ചതുരശ്രത്തിന്റെ ലക്ഷണങ്ങളെ യുക്തിഭാഷയിലും ലീലാവതിയിലും പറഞ്ഞുകാണുന്നില്ല.

ഘച എന്ന ചാപത്തിന്റെ മധ്യത്തിലേയ്ക്ക് ഒരു വ്യാസാർദ്ധത്തെ വരക്കുക. അതു ഖല എന്ന സമസ്തജ്യാവിന്റെ മധ്യമായ ര എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കും.

∴ ഖര = മൂന്നാംജ്യാവ് = ജ$_3$

മര = ശരോനവ്യാസാർദ്ധം = മൂന്നാംജ്യാവിന്റെ കോടി = ജ$_{21}$

മച = അഞ്ചാംജ്യാവിന്റെ കോടി = ജ$_{19}$

രച = 8-ാംജ്യാവ് = ജ$_8$ (യുക്തി മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഇവിടെ മരഖച എന്ന ചതുരശ്രം വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിട്ടു കല്പിക്കാം.

ജീവേ പരസ്പരന്യായേന,

$$\text{രച} = \frac{\text{ഖച} \times \text{മര} + \text{ഖര} \times \text{മച}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ഖച × മര + ഖര × മച = രച × വ്യാസാർദ്ധം.

മരഖച എന്ന ചതുരശ്രത്തിൽ, ഖച, മര ഭുജാപ്രതിഭുജകളാകുന്നു; ഖര, മച ഇവയും ഭുജാപ്രതിഭുജകളാകുന്നു. രച, വ്യാസാർദ്ധം ഇവ കർണ്ണങ്ങൾ.

അപ്പോൾ ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം = കർണ്ണാഘാതം എന്നു വന്നു.

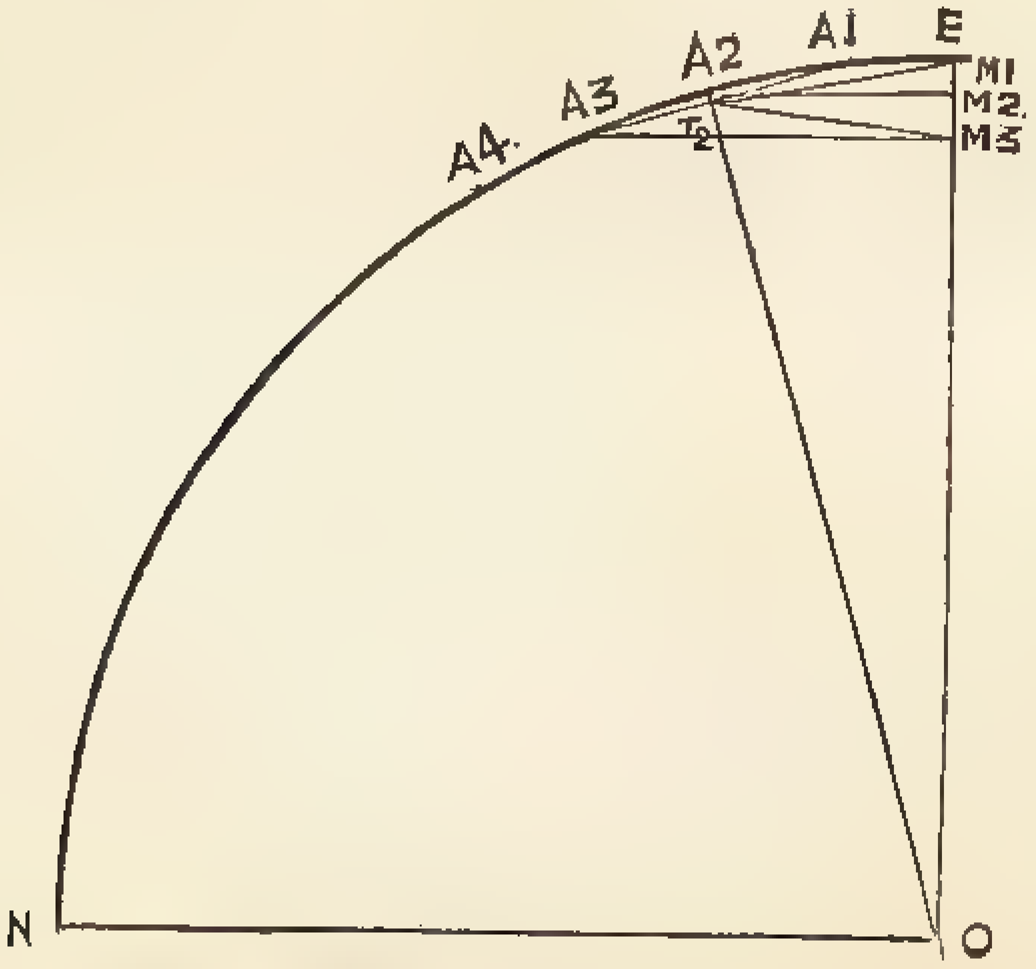
ഇതു വരുത്തിയ ന്യായത്തെ അപേക്ഷിച്ച്,

ഖച × മര + ഖര × മച = രച × വ്യാസാർദ്ധം

∴ ജ$_5$ × ജ$_{21}$ + ജ$_3$ × ജ$_{19}$ = ജ$_8$ × വ്യാസാർദ്ധം

$$\therefore \text{ജ}_8 = \frac{\text{ജ}_5\text{ജ}_{21} + \text{ജ}_3 \times \text{ജ}_{19}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$ (ജീവേ പരസ്പരന്യായം) *]

* ജീവേ പരസ്പരന്യായം:—



പരിലേഖം 49

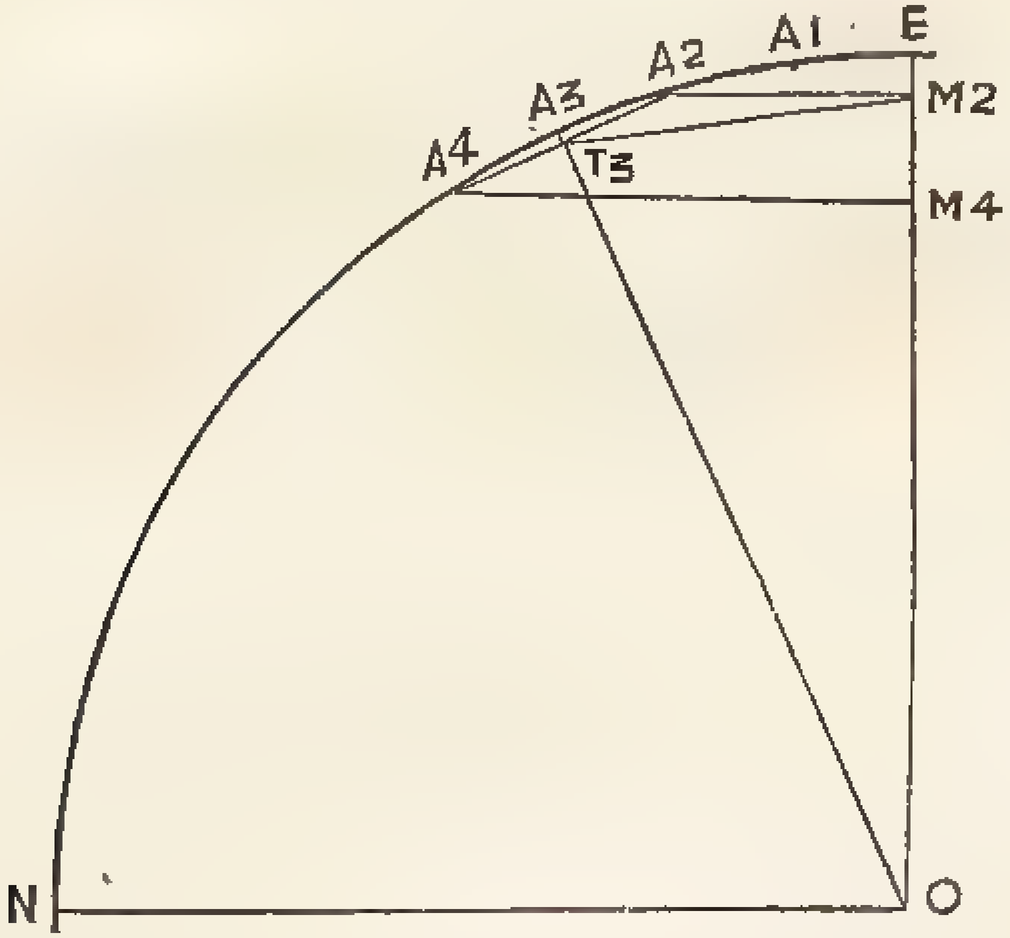
ജീവാനയനം: പിന്നെ പ്രഥമജ്യാവും ദ്വിതീയജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരം പ്രഥമജ്യാവും തൃതീയജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ പ്രഥമജ്യാവും തൃതീയജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരം ദ്വിതീയജ്യാവും ചതുർത്ഥജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം അവററിന്റെ ചാപയോഗത്തിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെയും ജ്യാക്കൾ രണ്ടും തങ്ങളിലെ ഘാത

Denoting the successive Bhujas by J_1, J_2, J_3......and the correspon-ding Kotis by K_1, K_2, K_3......, in fig. 49, J_1, K_1, K_1, J_1 are the four sides of a cyclic quadrilateral, $oM_1A_1T_2$ and $T_2M_1=T_2M_3=J_2$.

Now $oA_1\times T_2M_1=A_1M_1\times oT_2+A_1T_2\times oM_1$

ie $r\times J_2=J_1\times K_1+J_1\times K_1=2J_1\times K_1$ (where r=the radius)

$$\therefore J_2=\frac{2J_1\times K_1}{r}$$



പരിലേഖം 50

Again in fig 50, $oM_2A_2T_3$ is also a cyclic quadrilateral, in which $A_2M_2=J_2$, $A_2T_3=J_1$, $oM_2=K_2$, $oT_3=K_1$.

and $T_3M_2=J_3$

$$\therefore oA_2\times T_3M_2=A_2M_2\times oT_3\times oM_2$$

ie $r\times J_3=J_2\times K_1+J_1\times K_2$

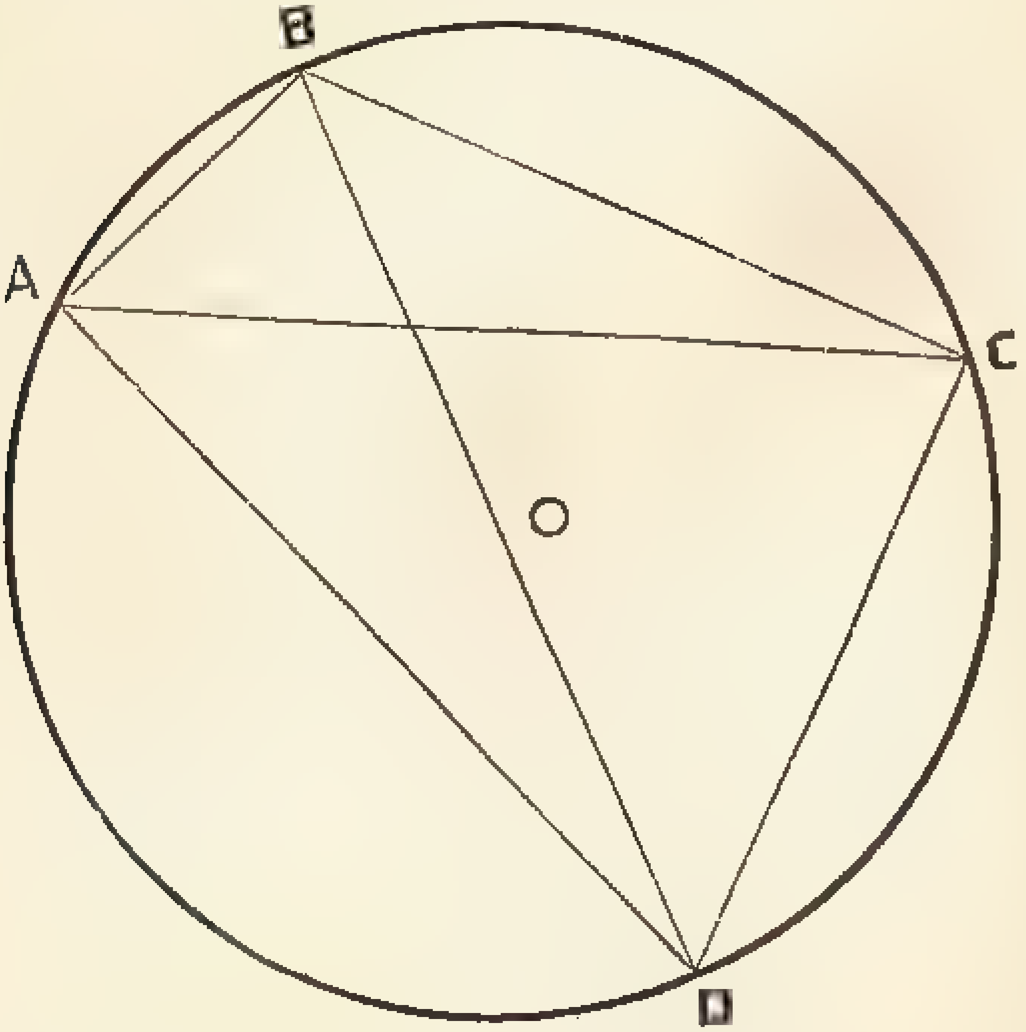
$$\text{ie } J_3=\frac{J_2\times K_1+J_1\times K_2}{r}$$

and so on.

മായിട്ടിരിക്കും, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു്. എന്നാൽ അതതുജ്യാവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു പ്രഥമജ്യാവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു് അടുത്തു കീഴെ ജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അടുത്തു മീതെത്ത ജ്യാവുണ്ടാകും. ഇവ്വണ്ണം വ്യാസാർദ്ധംകൂടാതെ പഠിതജ്യാക്കളെ വരുത്താം. പിന്നെ പ്രഥമതൃതീയജ്യാഘാതത്തിൽ പ്രഥമജ്യാവർഗ്ഗത്തെക്കൂട്ടി മൂലിച്ചാൽ ദ്വിതീയജ്യാവുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ ജ്യാവർഗ്ഗം ക്രമേണ ഉണ്ടാക്കാം, വ്യാസാർദ്ധം കൂടാതെ. ഇവറ്റെ എല്ലാം സമസ്തജ്യാക്കളായിട്ടു കല്പിക്കിലുമാം. ഇങ്ങനെ ഒരു പരിഷജീവാനയനന്യായങ്ങൾ.

The same may be applied in the case of the whole-chords as in fig 51.

To prove that $\sin(x+y)=\sin x \cos y+\cos x \sin y$



പരിലേഖം 51

BD is the diameter and *BA*, *AC* are two chords on opposite sides. Then *ABCD* is a cyclic quadrilateral.

Hence $BC \times AD + AB \times CD = BD \times AC$

$$\therefore \frac{BC}{BD} \times \frac{AD}{BD} + \frac{AB}{BD} \times \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{BD}$$

If *BC* and *AB* subtend angles x and y respectively at *D*, then $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y)$

[ജ_1, ജ_2, ജ_3,………, ജ_{23}, ജ_{24} എന്നു ഇരുപത്തിനാലു പഠിതജ്യാക്കളെ കല്പിപ്പൂ. രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം ആ ജ്യാക്കളുടെ ചാപങ്ങളുടെ യോഗത്തിന്റേയും അന്തരത്തിന്റേയും ജ്യാക്കളുടെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കുമെന്നു മുമ്പിൽ ചതുരശ്രകർണ്ണാനയനത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. ആ ന്യായപ്രകാരം

$$\text{ജ}_2^2 - \text{ജ}_1^2 = \text{ജ}_3 \times \text{ജ}_1$$
$$\text{ജ}_3^2 - \text{ജ}_1^2 = \text{ജ}_4 \times \text{ജ}_2$$
$$\text{ജ}_4^2 - \text{ജ}_1^2 = \text{ജ}_5 \times \text{ജ}_3$$

……………………………………

……………………………………

$$\therefore \frac{\text{ജ}_2^2 - \text{ജ}_1^2}{\text{ജ}_1} = \text{ജ}_3$$
$$\frac{\text{ജ}_3^2 - \text{ജ}_1^2}{\text{ജ}_2} = \text{ജ}_4$$
$$\frac{\text{ജ}_4^2 - \text{ജ}_1^2}{\text{ജ}_3} = \text{ജ}_5$$

……………………………………

……………………………………

“തത്തൽജ്യാവർഗ്ഗമാദ്യജ്യാവർഗ്ഗഹീനം……..”ഇത്യാദി വ്യാസസംബന്ധം കൂടാതെ ഈ ജീവാനയനന്യായത്തെ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. (പുറം 219)

$$\text{ജ}_2^2 = \text{ജ}_3 \times \text{ജ}_1 + \text{ജ}_1^2$$
$$\text{ജ}_3^2 = \text{ജ}_4 \times \text{ജ}_2 + \text{ജ}_1^2$$

……………………………………

……………………………………

ഇങ്ങനെ ജ്യാവർഗ്ഗങ്ങളേയും ഉണ്ടാക്കാം*.]

---

* By this theorem $J_2^2 - J_1^2 = J_3 J_1$

Hence $J_3 = \frac{J_2^2 - J_1^2}{J_1}$ where J_1 and J_2 are known

Again $J_3^2 - J_1^2 = J_4 J_2$

Hence $J_4 = \frac{J_3^2 - J_1^2}{J_2}$

Hence J_4 comes from J_1, J_2 and J_3

Thus by induction, $J_n^2 - J_1^2 = J_{n+1} \times J_{n-1}$

$$\therefore J_{n+1} = \frac{J_n^2 - J_1^2}{J_{n-1}}$$

Thus each successive Bhuja can be derived from the preceding two Bhujas and the first Bhuja.

ലംബാനയനത്തിന്റെ ഉപപത്തി

അനന്തരം രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ ഘാതത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ തച്ചാപയോഗജ്യാവു ഭൂമി ആയിരിക്കുന്നേടത്തെ ലംബമുണ്ടാകും എന്നു ചൊല്ലിയതിന്റെ ഉപപത്തിയെ കാട്ടുന്നു, അനന്തപുരവൃത്തത്തിങ്കലെ സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു്. അവിടെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കെ തലയ്ക്കുന്നു് ഇരുപുറവും പതുപ്പത്തു ചാപഖണ്ഡങ്ങളെ കഴിച്ചു നേരെ തെക്കുവടക്കു് ഒരു ജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇതു പത്താംജ്യാവാകുന്നതു്. പിന്നെ ഇതിന്റെ തെക്കെ തലയ്ക്കുന്നു തുടങ്ങി പന്ത്രണ്ടു ചാപഖണ്ഡത്തിന്നു് ഒരു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്റെ അഗ്രം പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിന്റെ വടക്കെപ്പുറത്തു രണ്ടു ചാപഖണ്ഡം കഴിഞ്ഞേടത്തു പരിധിയെ സ്പർശിക്കും. ഇതു് ആറാം ജ്യാവു്. പിന്നെ ഇതിന്റെ വടക്കെ തലക്കലും പത്താംജ്യാവിന്റെ വടക്കെ തലക്കലുംകൂടി ഒരു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇതു നാലാം ജ്യാവു്. പിന്നെ ആറാംജ്യാവിന്റെ നടുവിലും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കലും സ്പർശിച്ചിട്ടു രണ്ടഗ്രങ്ങളും പരിധിയെ സ്പർശിക്കുമാറു് ഒരു വ്യാസസൂത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതും ആറാംജ്യാവും തങ്ങളിൽ വിപരീതദിക്കുകൾ, ഇതിങ്കലൂടെ ശരമെന്നിട്ടു്. പിന്നെ ഈ വ്യാസസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കെ തലയ്ക്കുന്നു നേരെ പടിഞ്ഞാറോട്ടു് ഒരു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ, നേരെ വടക്കോട്ടും. ഇതിൽ നടേത്തെതു കോടി, രണ്ടാമതു ഭുജ. ഈ ഭുജ നാലാംജ്യാവായിട്ടിരിപ്പൊന്നു്. ഇവിടെ പൂർവ്വാപരസൂത്രാഗ്രത്തോടു പത്താംജ്യാവിന്റെ തെക്കെ അഗ്രത്തോടു് ഇടയിൽ പത്തു ചാപഖണ്ഡമുള്ളൂ. അവിടെ ദശമജ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു് ആറു ചാപഖണ്ഡം കഴിഞ്ഞിട്ടു വ്യാസാഗ്രം പരിധിയെ സ്പർശിക്കുന്നു. ഇവിടുന്നു പൂർവ്വസൂത്രം നാലു ചാപഖണ്ഡം; ഇവിടുന്നും നാലു ചാപഖണ്ഡം വടക്കു ചെന്നേടത്തു ഭുജാഗ്രം പരിധിയെ സ്പർശിക്കും. ഇങ്ങനെ എട്ടു ചാപഖണ്ഡത്തിങ്കൽകൂടിയുള്ളൊരു സമസ്തജ്യാവു്, ആകകൊണ്ടു നാലാംജ്യാവു് എന്നു വന്നു. പിന്നെ ദശമജ്യാവിന്റെ ഉത്തരാഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിച്ചിരിക്കുന്ന ചതുർത്ഥജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിച്ചിട്ടും ഒരു വ്യാസസൂത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്റേയും കിഴക്കെ തലക്കേന്നു തെക്കുവടക്കു് ഒരു ഭുജാജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇതു പന്ത്രണ്ടു ഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവാകയാൽ ആറാംജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ യാതൊരു ജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യത്തിങ്കൽ വ്യാസമാകുന്ന കർണ്ണം സ്പർശിക്കുന്നു അ

തിന്റെ ഭുജ ഇതരജ്യാവായിട്ടിരിക്കും*. ഇവിടെ പൂർവ്വാപരസൂത്രാഗ്രവും യോഗചാപജ്യാവാകുന്ന ഭുജാഗ്രവും തങ്ങളിൽ, യോഗചാപാർദ്ധം അന്തരമാകുന്നു||. ഇതിങ്കന്ന് ഇഷ്ടചാപാർദ്ധം കളഞ്ഞാൽ ഇതരചാപാർദ്ധം ശേഷിക്കും എന്നു ഹേതുവാകുന്നതു്. ഇവിടെ വ്യാസമാകുന്ന കർണ്ണം പ്രമാണം, ഇതിന്റെ ഭുജ പ്രമാണഫലം, വ്യാസത്തിങ്കന്നു വിപരീതമായിരിക്കുന്ന ജ്യാവു് ഇച്ഛാ, വിപരീതജ്യായോഗത്തിങ്കന്നു § യോഗചാപജ്യായോഗത്തോളം ഉള്ള ലംബം ഇച്ഛാഫലമായിട്ടുണ്ടാകും. ഇവിടെ ഇഷ്ടജ്യാക്കളിൽ ഒന്ന് ഇച്ഛയാകുമ്പോൾ മറ്റേതു പ്രമാണഫലമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ചതുർത്ഥഷഷ്ഠജ്യാക്കൾ രണ്ടിന്നും ഒന്നുതന്നെ ഇച്ഛാഫലമാകുന്നതു്, ലംബം വരുത്തുന്നേടത്തു്. പിന്നെ കോടി വരുത്തുന്നേടത്തു ചാപമദ്ധ്യസ്പൃഷ്ടമായിരിക്കുന്ന വ്യാസസൂത്രത്തിന്റെ കോടി പ്രമാണഫലമാകുന്നതു്. ഇവിടെ ഇച്ഛാപ്രമാണഫലാഘാതം രണ്ടു് ആകയാൽ ഇച്ഛാഫലങ്ങളായി ആബാധകളായി ശരജ്യാഖണ്ഡങ്ങളായിരിക്കുന്ന അവ രണ്ടു ജ്യാക്കൾക്കും രണ്ടായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഇച്ഛാപ്രമാണങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ വിപരീതിക്കുകളാകയാൽ ഇവറ്റിന്റെ ഫലങ്ങൾ തങ്ങളിലും വിപരീതിക്കുകളായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ഭുജകളെക്കൊണ്ടു ലംബഭൂമികളെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലീതായി.

[“ജ്യയോഃ പരസ്പരം ഘാതാത്ത്രിജ്യാപ്തം ലംബ ഇഷ്യതേ”

(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ ഘാതത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ തച്ചാപയോഗജ്യാവു ഭൂമിയായിരിക്കുന്ന ലംബമുണ്ടാകുമെന്നതിന്റെ ഉപപത്തിയെ പറയുന്നു. ത്രിജ്യാവൃത്തത്തിങ്കലെ സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു് അതിവിടെ സാധിച്ചിരിക്കുന്നു.

പരിലേഖം 52-ൽ മ ത്രിജ്യാവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം. കിമപ പൂർവ്വാപരസൂത്രം. പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിന്റെ ഇരുപുറത്തും പത്തു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ വീതം അളന്നെടുത്തു് ആ ഇരുപതിനുംകൂടി ഖഗ എന്ന സമസ്തജ്യാവിനെ വര

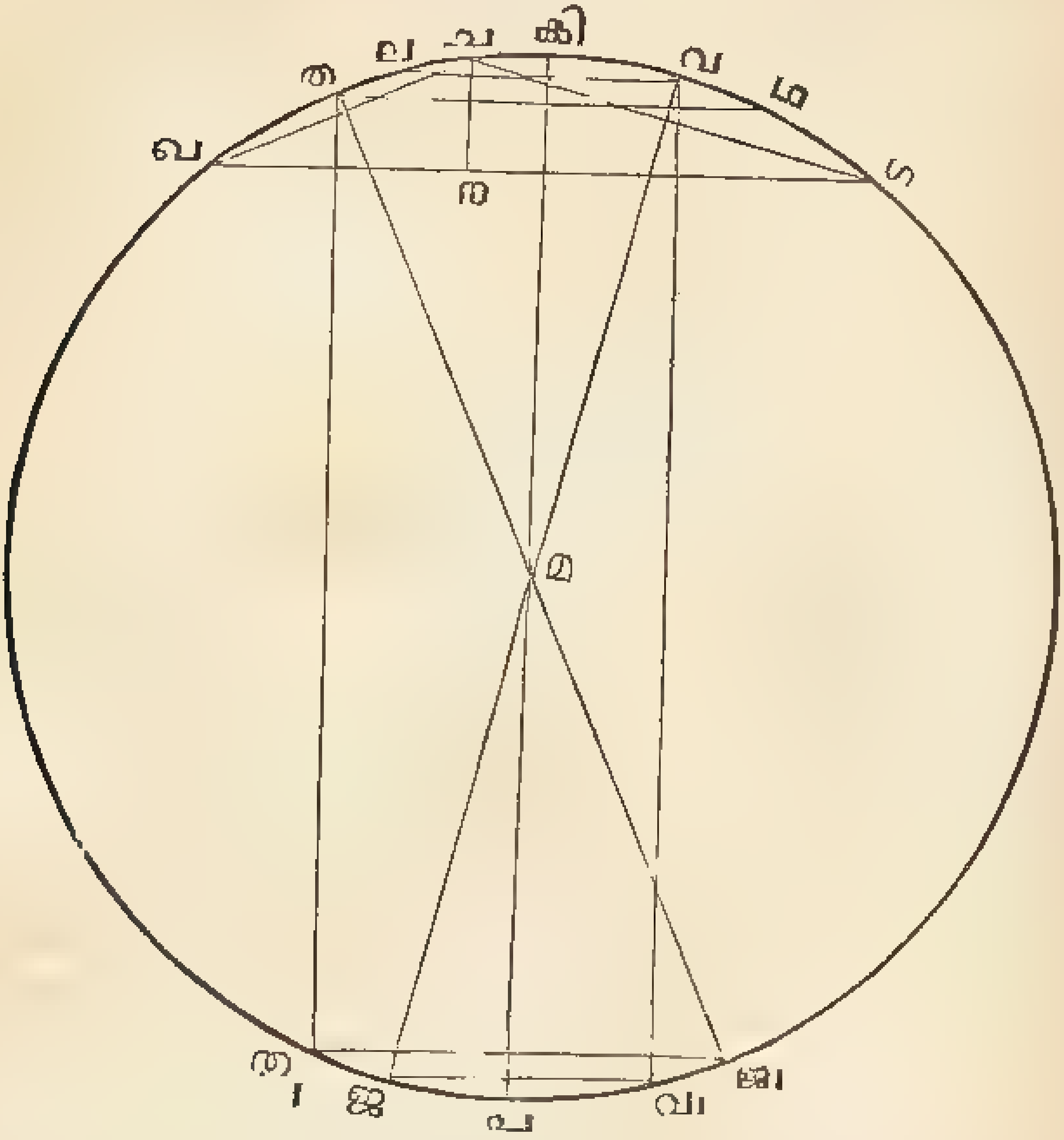
---

* ഒരു ജ്യാവിന്നു വ്യാസമാകുന്ന യാതൊരു കർണ്ണം വിപരീതമിക്കാകുന്നു, ആ കർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ജ്യാവിന്റെ ഇതരജ്യാവാകുന്നുവെന്നർത്ഥം.

|| “തങ്ങളിലന്തരം യോഗചാപാർദ്ധമാകുന്നു” എന്നു മാറ്റിയാൽ അർത്ഥം സ്പഷ്ടമാകും.

§ വ്യാസകർണ്ണംപ്രമാണം, ഇതിന്റെ ഭുജ പ്രമാണഫലം, ഇഷ്ടവ്യാസത്തിന്നു വിപരീതമായിട്ടിരിക്കുന്ന ജ്യാവിച്ഛാ. ഇഷ്ടവ്യാസങ്ങൾക്കു വിപരീതങ്ങളായിരിക്കുന്ന ജ്യാക്കളുടെ യോഗത്തിങ്കന്നു് ആ ജ്യാക്കളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള യോഗചാപജ്യാവോളമുള്ള ലംബം ഇവിടെ ഇച്ഛാഫലമാകുന്നതു്.

ക്കം. പിന്നെ ഗ യിൽനിന്നു പന്ത്രണ്ടു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ വടക്കോട്ട് അളന്നവിടെ ച എന്ന ബിന്ദു ഇട. ഗച എന്നതു പന്ത്രണ്ടു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാവ്. അപ്പോൾ ഖച എട്ടുചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാവെന്നു വരും. ചഗ എന്ന ചാപത്തിന്റെ മദ്ധ്യമായ വ യിൽനിന്നും കേന്ദ്രവും വ്യ



പരിലേഖം 52.

ത്തത്തെ സ്പർശിക്കുമാറു വജ എന്ന വ്യാസത്തെ ഉണ്ടാക്കുക. ഈ വ്യാസവും ചഗ എന്ന സമസ്തജ്യാവും വിപരീതമിക്കുകൾ. വ യിൽനിന്നു വവ₁, വല എന്ന സമസ്തജ്യാക്കളെ പടിഞ്ഞാട്ടും വടക്കോട്ടും ഈ വ്യാസകർണ്ണത്തിന്റെ കോടിഭുജകളായിട്ടു വരക്കുക.

ചാപം കിവ = ചാപം കിഗ − ചാപം വഗ.

= (10 − 6) ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ,

∴ വല = നാലാംസമസ്തജ്യാവ്.

ഖല എന്ന നാലാംജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യത്തിൽ സ്പർശിച്ചിട്ട് തമജ₁ എന്ന വ്യാസത്തെ വരക്കുക. ഇതിന്റെ കോടിഭുജകൾ തത₁, തഥ ഇവയേയും വരക്കുക.

എന്നാൽ തഥ ആറാംജ്യാവാകുന്നു. ചഖഗ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ ഭുജായോഗമായ ചയിൽ നിന്നു ഖഗ എന്ന ഭൂമിയോളം ചര എന്ന ലംബത്തെ വരക്ക.

അപ്പോൾ ഖഗ=പത്താംജ്യാവ്; ചഗ=6-ാംജ്യാവ് ചഖ=നാലാംജ്യാവ്

വല=നാലാംജ്യാവ് — ചഗ എന്ന ആറാംജ്യാവിന്റെ ഇതരജ്യാവ്

തഥ=ആറാംജ്യാവ് — ചഖ എന്ന നാലാംജ്യാവിന്റെ ഇതരജ്യാവ്

ഖചര, $\text{തജ}_1\text{ത}_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\therefore \text{ലംബം} = \text{ചര} = \frac{\text{ത}_1\text{ജ}_1 \times \text{ചഖ}}{\text{തജ}_1}$$

$$= \frac{\text{തഥ} \times \text{ചഖ}}{\text{തജ}_1}$$

$$= \frac{\text{6-ാംജ്യാവ്} \times \text{നാലാംജ്യാവ്}}{\text{വ്യാസം}}$$

$$= \frac{\text{ജ്യേതരജ്യാഘാതം}}{\text{വ്യാസം}}$$

$$\text{ഖര} = \frac{\text{തത}_1 \times \text{ചഖ}}{\text{തജ}_1}$$

$$= \frac{\text{6-ാംജ്യാവിന്റെ കോടി} \times \text{4-ാംജ്യാവു}}{\text{വ്യാസം}}$$

ചരഗ, $\text{ജവ}_1\text{വ}$ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\text{രഗ} = \frac{\text{വവ}_1 \times \text{ചഗ}}{\text{വജ}}$$

$$= \frac{\text{നാലാംജ്യാവിന്റെ കോടി} \times \text{6-ാംജ്യാവ്}}{\text{വ്യാസം}}$$

$$\therefore \text{ഭൂമി ഖഗ} = \text{പത്താംജ്യാവ്} = \text{ഖര} + \text{രഗ}$$

$$= \frac{\text{4-ാംജ്യാവ്} \times \text{6-ാംജ്യാവിന്റെ കോടി} + \text{6-ാംജ്യാവ്} \times \text{4-ാംജ്യാവിന്റെ കോടി}}{\text{വ്യാസം}}$$

ഇവിടെ ഈ ജ്യാക്കളെല്ലാം സമസ്തജ്യാക്കളാകുന്നു.

അപ്പോൾ ഭൂമി=

$$\frac{\text{4-ാം അർദ്ധജ്യാ} \times \text{6-ാം അർദ്ധജ്യാകോടി} + \text{6-ാം അർദ്ധജ്യാ} \times \text{4-ാം അർദ്ധജ്യാകോടി}}{\frac{\text{വ്യാസം}}{4}}$$

$\therefore$ ഭൂമ്യർദ്ധം (പത്താമർദ്ധജ്യാവ്)

$$= \frac{\text{4-ാം അർദ്ധജ്യാ} \times \text{6-ാം അർദ്ധജ്യാകോടി} + \text{6-ാം അർദ്ധജ്യാ} \times \text{4-ാം അർദ്ധജ്യാ കോടി}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ഇതു ജീവേ പരസ്പരന്യായംതന്നെ. ഇങ്ങനെ ലംബഭൂമികളെ വരുത്തും പ്രകാരം.]

ഉപസംഹാരം

ഇവിടെ രണ്ടു് ഇഷ്ടജ്യാക്കളെ ഇതരേതരകോടികളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയതു് ഇഷ്ടജ്യാചാപങ്ങളുടെ യോഗജ്യാവും വ്യാസാർദ്ധവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു ചൊല്ലിയതുകൊണ്ടുതന്നെ നിയതകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്ന യാതൊരു ചതുരശ്രത്തിങ്കലും ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം കർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു വന്നു. ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ അടുത്തുള്ള ഭുജകൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയതും ചില കർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നതിനേയും ചൊല്ലീ. പിന്നെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടു യോഗാന്തരചാപജ്യാക്കളെ വരുത്താമെന്നും ചൊല്ലീ. തല്പ്രകാരം പഠിതജ്യാക്കളെ ഒക്ക വരുത്താമെന്നും ചൊല്ലീ. പിന്നെ പ്രഥമകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതയോഗം പ്രഥമതൃതീയകർണ്ണഘാതം എന്നും വന്നേടത്തു് ഇക്കർണ്ണചാപയോഗജ്യാവു ഭൂമിയാകുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ലംബം വരും, ഈ കർണ്ണഘാതത്തെ വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ. പിന്നെ ദ്വിതീയകർണ്ണം ഭൂമിയാകുന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടിങ്കലെ ലംബയോഗമാകിലുമാം ഈ ലംബം. അപ്പോൾ കർണ്ണഘാതമെന്നു വിവക്ഷിക്കേണ്ടാ; ഭുജാഘാതങ്ങൾ എന്നേ വേണ്ടൂ. പിന്നെ ഈ ലംബംകൊണ്ടു ദ്വിതീയകർണ്ണാർദ്ധത്തെ ഗുണിച്ചാൽ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം വരും എന്നു സാമാന്യന്യായംകൊണ്ടു വന്നിരിക്കുന്നു.

വൃത്താന്തർഗ്ഗതചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലാനയനം

അനന്തരം ഈ ന്യായംകൊണ്ടു പരിധികൂടാതെ നിയതകർണ്ണമായിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രബാഹുക്കളെക്കൊണ്ടുതന്നെ വ്യാസത്തെ വരുത്താം എന്നതിനെ കാട്ടുവാനായിക്കൊണ്ടു കർണ്ണവും വ്യാസവും കൂടാതെ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു. ഇങ്ങനെ ത്രിഭുജക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗമുണ്ടാകുന്ന പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലി അനന്തരം ഇവ്വണ്ണം തന്നെ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗവുമുണ്ടാകും എന്നതിനെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ അന്തർഭാഗത്തിങ്കൽ കല്പിപ്പൂ ചതുരശ്രം. അപ്പോൾ ചതുരശ്രത്തിന്റെ നാലുകോണും വൃത്തത്തെ സ്പർശിച്ചിരിക്കേണം. അപ്പോൾ ആ വൃത്തത്തിന്റെ നാലു ജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും ഇച്ചതുരശ്രബാഹുക്കൾ. ഇന്നാലു ജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം മുഴുവൻ തികഞ്ഞിട്ടുമിരിക്കും. പിന്നെ ഇച്ചതുരശ്രത്തിങ്കൽ ഇഷ്ടമായിട്ടു് ഒരു കർണ്ണത്തെ കോണോടുകോണു സ്പർശിക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. എന്നാലിച്ചതുരശ്രത്തിന്റെ അന്തർഭാഗത്തിങ്കൽ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളുണ്ടാകും. ഇവിടെ രണ്ടു ത്ര്യശ്ര

ങ്ങൾക്കും സാധാരണമായിട്ടിരിപ്പോരു ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കും ഇക്കല്പിച്ച കർണ്ണം. ഇവ്വണ്ണം നിയതമായിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രത്തിങ്കലെ ഫലത്തെ "സർവ്വദോര്യുതി ദളം"* എന്നാദിയായിരിക്കുന്നതിനെക്കൊണ്ടു വരുത്തുന്നു. അവിടെ പിന്നെ ഈ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരു പുറത്തെ ചതുരശ്രബാഹുക്കൾ രണ്ടിനേയും ത്ര്യശ്രബാഹുക്കൾ എന്നും ഇഷ്ടകർണ്ണത്തെ ഭൂമി എന്നും കല്പിച്ചു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയവണ്ണം ലംബത്തെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ മറ്റെ പുറത്തെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ലംബത്തേയും ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണാർദ്ധത്തെക്കൊണ്ടു ലംബയോഗത്തെ ഗുണിപ്പൂ. അതു് ഈ ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ഫലമാകുന്നതു്, ലംബംകൊണ്ടു ഭൂമ്യർദ്ധത്തെ ഗുണിച്ചാൽ ത്ര്യശ്രഫലമുണ്ടാകും എന്നിട്ടു്. ഇതുണ്ടു ചൊല്ലീട്ടു്—§

"ലംബഗുണം ഭൂമ്യർദ്ധം സ്പഷ്ടം ത്രിഭുജേ ഫലം ഭവതി" എന്നു്.

ഇവിടെ ഇസ്സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു കല്പിപ്പൂ ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തെ.

"പഞ്ചാശദേകസഹിതാ വദനം യദീയം |
ഭൂഃ പഞ്ചസപ്തതിമിതാ ച മിതോഷ്ടഷഷ്ട്യാ ||
സവ്യോ ഭുജോ ദ്വിഗുണവിംശതിസമ്മിതോന്യ-
സ്തസ്മിൻ ഫലശ്രവണലംബമിതി പ്രചക്ഷ്വ" || ¶
"അത്രേശകോണഗാമീഷ്ടഃ കർണ്ണസ്സപ്തസപ്തതി സംഖ്യഃ" |

ഇവിടെ പടിഞ്ഞാറെ പുറത്തെ ബാഹുവിനെ ഭൂമി എന്നും കിഴക്കേതിനെ മുഖമെന്നും ചൊല്ലീ. ഈശാനകോണോടു നിരൃതികോണോടുള്ള കർണ്ണം എഴുപത്തേഴു്. അതിനെ ഇഷ്ടകർണ്ണമെന്നും ഇതിനെ ചതുരശ്രത്തിനകത്തുടെ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കും ഭൂമിയായിട്ടിരിപ്പൊന്നു് എന്നും കല്പിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ ഒരു സംഖ്യാനിയമത്തെ ആശ്രയിച്ചുകൊണ്ടാൽ ഓർപ്പാനെളുതു്. ഇവിടെ അഗ്നികോണിങ്കന്നു് ഉണ്ടാകുന്ന ലംബം ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ നടുവിൽനിന്നു തെക്കു നീങ്ങി സ്പർശിക്കും; വായുകോണിങ്കന്നു് ഉണ്ടാകുന്നതു വടക്കു നീങ്ങിയും സ്പർശിക്കും. ഇവിടെ ഇക്കർണ്ണത്തിങ്കൽ രണ്ടു ലംബങ്ങളും സ്പർശിക്കുന്നതിന്റെ നടുപ്രദേശത്തിനു ലംബനിപാതാന്തരം എന്നു പേർ. ഇതു ഭൂമീടെ ഏകദേശമാകയാൽ രണ്ടു ലംബത്തിനും വിപരീതദിക്കായിട്ടിരിക്കും. ലംബങ്ങൾ രണ്ടും ഒരു ദിക്കായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ഒരു ലംബ

* ലീലാവതീ—അദ്ധ്യായം 6—ശ്ലോകം 167.

§ ലീലാവതീ—അദ്ധ്യായം 6—ശ്ലോകം 164.

¶ ലീലാവതീ—അദ്ധ്യായം 6—ശ്ലോകം 178.

ത്തിന്നു ശേഷമായി നീട്ടി കല്പിപ്പൂ മറ്റെ ലംബത്തെ; അതിന്നു ശേഷമായിട്ട് ഇങ്ങേ ലംബത്തേയും കല്പിപ്പൂ. ഇപ്പോളിതരേതരാഗ്രത്തിങ്കലോളം നീളും രണ്ടു ലംബങ്ങളും. പിന്നെ ലംബാഗ്രങ്ങളിൽ രണ്ടേടത്തും ലംബനിപാതാന്തരത്തെയും കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ ഒരായതചതുരശ്രമുണ്ടാകും. പിന്നെ ലംബയോഗവൎഗ്ഗവും ലംബനിപാതാന്തരവൎഗ്ഗവും കൂട്ടി മൂലിച്ചാൽ ഈ ആയതചതുരശ്രത്തിന്റെ കൎണ്ണമുണ്ടാകും, ലംബാഗ്രങ്ങളെ സ്പൎശിച്ചിട്ട്. ഇക്കൎണ്ണം വൃത്താന്തൎഭാഗത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രത്തിങ്കൽ കല്പിച്ചിരിക്കുന്ന ഇഷ്ടകൎണ്ണത്തിന്റെ മറ്റെ കൎണ്ണമായിട്ടിരിക്കുമത്. ഇതിന്ന് ഇതരകൎണ്ണമെന്നു പേർ. എന്നാലിതരകൎണ്ണവൎഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ലംബനിപാതാന്തരവൎഗ്ഗംപോയശേഷം ഈ ലംബയോഗവൎഗ്ഗം. ഈ ലംബയോഗവൎഗ്ഗവും ഇഷ്ടകൎണ്ണാൎദ്ധവൎഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവൎഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ പഞ്ചാശദേകസഹിതാ എന്നതുകൊണ്ടു ചൊല്ലിയ സംഖ്യാവിശേഷംകൊണ്ടു കല്പിച്ച ചതുരശ്രത്തിങ്കൽ മുഖവും ദക്ഷിണബാഹുവും തങ്ങളിലുള്ള യോഗത്തിങ്കന്നുണ്ടാകുന്ന ലംബം ഭൂമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു തെക്കു നീങ്ങി സ്പൎശിക്കും, മുഖത്തെക്കാൾ ദക്ഷിണബാഹു ചെറിയതു്, എന്നിട്ട്. ലംബാഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പൎശിക്കുന്ന ബാഹുക്കൾ രണ്ടിൽവെച്ചു യാതൊരു ബാഹു ചെറിയതു ഭൂമിടെ നടുവിൽനിന്ന് അതിന്റെ ദിക്കിൽ നീങ്ങീട്ടു ഭൂമിയെ സ്പൎശിക്കും ലംബം എന്നു നിയതം. ലംബസ്പൎശത്തിങ്കന്ന് ഇരുപുറവുമുള്ള ഭൂഖണ്ഡങ്ങൾക്ക് ആബാധകൾ എന്നു പേർ. ആ ലംബത്തെ സംബന്ധിച്ചിരിപ്പോ ചിലവ അവ രണ്ടും. പിന്നെ ഭൂമി എന്നു ചൊല്ലിയ ചതുരശ്രബാഹുവും ഉത്തരബാഹുവും തങ്ങളിലെ യോഗത്തിങ്കന്നുണ്ടാകുന്ന ലംബം നിരൃതീശകോണം നോക്കിയുള്ള ഇഷ്ടകൎണ്ണമാകുന്ന ഭൂമിയിങ്കൽ നേരെ നടുവിൽനിന്നു വടക്കു നീങ്ങിസ്പൎശിക്കും, ഭൂമിയേക്കാൾ ഉത്തരബാഹു ചെറിയതു്, എന്നിട്ട്. ഇവ്വണ്ണം ഇരിക്കയാൽ രണ്ടു ലംബത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ആബാധകളിൽ വടക്കെ പുറത്തെ ആബാധകൾ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്. ഇവിടെ ഇഷ്ടകൎണ്ണമാകുന്ന ഭൂമിടെ നടുവിന്നു തെക്ക് ഒരു ലംബസംപാതം, വടക്കു മറ്റേതു് ആകയാൽ ഭൂമദ്ധ്യത്തോടു ലംബസംപാതത്തോടുള്ള അന്തരാളങ്ങൾ രണ്ടും കൂടിയതു് ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നതു്. ആകയാൽ രണ്ടു ലംബത്തേയും സംബന്ധിച്ചിട്ട് ഒരു ദിക്കിലെ ആബാധകൾ രണ്ടിനേയും വരുത്തി തങ്ങളിൽ അന്തരിച്ചാലും വരും ഈ ലംബനിപാതാ

ന്തരം. ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരങ്ങൾ രണ്ടും വരുത്തി തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാലുംവരും ഈ ലംബനിപാതാന്തരം. പിന്നെ ദക്ഷിണബാഹുവിനെ മുഖമാക്കി മുഖത്തെ ദക്ഷിണബാഹുവാക്കി പകൎന്നുവെച്ചാലും ഇഷ്ടകൎണ്ണം ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കും. ഭൂമദ്ധ്യത്തെ കുറെ വടക്കെ നീങ്ങീട്ടു രണ്ടു ലംബവും ഭൂമിയെ സ്പൎശിക്കുന്നു. ആകയാൽ രണ്ടു ലംബത്തേയും സംബന്ധിച്ചുള്ള ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നതു്. ആബാധകൾകൊണ്ടു വരുത്തുകിൽ ഇവിടേയും വിശേഷമില്ല. ഒരു ദിക്കിലെ ആബാധകൾ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം തന്നെ അത്ര ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നതു്. പിന്നെ ഇവിടെ ഇഷ്ടകൎണ്ണത്തെക്കൊണ്ടു ചതുരശ്രത്തെ രണ്ടു ത്ര്യശ്രമാക്കി കല്പിക്കുമ്പോൾ ഈ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടിലും ഈരണ്ടു ഭുജകളുള്ളതിൽ ചെറിയവ രണ്ടും ഇഷ്ടകൎണ്ണത്തിന്റെ ഒരഗ്രത്തെ സ്പൎശിക്കുന്നു, വലിയ ഭുജകൾ രണ്ടും മറ്റേതു് അറ്റത്തെ സ്പൎശിക്കുന്നു, എന്നിരിക്കിൽ ഭൂമിയായി കല്പിച്ചിരിക്കുന്ന ഇഷ്ടകൎണ്ണത്തിന്റെ നടുവിങ്കന്നു ചെറിയ ഭുജകൾ ഉള്ള ദിക്കുനോക്കി നീങ്ങീട്ടിരിക്കും രണ്ടു ലംബങ്ങളുടേയും ഭൂസ്പൎശം. ആകയാൽ ഭൂമദ്ധ്യവും ലംബസംപാതവും ഉള്ള അന്തരങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം ലംബനിപാതാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. യാതൊരിടത്തു പിന്നെ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽവെച്ചു് ഒന്നിന്റെ വലിയഭുജയും ഒന്നിന്റെ ചെറിയ ഭുജയും കൂടി കൎണ്ണത്തിന്റെ ഒരഗ്രത്തെ സ്പൎശിച്ചിരിക്കും, മറ്റെ അഗ്രത്തേയും ഒന്നിന്റെ വലിയ ഭുജയും ഒന്നിന്റെ ചെറിയ ഭുജയുംകൂടി സ്പൎശിച്ചിരിക്കുന്നു, അവിടെ ഇഷ്ടകൎണ്ണമാകുന്ന ഭൂമിടെ മദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു് ഇരുപുറവും സ്പൎശിക്കും ലംബങ്ങൾ. ഭൂമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു ചെറിയ ഭുജകളുള്ള ദിക്കുനോക്കി നീങ്ങി ഇരിക്കും ഭൂലംബങ്ങളുടെ സംപാതം എന്നു നിയതമാകയാൽ ഇവിടെ ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരങ്ങളുടെ യോഗം ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നതു്. ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരമാകുന്നതു പിന്നെ ആബാധാന്തരാൎദ്ധം. വലിയ ആബാധയുടെ അഗ്രത്തിങ്കലും ചെറിയ ആബാധയോളം വേർപെടുത്താൽ നടുവിൽ ആബാധാന്തരം ശേഷിക്കും. ഇതിന്റെ നടുവിൽ ഭൂമദ്ധ്യമാകുന്നതു്. ആകയാൽ ആബാധാന്തരാൎദ്ധം ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരമാകുന്നതു് എന്നു വന്നു. ആകയാൽ ആബാധാന്തരാൎദ്ധങ്ങളുടെ യോഗംതാൻ അന്തരംതാൻ ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നതു്. പിന്നെ ഒരു ലംബത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ആബാധകൾ ര

ണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗാന്തരത്തെ ഈ ആബാധകളുടെ യോഗമാകുന്ന ഭൂമിയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ആബാധാന്തരമാകുന്നതു്. വർഗ്ഗാന്തരാർദ്ധത്തെ ഹരിച്ച ഫലം ആബാധാന്തരാർദ്ധമാകുന്നതു്. ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരവും ത്ര്യശ്രത്തിങ്കൽ ഭൂമിയെ ഒഴിച്ചുള്ള ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരവും തുല്യം, ആബാധാലംബങ്ങളാകുന്ന ഭുജാകോടികൾക്കു കർണ്ണങ്ങളായിട്ടിരിപ്പോ ചിലവയെല്ലാ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ രണ്ടു ഭുജകളും, എന്നിട്ടു്. ഇവിടെ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ രണ്ടിൽ വലിയതിന്റെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ചെറിയതിന്റെ വർഗ്ഗംപോയാൽ ലംബത്തിന്റെയും ചെറിയ ആബാധയുടേയും വർഗ്ഗം പോയിട്ടിരിക്കും. ഇതിൽ ലംബവർഗ്ഗം വലിയ ഭുജയുടെ വർഗ്ഗത്തിൽ നടേ ഉണ്ടായിട്ടിരുന്നതു പോയതു്. പിന്നെ വലിയ ആബാധയുടെ വർഗ്ഗം ശേഷിച്ചിട്ടുള്ളതു്. അതിങ്കന്നു ചെറിയ ആബാധയുടെ വർഗ്ഗം പോകുന്നു. ആകയാൽ ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരവും ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നു. എന്നാൽ ഇഷ്ടകർണ്ണമാകുന്ന ഭൂമിയുടെ ഒരു പുറത്തെ ഭുജകൾ രണ്ടിലുംവെച്ചു വലിയതിന്റെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ചെറിയതിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞ ശേഷത്തിന്റെ അർദ്ധവും ഈ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ മറ്റെ പുറത്തെ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗാന്തരാർദ്ധവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടുകതാൻ അന്തരിക്കതാൻചെയ്തു് അതിനെ ആബാധായോഗമാകുന്ന ഇഷ്ടകർണ്ണംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നതു് ആകയാൽ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരു പാർശ്വത്തിങ്കലെ ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരത്തിൽ മറ്റേ പാർശ്വത്തിങ്കലെ ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം കൂട്ടുക വേണ്ടുവതു് എങ്കിൽ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ രണ്ടു പാർശ്വത്തിങ്കലെയും ഈരണ്ടു ത്ര്യശ്രഭുജകൾ ഉള്ളതിൽ ഒരു ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ വലിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തോടു മറ്റെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ വലിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തെ കൂട്ടി ഇതിങ്കന്നു രണ്ടേടത്തേയും ചെറിയ ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെ കളയൂ. ശേഷം ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും യോഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ രണ്ടേടത്തേയും വലിയ ഭുജകളിൽ ഒട്ടേറ്റു ശേഷിക്കുന്നു. അശ്ലേഷങ്ങൾ രണ്ടും ധനഭൂതങ്ങളാകയാൽ വലിയ ഭുജകൾ രണ്ടും ധനഭൂതങ്ങൾ എന്നു കല്പിക്കാം. ആകയാൽ ധനങ്ങളുടെ യോഗത്തിങ്കന്നു ഋണങ്ങളുടെ യോഗംകളയാം എന്നു ഹേതുവാകുന്നതു്. യാതൊരിടത്തു പിന്നെ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും അന്തരത്തെ ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ, അവിടെ രണ്ടു വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളിൽവെച്ചു ചെറിയ വർഗ്ഗാന്തരം യാതൊരു ഭുജാവർഗ്ഗത്തിലെ ശേഷം ആ ഭുജാവർഗ്ഗം മുഴുവനെ ഋണഭൂതമെന്നിരിക്കും.

ഇവിടെ ശേഷിച്ചതിനേയും മറെറ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ വലിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളകയല്ലൊ ചെയ്യുന്നതു്, എന്നിട്ടു്. ആകയാൽ ഇച്ചൊല്ലിയ ഊനഭൂതഭുജാവർഗ്ഗത്തെ, തന്നെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചെറിയ ഭുജയുടെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നും മറെറ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ വലിയ ഭുജയുടെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നുംകൂടി കളയുന്നു എന്നു വന്നിരിക്കും. ആകയാൽ ഇച്ചൊല്ലിയ ഊനഭൂതഭുജാവർഗ്ഗവും മറെറ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ചെറിയ ഭുജയുടെ വർഗ്ഗവും കൂടിയതു് ഊനരാശി, മറെറ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങൾ രണ്ടും കൂടിയതു ധനരാശി. തങ്ങളിലന്തരിച്ച ശേഷം ധനം. ഇങ്ങനെ ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരങ്ങളെ അന്തരിക്കുന്നേടത്തെ പ്രകാരം.

"അന്തരയോഗേ കാര്യേ രാശിദ്വയയോർമ്മഹത്ത്വതസ്ത്യാജ്യാ |
ഇതരയുതിരന്തരേ ചേന്ന്യൂനാധികയോഗതോന്ന്യയുതിഃ" ||

എന്നും ഉണ്ടു്.

യാതൊരിടത്തു കർണ്ണത്തിന്റെ ഇരുപുറത്തുമുള്ള ലംബങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ഈരണ്ടു ഭുജകളിൽ വലിയ ഭുജകൾ രണ്ടും ലംബങ്ങളുടെ ഒരു ദിക്കില്, ചെറിയവ രണ്ടും ഒരു ദിക്കില്, രണ്ടും തെക്കു് എന്നുതാൻ വടക്കു് എന്നുതാൻ ഈവണ്ണമിരിക്കുന്നു, അവിടെ ഇച്ചൊല്ലിയ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ഭൂമുഖങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും ഉണ്ടാക്കി തങ്ങളിൽ അന്തരിപ്പൂ. എന്നാൽ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ അന്തരമുണ്ടാകും. യാതൊരിടത്തു പിന്നെ ഒരു ലംബത്തിനു് ഒരു ദിക്കിലെ ഭുജ വലിയതു്, മറെറ ലംബത്തിന്നു മറെറ ദിക്കിലെ ഭുജ വലിയതു് എന്നിരിക്കുന്നു, ഇവിടെ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ യോഗം ഉണ്ടാക്കുവാൻ വലിയ ഭുജകൾ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗം തങ്ങളിൽ കൂട്ടേണ്ടുകയാൽ ഭൂമുഖവർഗ്ഗവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളുടെ വർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടേണ്ടൂ. ആകയാൽ എല്ലാടവും പ്രതിഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗം ചെയ്ക വേണ്ടുവതു് എന്നു നിയതം. ഇങ്ങനെ പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെ അർദ്ധത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണംകൊണ്ടു് ഹരിച്ചാൽ ലംബനിപാതാന്തരമുണ്ടാകും. ഈ അന്തരാർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗമുണ്ടാകും. പിന്നെ ഇതരകർണ്ണവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗം പോയശേഷം ലംബയോഗവർഗ്ഗമാകുന്നതു്. പിന്നെ ലംബയോഗവർഗ്ഗവും ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു നാലിൽ ഹരിച്ച ഫലം ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമാകുന്നതു്. ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗം കൂടിയിരിക്കുന്ന ലംബയോഗവർഗ്ഗമാകുന്നതു്

ഇതരകർണ്ണവർഗ്ഗം ആയിട്ടിരിക്കും. അതിനെ തന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നുതാകിൽ ശോദ്ധ്യമായിരിക്കുന്ന ലംബസമ്പാതാന്തരവർഗ്ഗത്തേയും ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിട്ടു കളയണം, സമച്ഛേദങ്ങൾക്കേ യോഗവിയോഗയോഗ്യതയുള്ളൂ, എന്നിട്ട്. ആകയാൽ കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്ന് ഇതിനെ കളയേണ്ടു എന്നുവരും. ഇവിടെ പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗങ്ങളുടെ അർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും അന്തരം യാതൊന്ന് ഇതിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചിട്ടു ലംബസമ്പാതാന്തരവർഗ്ഗത്തെ ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഇതിനെ തന്നെ പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നു. ആകയാൽ പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവർഗ്ഗത്തെതന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗവും ഇതരകർണ്ണവർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു കളയേണ്ടുവതു്. പിന്നെ ഇതിന്റെ നാലൊന്നു ഫലവർഗ്ഗമാകുന്നതു്. ഇവിടെ ഇവ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരത്തെ നാലിൽ ഹരിക്കേണ്ടുന്നു. അവ രണ്ടിനേയും അർദ്ധിച്ചു വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിച്ചാൽ ആ വർഗ്ഗാന്തരചതുരംശം വരും. ആകയാൽ കർണ്ണഘാതാർദ്ധത്തെയും പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരാർദ്ധത്തെയും വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിക്കാം. അതു ഫലവർഗ്ഗം. ഈ ന്യായംകൊണ്ടു തന്നെ പ്രതിഭുജാർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗങ്ങളെ അന്തരിക്കിലുമാം എന്നും വരും. "പ്രതിഭുജദളകൃതിയുത്യോൎയ്യദന്തരം യച്ച കർണ്ണഘാതദളം വർഗ്ഗാന്തരപദമനയോശ്ചതുർഭുജക്ഷേത്രഫലമധികം" എന്നുണ്ടു്. ഇവിടെ പിന്നെ കർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം എന്നതിനെക്കൊണ്ടു കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെ വരുത്തുന്നു എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലീ. യാതൊരിടത്തു രണ്ടു ഫലങ്ങളുടെ ഘാതത്തെ ഉണ്ടാക്കേണ്ടുന്നൂ, അവിടെ ഗുണ്യങ്ങൾ രണ്ടും ഗുണകാരങ്ങൾ രണ്ടും ഇവ നാലും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു രണ്ടിന്റേയും ഹാരകങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഫലങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും മൂലത്തെ സ്പർശിച്ചിരിക്കുന്ന ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ഈ ഘാതങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയതു് ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിനു ഗുണ്യമാകുന്നതു്. പിന്നെ ഇതരകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം ഇതരകർണ്ണത്തിനു ഗുണ്യമാകുന്നതു്. പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഗുണ്യം ഇതരകർണ്ണത്തിന്റെ ഹാരകമാകുന്നതു്. ഇതരകർണ്ണത്തിന്റെ ഗുണ്യം ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഹാരകമാകുന്നതു്. ആകയാൽ ഗുണ്യങ്ങൾ ത

ങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ഹാരകങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ഒന്നുതന്നെ ആകയാൽ രണ്ടേടത്തെ ഗുണകാരങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതുതന്നെ ഫലങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതാകുന്നത്. ഇവിടെ രണ്ടു കർണ്ണത്തിങ്കലും ഗുണകാരമാകുന്നതു ഭുജാപ്രതിഭുജകൾ ഈരണ്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച കൂട്ടിയതാകയാൽ ഇതിന്റെ വർഗ്ഗം കർണ്ണങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. വർഗ്ഗിക്കുംമുമ്പെ കർണ്ണങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. ഗുണിച്ചിട്ടു പിന്നെ വർഗ്ഗിച്ചതും വർഗ്ഗിച്ചിട്ടു പിന്നെ ഗുണിച്ചതും തുല്യം. എന്നാലൊരു ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതത്തിൽ മററെ ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതത്തെക്കൂട്ടി വർഗ്ഗിച്ചതു കർണ്ണവർഗ്ഗഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു നിയതമാകയാൽ ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിനെ കർണ്ണവർഗ്ഗഘാതത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷം ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗവും ലംബയോഗവർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. ഇതിൽ നാലൊന്നു ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമാകുന്നത്. ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാകുന്നതു പിന്നെ ചതുരശ്രത്തിങ്കലെ പൂർവ്വാപരഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും ദക്ഷിണോത്തരഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും—ഇവ രണ്ടിന്റെയും അന്തരാർദ്ധവും അർദ്ധാന്തരവും ഒന്നെ എന്നിട്ട്—അർദ്ധാന്തരങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിനെ കർണ്ണവർഗ്ഗഘാതത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു നാലിൽ ഹരിക്കേണ്ടുകയാൽ രണ്ടിനേയും നാലിൽ ഹരിച്ചിട്ട് അന്തരിക്കാം വർഗ്ഗരൂപങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഇവ രണ്ടിനേയും നാലിൽ ഹരിക്കേണ്ടുകയാൽ ഇവററിന്റെ അർദ്ധങ്ങളെ വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിക്കിലുമാം, വർഗ്ഗചതുരംശവും അർദ്ധവർഗ്ഗവും തുല്യമാകയാൽ. എന്നാൽ ഭൂമ്യർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും മുഖാർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ പിന്നെ ദക്ഷിണബാഹ്വർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും ഉത്തരബാഹ്വർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. പിന്നെ ഈ വർഗ്ഗയോഗങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയുമന്തരം യാതൊന്ന്, ഇഷ്ടേതരകർണ്ണങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച് അർദ്ധിച്ചതും യാതൊന്ന്, ഇവ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗാന്തരവും ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം. ഇതിനെച്ചൊല്ലീ "പ്രതിഭുജദളകൃതിയുത്യോ'ർ യദന്തരം" എന്നതിനെക്കൊണ്ട്. ഈ വർഗ്ഗാന്തരത്തെ പിന്നെ ഇവ രണ്ടും തങ്ങളിലെ യോഗത്തെ തങ്ങളിലെ അന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചിട്ടും ഉണ്ടാക്കാം. യോഗാന്തരാഹതിവ്വർഗ്ഗാന്തരമെല്ലൊ എന്നിട്ട്. യോഗാന്തരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം പിന്നെ. ഭൂമുഖങ്ങളാകുന്ന ബാഹുക്കളുടെ ഘാതവും ദക്ഷിണോത്തരബാ

ഹുക്കളുടെ ഘാതവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടി അർദ്ധിച്ചതിനെ രണ്ടേടത്തു വെച്ച് ഒന്നിൽകൂട്ടൂ വർഗ്ഗയോഗാന്തരം, ഒന്നിങ്കന്നു കളയൂ. ഇവ യോഗാന്തരങ്ങളാകുന്നതു്. ഇച്ചൊല്ലിയ വർഗ്ഗയോഗാന്തരമാകുന്നതു ഭുജമുഖങ്ങളുടെ അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളുടെ അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും തങ്ങളിൽ അന്തരിച്ചതു്. പിന്നെ യാതൊരിടത്തു് ഒരു രാശിയിൽ മററ രണ്ടു രാശികളുടെ അന്തരത്തെ കൂട്ടേണ്ടൂ, അവിടെ അന്തരിക്കുന്ന രാശികളിൽവെച്ച വലിയതിനെ കൂട്ടൂ, ചെറിയതിനെ കളയൂ. എന്നാൽ അതു് ആ അന്തരത്തെ കൂട്ടിയതായിട്ടു വരും. യാതൊന്നിങ്കന്നു പിന്നെ അന്തരം കളയേണ്ടൂ, അതിങ്കൽ ചെറിയ രാശിയെ കൂട്ടൂ, വലിയ രാശിയെ കളയൂ. അതു് ആ അന്തരം കളഞ്ഞതായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ പിന്നെ ഇവ്വണ്ണമാകിലുമാം യോഗാന്തരമുണ്ടാക്കുവാൻ ഭുജമുഖഘാതാർദ്ധത്തെ വേറെവെച്ച് അവററിൻെറ അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെ അതിങ്കൽ സംസ്കരിപ്പൂ. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരബാഹുഘാതാർദ്ധത്തിൽ അവററിൻെറ അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെ സംസ്കരിപ്പൂ. പിന്നെ ഇങ്ങനെ സംസ്കൃതങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഘാതാർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. അതു യോഗാന്തരങ്ങളിൽ ഒന്നായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഭുജമുഖാർദ്ധവർഗ്ഗയോഗത്തെ കൂട്ടൂ ആ ഘാതത്തിൽ, ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധവർഗ്ഗയോഗത്തെ കളയൂ ആ ഘാതത്തിങ്കന്നു്. ഇവ തങ്ങളിലെ യോഗം ഒരു രാശി. ഭുജമുഖാർദ്ധവർഗ്ഗയോഗം തൽഘാതത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധവർഗ്ഗയോഗം തൽഘാതത്തിങ്കൽ കൂട്ടി ഇവ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയതു രണ്ടാം രാശി. ഇവിടെ യാതൊരു പ്രതിഭുജാഘാതാർദ്ധത്തിങ്കന്നു് ഇവററിൻെറ അർദ്ധവർഗ്ഗയോഗം കളയേണ്ടുന്നു, അവിടെ ഘാതാർദ്ധം അർദ്ധങ്ങളുടെ ഘാതത്തിലിരട്ടിയായിട്ടിരിക്കും. ഇവററിൻെറ വർഗ്ഗയോഗം പിന്നെ അന്തരവർഗ്ഗംകൊണ്ടു അധികമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ വർഗ്ഗയോഗം ദ്വിഘ്നഘാതത്തിങ്കന്നു കളയരുതു്. ആകയാൽ ഈ പ്രതിബാഹുക്കളുടെ അർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവർഗ്ഗം ഋണമായിട്ടിരിക്കും. മററെ ഘാതത്തിങ്കൽ മറേറതു പിന്നെ പ്രതിബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, ദ്വിഘ്നഘാതവും വർഗ്ഗയോഗവും കൂട്ടുകയാൽ.

"വർഗ്ഗയോഗോ ദ്വയോ രാശ്യോർദ്വിഘ്നഘാതേന സംയുതഃ ।
ഹീനോ വാ തൽപദേ രാശ്യോര്യോഗഭേദൌ പ്രകീർത്തിതൌ" ॥

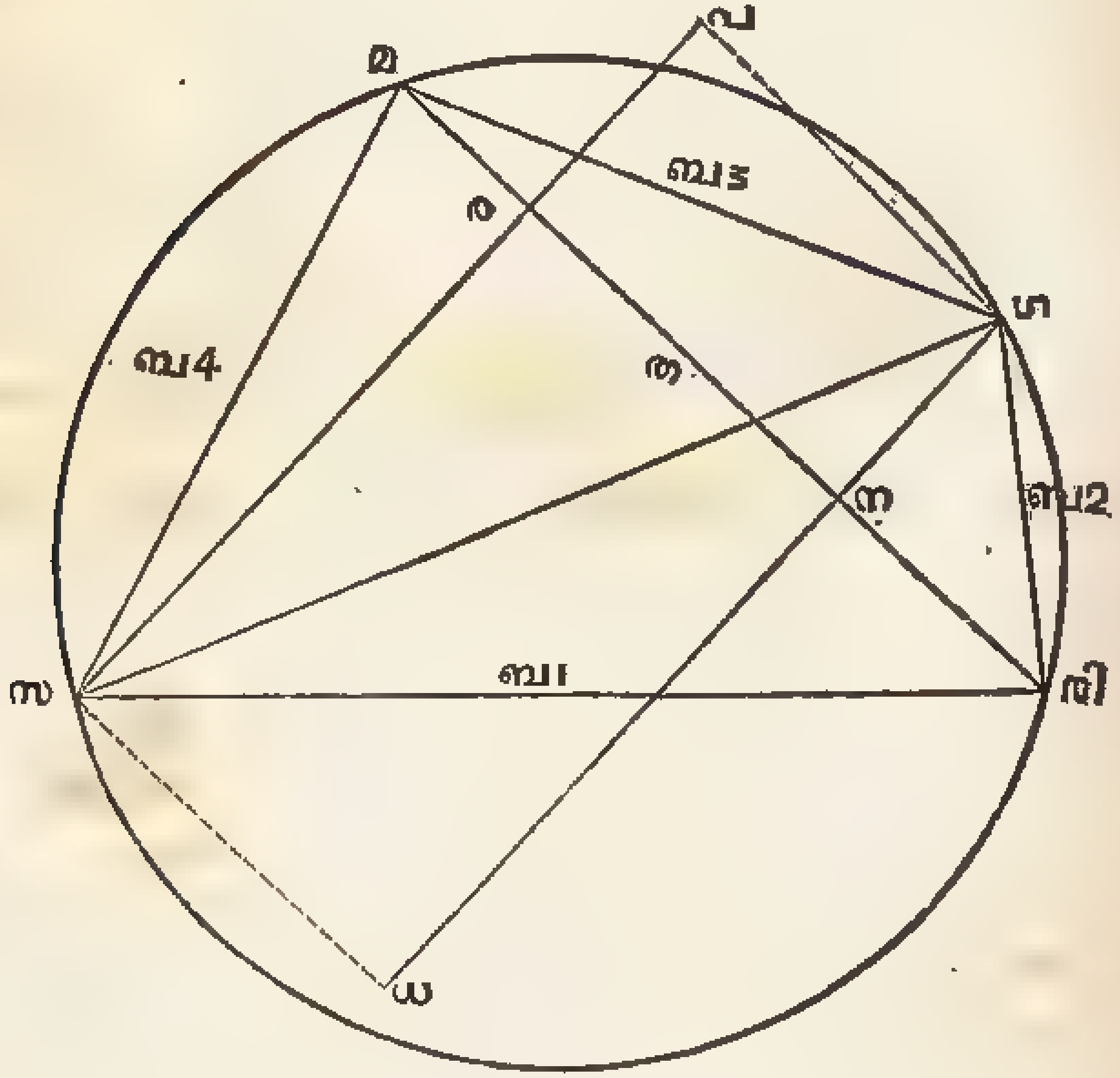
എന്നുണ്ടാകയാൽ. ഇവിടെ പിന്നെ ഭുജാർദ്ധവും മുഖാർദ്ധവും ഇവ രണ്ടിൻേറയും യോഗത്തിൻെറ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വ

ർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞതായിട്ടിരിക്കും ഒന്ന്. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞതു രണ്ടാമത്. ഇവ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമാകുന്നത്. ഇവിടെയും ഇവ രണ്ടും ഓരോ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളായിട്ടിരിക്കയാൽ രണ്ടിനേയും യോഗാന്തരഘാതംകൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കാം. പിന്നെ ഈ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിക്കേണ്ടുകയാൽ രണ്ടു യോഗവും രണ്ട് അന്തരവും ഇവ നാലും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം. എന്നാലിവിടെ ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗത്തെ രണ്ടേടത്തുവെച്ച് ഒന്നിൽ ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരത്തെ കളയൂ, ഒന്നിൽ കൂട്ടൂ. ഇങ്ങനെ ഇവ രണ്ടു രാശികളാകുന്നത്. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗത്തെയും രണ്ടേടത്തുവെച്ച് ഒന്നിൽ ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരത്തെ കൂട്ടൂ, ഒന്നിൽ കളയൂ ഇതിനെ. ഇവ മറ്റെ രണ്ടു രാശികളാകുന്നത്. ഇവ നാലും തങ്ങളിൽ ഗുണിക്കേണ്ടൂ ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമുണ്ടാവാനായിക്കൊണ്ട്. ഇവിടെ ഇച്ചൊല്ലിയ നാലു രാശികളേയും ഇവ്വണ്ണമുണ്ടാക്കുന്നൂ. ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിന്റെ ബാഹുക്കൾ നാലിനേയും കൂട്ടിയ സംഖ്യ യാതൊന്ന് അതിന്റെ അർദ്ധത്തെ നാലേടത്തുവെച്ചു നാലിൽനിന്നും ഓരോ ബാഹുക്കളെ കളയൂ ക്രമേണ. അവിടെ ശേഷിച്ച രാശികൾ നാലും ഇച്ചൊല്ലിയവ നാലുമാകുന്നത്. ഇവിടെ ബാഹുയോഗാർദ്ധമാകുന്നതു ബാഹ്വർദ്ധങ്ങൾ നാലിന്റേയും യോഗം. ഇതിങ്കന്ന് ഒരു ബാഹുവിനെ മുഴുവനെ കളയുന്നൂ അതിൽ തന്റെ അർദ്ധംകൂടി ഉണ്ടാകയാൽ അതിങ്കന്നു പോകും. മറ്റെ അർദ്ധം പ്രതിബാഹ്വർദ്ധത്തിങ്കന്നും പോവും. അവിടെ പ്രതിബാഹ്വർദ്ധം വലുത് എന്നിരിക്കിൽ അവറ്റിന്റെ അന്തരം ശേഷിക്കും. പ്രതിബാഹ്വർദ്ധം ചെറുത് എന്നിരിക്കിൽ ഇവറ്റിന്റെ അന്തരം കൂടി പോയിരിക്കും മറ്റെ ബാഹ്വർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തിങ്കന്ന്. ഇവിടെ സർവ്വദോർയ്യുതിദളത്തിങ്കന്നു മുഖമാകുന്ന ബാഹുവിനെ കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗവും ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവും കൂടിയതായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഈ അന്തരംപോയതായിട്ടിരിക്കും ഭൂമിയാകുന്ന ബാഹുവിനെ കളഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. പിന്നെ സർവ്വദോർയ്യുതിദളത്തിങ്കന്നു ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളിൽ ചെറിയതിനെ കളഞ്ഞാൽ ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവും കൂടിയതായിട്ടിരിക്കും. വലിയതിനെ

കളഞ്ഞതു് ഈ അന്തരംപോയതായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇവ നാലും തങ്ങളിൽ ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമത്രേ. ഇതുണ്ടു് ചൊല്ലീട്ടു്:

"സർവ്വദോർയ്യുതിദളഞ്ചതുഃസ്ഥിതം ബാഹുഭിർവ്വിരഹിതഞ്ച തദ്ധതേഃ ।
മൂലമത്ര നിയതശ്രുതൌ ഫലം ത്ര്യശ്രബാഹുജമപി സ്ഫുടം ഭവേൽ ॥"

[വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന ഒരു വിഷമചതുരശ്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലത്തെ കർണ്ണവും വ്യാസവുംകൂടാതെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു. മുമ്പിലെപ്പോലെ പരിലേഖം 53-ൽ സരിഗമ എന്നു വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന



പരിലേഖം 53

ഒരു ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. പടിഞ്ഞാറെ പുറത്തു ഭുജ (ഭൂമി) സരി= 75(ബ$_1$); കിഴക്കെ ഭുജ (മുഖം)=51 (ബ$_3$); വടക്കെ ഭുജ=68(ബ$_4$); തെക്കെ ഭുജ=40 (ബ$_2$). ഇഷ്ടകർണ്ണം (ക$_1$)=മരി=77; സഗ എന്ന മറ്റെ കർണ്ണത്തിന്നു് ഇതരകർണ്ണ(ക$_2$)മെന്നു പേർ.

ഇഷ്ടകർണ്ണം ചതുരശ്രത്തെ സരിമ, ഗരിമ എന്നു രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളായിട്ടു ഭാഗിക്കുന്നു. ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കു സാധാരണമായിട്ടുള്ള ഭൂമി മരി എന്ന ഇഷ്ടകർണ്ണം. ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങളിലെ ബാഹുയോഗങ്ങളായിരിക്കുന്ന സ, ഗ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽനിന്നു സര, ഗന എന്ന ലംബങ്ങളെ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതദിക്കായിട്ടുണ്ടാക്കുക. മരി യുടെ മദ്ധ്യം ത.

$$\therefore \text{സര} = \frac{\text{ബ}_1 \times \text{ബ}_4}{\text{വ്യാസം}};\ \text{ഗന} = \frac{\text{ബ}_2 \times \text{ബ}_3}{\text{വ്യാസം}}$$

മസരി എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $= \frac{\text{ക}_1}{2} \times \frac{\text{ബ}_1 \times \text{ബ}_4}{\text{വ്യാസം}}$

മഗരി എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $= \frac{\text{ക}_1}{2} \times \frac{\text{ബ}_2 \times \text{ബ}_3}{\text{വ്യാസം}}$

ലംബങ്ങൾ രണ്ടും ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതദിക്കാകയാൽ അവ രണ്ടും തുല്യദിക്കുകൾ. ഒരു ലംബത്തിന്നു ശേഷമായിട്ടു മറെറ ലംബത്തെ നീട്ടി കല്പിപ്പൂ, രണ്ടാംലംബത്തിന്നു ശേഷമായിട്ട് ആദ്യത്തെ ലംബത്തേയും.

അപ്പോൾ പസ = ഗധ = ലംബയോഗം.

നര = ഗപ = സധ = ലംബനിപാതാന്തരം.

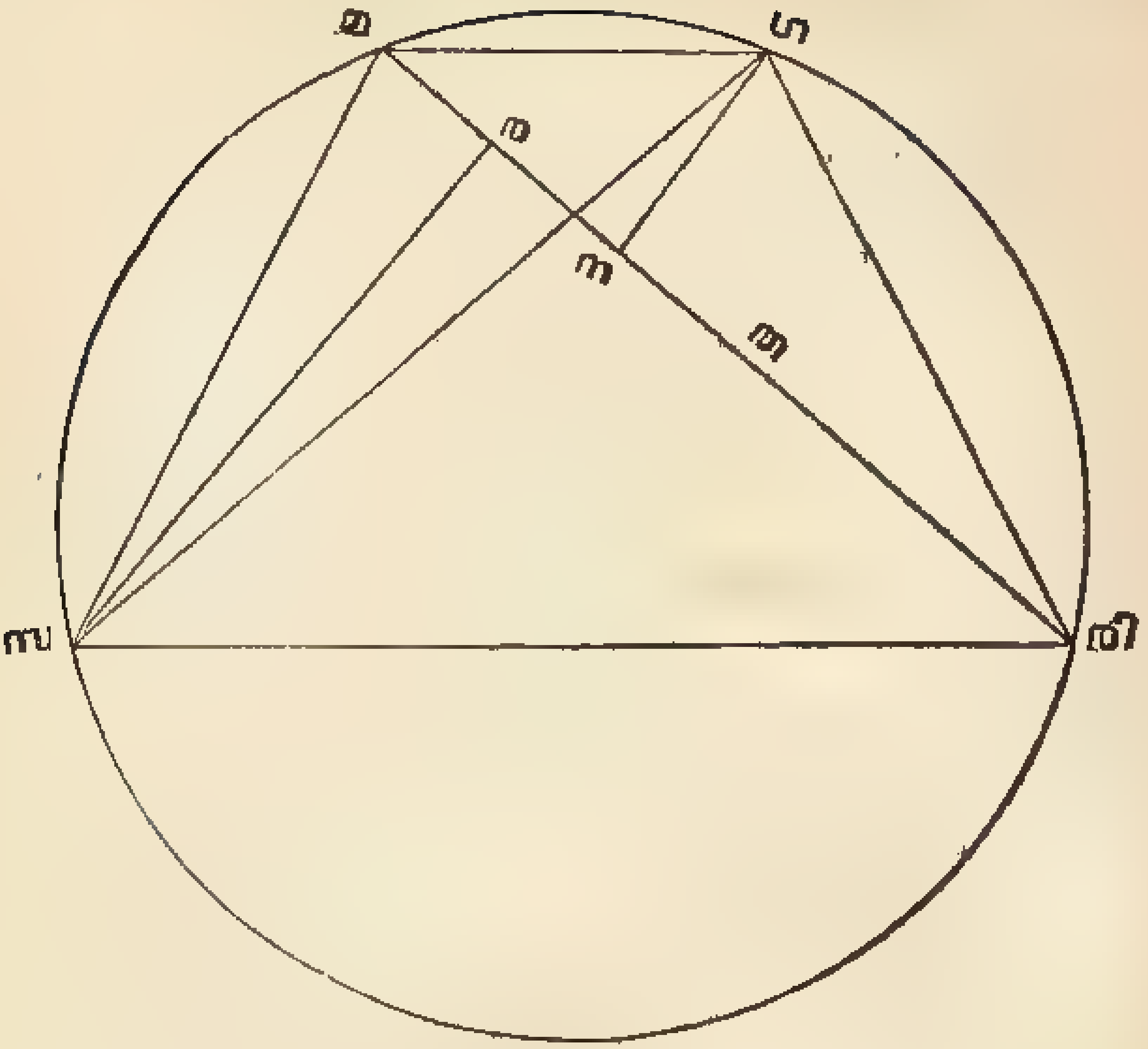
അപ്പോൾ രണ്ടു ബാഹുക്കൾ ലംബയോഗത്തിന്നു തുല്യമായിട്ടും മറേറവ രണ്ടും ലംബനിപാതാന്തരത്തിന്നു തുല്യമായിട്ടുമൊരു് ആയതചതുരശ്രം സധഗപ ഉണ്ടാകും. ഇതിന്റെ കർണ്ണം സഗ വിഷമചതുരശ്രത്തിന്റെ ഇതരകർണ്ണമാകുന്നു. ($=\text{ക}_2$)

$$\therefore \text{ക}_2^2 = \text{സപ}^2 + \text{പഗ}^2$$

∴ ലംബയോഗവർഗ്ഗം = ഇതരകർണ്ണവർഗ്ഗം − ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗം.

ലംബയോഗവർഗ്ഗം × ഇഷ്ടകർണ്ണാർദ്ധവർഗ്ഗം = ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം.

എല്ലാ ത്ര്യശ്രങ്ങളിലും ലംബനിപാതം ഭൂമദ്ധ്യത്തിൽനിന്നു ചെറിയ ഭുജയുടെ ഭാഗത്തേക്കു നീങ്ങി കിടക്കും. അതുകൊണ്ട് ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഇരുപുറവുമുള്ള ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ഒന്നിന്റെ ചെറിയ ഭുജയും മറേറതിന്റെ വലിയ ഭുജയും ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ലംബനിപാതങ്ങൾ ഇഷ്ടകർണ്ണമദ്ധ്യത്തിന്റെ ഇരുപുറവും സംഭവിക്കും (പരിലേഖം 53 നോക്കുക) ചിലപ്പോൾ അവ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിന്റെ ഒരുപുറത്തു സംഭവിക്കും (പരിലേഖം 54 നോക്കുക). ഇവിടെ ദക്ഷിണമുഖഭുജകളെ പകർന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു. അപ്പോൾ ചെറിയ ഭുജകൾ രണ്ടും ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരഗ്രത്തിങ്കലും വലിയ ഭുജകൾ രണ്ടും അതിന്റെ മറെറ അഗ്രത്തിലുമായിട്ടിരിക്കും. അതായതു ലംബനിപാതങ്ങൾ രണ്ടും ഇഷ്ടകർണ്ണമദ്ധ്യത്തിങ്കൽനിന്നു ചെറിയ ഭുജകളുള്ള പുറത്തു സംഭവിക്കുന്നു.



പരിലേഖം 54

പരിലേഖം53-ൽലംബനിപാതാന്തരം = മന − മര.

= നര

= രിര − രിന.

= ഭ്രമദ്ധ്യത്തിന്റെ ഒരു പുറത്തെ ആബാധാന്തരം

പരിലേഖം54ലും ലംബനിപാതാന്തരം = ഒരു പുറത്തെ ആബാധാന്തരംതന്നെ.

ആബാധകളെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം രണ്ടു വിഷയങ്ങളിലും ലംബനിപാതാന്തരം ഒരു പുറത്തെ ആബാധാന്തരം തന്നെ.

എന്നാൽ ഭ്രമദ്ധ്യത്തെ അനുസരിച്ചു ലംബനിപാതാന്തരത്തെ വരുത്തുകയാണെങ്കിൽ, സംസ്കാരത്തിന്നു വ്യത്യാസമുണ്ട്. ലംബനിപാതങ്ങൾ ഇഷ്ടകർണ്ണമദ്ധ്യത്തിന്റെ ഇരുപുറത്താണെങ്കിൽ ഭ്രമദ്ധ്യലംബനിപാതങ്ങളുടെ യോഗം ലംബനിപാതാന്തരമായിട്ടു വരും. ഒരു പുറത്താണെങ്കിൽ അവയുടെ അന്തരം ലംബനിപാതാന്തരം.

പരിലേഖം 53-ൽ ലംബനിപാതങ്ങൾ ഭ്രമദ്ധ്യത്തിന്റെ ഇരുപുറത്തു്.

അപ്പോൾ ലംബനിപാതാന്തരം = നര = തര + തന.

പരിലേഖം 54-ൽ ലംബനിപാതങ്ങൾ ഭ്രമദ്ധ്യത്തിന്റെ ഒരുപുറത്തു്.

∴ ലംബനിപാതാന്തരം = നര = തര − തന.

മഗരി എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ, ആബാധാന്തരം $= \text{മന} - \text{നരി}$ (പരിലേഖം 53-ൽ)

$$= (\text{മത} + \text{തന}) - (\text{തരി} - \text{തന})$$

$$2 \times \text{തന}.$$

$$\therefore \text{തന} = \frac{\text{മന} - \text{നരി}}{2}$$

അതുപോലെതന്നെ $\text{തര} = \dfrac{\text{രരി} - \text{രമ}}{2}$

$$\therefore \text{നര} = \frac{\text{രരി} - \text{രമ}}{2} + \frac{\text{മന} - \text{നരി}}{2}$$

$$= \frac{\text{ബാ}_1^2 - \text{ബാ}_4^2}{2\text{ക}_1} + \frac{\text{ബാ}_3^2 - \text{ബാ}_2^2}{2\text{ക}_1} \text{ (ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരം = ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരം)}$$

$$= \frac{(\text{ബാ}_1^2 + \text{ബാ}_3^2) - (\text{ബാ}_2^2 + \text{ബാ}_4^2)}{2\text{ക}_1}$$

$$= \frac{\text{പ്രതിഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗങ്ങളുടെ അന്തരം}}{2 \times \text{ഇഷ്ടകർണ്ണം}}$$

പരിലേഖം 54-ൽ, ലംബനിപാതാന്തരം $= \text{തര} - \text{തന}$

$$= \frac{\text{ബാ}_1^2 - \text{ബാ}_4^2}{2\text{ക}_1} - \frac{\text{ബാ}_3^2 - \text{ബാ}_2^2}{2\text{ക}_1}$$

$$= \frac{\text{ബാ}_1^2 + \text{ബാ}_2^2}{2\text{ക}_1} - \frac{\text{ബാ}_3^2 + \text{ബാ}_4^2}{2\text{ക}_1}$$

$$= \frac{\text{പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗങ്ങളുടെ അന്തരം}}{2 \times \text{ഇഷ്ടകർണ്ണം}}$$

എല്ലായിടത്തും ലംബനിപാതാന്തരം $= \text{നര}$

$$= \frac{\text{പ്രതിഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗങ്ങളുടെ അന്തരം}}{2 \times \text{ഇഷ്ടകർണ്ണം}}$$

(ഇവിടെ അന്തരങ്ങളുടെ യോഗത്തേയും അന്തരത്തേയും വരുത്തേണ്ടതിനുള്ള ന്യായത്തെ "അന്തരയോഗേ........"ഇത്യാദികൊണ്ടു പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു.)

$(\text{അ} - \text{ഇ})$, $(\text{ഉ} - \text{എ})$ എന്ന രണ്ടു് അന്തരങ്ങളെ കല്പിക്കുക.

ഇവിടെ $\text{അ} - \text{ഇ} > \text{ഉ} - \text{എ}$, എന്നും $\text{അ} > \text{ഇ} > \text{ഉ} > \text{എ}$ എന്നും കല്പിക്കുക.

ഇവയുടെ യോഗത്തിങ്കൽ മഹത്തുക്കളായിരിക്കുന്ന അ, ഉ ഇവയെക്കൂട്ടി ആ യോഗത്തിൽനിന്നു മറ്റേവ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തെ കളഞ്ഞാൽ ആ അന്തരങ്ങളുടെ യോഗം വരും.

$(\text{അ} - \text{ഇ}) + (\text{ഉ} - \text{എ}) = (\text{അ} + \text{ഉ}) - (\text{ഇ} + \text{എ})$ — ധനമിശ്രം.

ഇവയുടെ അന്തരത്തിങ്കൽ ആദ്യത്തേതിലെ വലിയ രാശിയുടേയും രണ്ടാമത്തേതിലെ ചെറിയ രാശിയുടേയും യോഗത്തിങ്കന്നു മറ്റേവ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തെ വാങ്ങിയാൽ അന്തരങ്ങളുടെ അന്തരം വരും.

അ − ഇ > ഉ − ഒ എന്നു കല്പിക്കകയാൽ ഇതും ധനതത്വം തന്നെ.

(അ − ഇ) − (ഉ − ഒ) = (അ + ഒ) − (ഇ + ഉ) — ധനതത്വം

പരിലേഖം 53-ൽ

$$\text{നര}^2 = \frac{\{(\text{ബ}_1{}^2 + \text{ബ}_3{}^2) - (\text{ബ}_2{}^2 + \text{ബ}_4{}^2)\}^2}{4\text{ക}_1{}^2}$$

$$\text{ലംബായോഗവൎഗ്ഗം} = \text{ക}_2{}^2 - \frac{\{(\text{ബ}_1 + \text{ബ}_3{}^2) - (\text{ബ}_2{}^2 + \text{ബ}_4{}^2)\}^2}{4\text{ക}_1{}^2}$$

ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവൎഗ്ഗം

$$= \text{ലംബായോഗവൎഗ്ഗം} \times \text{ശ്രുത്യൎദ്ധവൎഗ്ഗം}$$

$$= \left[\text{ക}_2{}^2 - \frac{\{(\text{ബ}_1{}^2 + \text{ബ}_3{}^2) - (\text{ബ}_2{}^2 + \text{ബ}_4{}^2)\}^2}{4\text{ക}_1{}^2}\right] \times \frac{\text{ക}_1{}^2}{4}$$

$$= \frac{4\text{ക}_1{}^2\text{ക}_2{}^2 - \{(\text{ബ}_1{}^2 + \text{ബ}_3{}^2) - (\text{ബ}_2{}^2 + \text{ബ}_4{}^2)\}^2}{4\text{ക}_1{}^2} \times \frac{\text{ക}_1{}^2}{4}$$

(സമച്ഛേദങ്ങൾക്കെ യോഗവിയോഗയോഗ്യതയുമുള്ള, എന്നിട്ട്.)

$$= \frac{4\text{ക}_1{}^2\text{ക}_2{}^2 - \{(\text{ബ}_1{}^2 + \text{ബ}_3{}^2) - (\text{ബ}_2{}^2 + \text{ബ}_4{}^2)\}^2}{16}$$

$$= \left(\frac{\text{ക}_1\text{ക}_2}{2}\right)^2 - \left\{\frac{\frac{\text{ബ}_1{}^2 + \text{ബ}_3{}^2}{2} - \frac{\text{ബ}_2{}^2 + \text{ബ}_4{}^2}{2}}{2}\right\}^2$$

$$= \left(\frac{\text{ക}_1\text{ക}_2}{2}\right)^2 - \left[\left\{\left(\frac{\text{ബ}_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{ബ}_3}{2}\right)^2\right\} - \left\{\left(\frac{\text{ബ}_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{ബ}_4}{2}\right)^2\right\}\right]^2$$

ഭുജകളെ അപേക്ഷിച്ച്,

$$\text{ക}_1{}^2 = \frac{(\text{ബ}_1\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3\text{ബ}_4)(\text{ബ}_1\text{ബ}_3 + \text{ബ}_2\text{ബ}_4)}{\text{ബ}_1\text{ബ}_4 + \text{ബ}_2\text{ബ}_3}$$

$$\text{ക}_2{}^2 = \frac{(\text{ബ}_1\text{ബ}_4 + \text{ബ}_2\text{ബ}_3)(\text{ബ}_1\text{ബ}_3 + \text{ബ}_2\text{ബ}_4)}{\text{ബ}_1\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3\text{ബ}_4}$$

$$\therefore \text{ക}_1{}^2 \times \text{ക}_2{}^2 = (\text{ബ}_1\text{ബ}_3 + \text{ബ}_2\text{ബ}_4)^2$$

(ഗുണകാരത്തിലും ഹാരകത്തിലും $\text{ബ}_1\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3\text{ബ}_4$, $\text{ബ}_1\text{ബ}_4 + \text{ബ}_2\text{ബ}_3$ എന്ന രാശികളുണ്ട്. അതുകൊണ്ടു ഫലത്തെ വരുത്തുവാൻ ഇവയെക്കൊണ്ടു ഗുണിക്കുകയും വേണ്ടാ, ഹരിക്കുകയും വേണ്ടാ).

∴ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവൎഗ്ഗം

$$= \left(\frac{\text{ബ}_1\text{ബ}_3 + \text{ബ}_2\text{ബ}_4}{2}\right)^2 - \left[\left\{\left(\frac{\text{ബ}_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{ബ}_3}{2}\right)^2\right\} - \left\{\left(\frac{\text{ബ}_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{ബ}_4}{2}\right)^2\right\}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\text{ബു}_1\text{ബു}_3+\text{ബു}_2\text{ബു}_4}{2}+\left\{\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_3}{2}\right)^2\right\}-\left\{\left(\frac{\text{ബു}_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_4}{2}\right)^2\right\}\right]$$

$$\times\left[\frac{\text{ബു}_1\text{ബു}_3+\text{ബു}_2\text{ബു}_4}{2}-\left\{\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_3}{2}\right)^2\right\}+\left\{\left(\frac{\text{ബു}_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_4}{2}\right)^2\right\}\right]$$

$$=\left[\left\{\frac{\text{ബു}_1\text{ബു}_3}{2}+\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_3}{2}\right)^2\right\}-\left\{\left(\frac{\text{ബു}_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_4}{2}\right)^2-\frac{\text{ബു}_2\times\text{ബു}_4}{2}\right\}\right]$$

$$\times\left[\left\{\frac{\text{ബു}_2\text{ബു}_4}{2}+\left(\frac{\text{ബു}_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_4}{2}\right)^2\right\}-\left\{\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_3}{2}\right)^2-\frac{\text{ബു}_1\text{ബു}_3}{2}\right\}\right]$$

(ഇവിടെ രണ്ടു സംഗതികൾ ഓർക്കുവാനുണ്ട്:—

$$(1)\ \left(\frac{\text{ബു}_1\text{ബു}_3+\text{ബു}_2\text{ബു}_4}{2}\right)+\left\{\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_3}{2}\right)^2\right\}-\left\{\left(\frac{\text{ബു}_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_4}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\left\{\frac{\text{ബു}_1\text{ബു}_3}{2}+\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_3}{2}\right)^2\right\}+\left\{\frac{\text{ബു}_2\text{ബു}_4}{2}-\left(\frac{\text{ബു}_2}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_4}{2}\right)^2\right\}$$

ഇവിടെ $\frac{\text{ബു}_2\text{ബു}_4}{2}-\left\{\left(\frac{\text{ബു}_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_4}{2}\right)^2\right\}$ എന്ന സ്ഥലത്ത്, $\frac{\text{ബു}_2\text{ബു}_4}{2}$ എന്ന രാശിയിൽനിന്ന് $\left(\frac{\text{ബു}_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_4}{2}\right)^2$ എന്ന രാശിയെ കളയുവാൻ വയ്യാ. അതിന്നു ഹേതു.

$$\left(\frac{\text{ബു}_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_4}{2}\right)^2=\frac{\text{ബു}_2\times\text{ബു}_4}{2}+\left(\frac{\text{ബു}_2}{2}-\frac{\text{ബു}_4}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{\text{ബു}_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_4}{2}\right)^2>\frac{\text{ബു}_2\text{ബു}_4}{2}$$

അപ്പോൾ $\frac{\text{ബു}_2\text{ബു}_4}{2}+\left(\frac{\text{ബു}_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\text{ബു}_4}{2}\right)^2$ ഒരു ഋണരാശിയാകുന്നു,

അതുകൊണ്ടു ഈ രാശിയെ $-\left\{\left(\frac{ബു_2}{2}\right)^2+\left(\frac{ബു_4}{2}\right)^2-\frac{ബു_2ബു_4}{2}\right\}$ എന്നു കല്പിച്ചു.

ഇപ്രകാരം $\frac{ബു_1ബു_3}{2}-\left(\frac{ബു_1}{2}\right)^2-\left(\frac{ബു_3}{2}\right)^2$ എന്നതിനെ $-\left\{\left(\frac{ബു_1}{2}\right)^2+\left(\frac{ബു_3}{2}\right)^2-\frac{ബു_1ബു_3}{2}\right\}$ എന്നും കല്പിച്ചു.

(2) $\left(\frac{ബു_1}{2}\right)^2+\left(\frac{ബു_3}{2}\right)^2+\frac{ബു_1ബു_3}{2}$

$$=\left(\frac{ബു_1}{2}\right)^2+\left(\frac{ബു_3}{2}\right)^2+2\times\frac{ബു_1}{2}\times\frac{ബു_3}{2}$$

$$=\left(\frac{ബു_1}{2}+\frac{ബു_3}{2}\right)^2$$

അപ്പോൾ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം.

$$=\left[\left(\frac{ബു_1}{2}+\frac{ബു_3}{2}\right)^2-\left(\frac{ബു_4}{2}-\frac{ബു_2}{2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{ബു_2}{2}+\frac{ബു_4}{2}\right)^2-\left(\frac{ബു_1}{2}-\frac{ബു_3}{2}\right)^2\right]$$

$$=\left(\frac{ബു_1}{2}+\frac{ബു_3}{2}+\frac{ബു_2}{2}-\frac{ബു_4}{2}\right)\left(\frac{ബു_1}{2}+\frac{ബു_3}{2}-\frac{ബു_2}{2}+\frac{ബു_4}{2}\right)$$
$$\times\left(\frac{ബു_2}{2}+\frac{ബു_4}{2}+\frac{ബു_1}{2}-\frac{ബു_3}{2}\right)\left(\frac{ബു_2}{2}+\frac{ബു_4}{2}-\frac{ബു_1}{2}+\frac{ബു_3}{2}\right)$$

സപ്തദോസ്ഥിതമെല്ലാംഭുജങ്ങളുടെയും യോഗാർദ്ധം $=\frac{ബു_1}{2}+\frac{ബു_2}{2}+\frac{ബു_3}{2}+\frac{ബു_4}{2}$,

ഇതിനെ ഭ എന്നു കല്പിക്ക.

$$\frac{ബു_1}{2}+\frac{ബു_2}{2}+\frac{ബു_3}{2}-\frac{ബു_4}{2}=\frac{ബു_1}{2}+\frac{ബു_2}{2}+\frac{ബു_3}{2}+\frac{ബു_4}{2}-ബു_4=ഭ-ബു_4$$

$$\frac{ബു_1}{2}+\frac{ബു_2}{2}-\frac{ബു_3}{2}+\frac{ബു_4}{2}=ഭ-ബു_3$$

$$\frac{ബു_1}{2}-\frac{ബു_2}{2}+\frac{ബു_3}{2}+\frac{ബു_4}{2}=ഭ-ബു_2$$

$$-\frac{ബു_1}{2}+\frac{ബു_2}{2}+\frac{ബു_3}{2}+\frac{ബു_4}{2}=ഭ-ബു_1$$

∴ ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം $=(ഭ-ബു_1)(ഭ-ബു_2)(ഭ-ബു_3)(ഭ-ബു_4)$

$$ക്ഷേത്രഫലം=\sqrt{(ഭ-ബു_1)(ഭ-ബു_2)(ഭ-ബു_3)(ഭ-ബു_4)}$$

ഇതിൽനിന്നും വ്യാസം വരുത്തേണ്ടുംപ്രകാരം:—

$$ലംബയോഗം=\frac{ബു_1ബു_4+ബു_2ബു_3}{വ്യാസം}$$

$$\therefore \text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം} = \frac{\text{ക}_1}{2} \times \text{ലംബയോഗം}$$

$$= \frac{\text{ക}_1(\text{ബ}_1\text{ബ}_4 + \text{ബ}_2\text{ബ}_3)}{2 \times \text{വ്യാസം}}$$

$$\therefore \text{വ്യാസം} = \frac{\text{ക}_1(\text{ബ}_1\text{ബ}_4 + \text{ബ}_2\text{ബ}_3)}{2 \times \text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം}}$$

$$= \frac{\sqrt{(\text{ബ}_1\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3\text{ബ}_4)(\text{ബ}_1\text{ബ}_3 + \text{ബ}_2\text{ബ}_4)}}{2 \times \sqrt{\text{ബ}_1\text{ബ}_4 + \text{ബ}_2\text{ബ}_3}} \times \frac{\text{ബ}_1\text{ബ}_4 + \text{ബ}_2\text{ബ}_3}{\text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം}}$$

$$= \frac{\sqrt{(\text{ബ}_1\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3\text{ബ}_4)(\text{ബ}_1\text{ബ}_3 + \text{ബ}_2\text{ബ}_4)(\text{ബ}_1\text{ബ}_4 + \text{ബ}_2\text{ബ}_3)}}{2 \times \text{ക്ഷേത്രഫലം}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{(\text{ബ}_1\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3\text{ബ}_4)(\text{ബ}_1\text{ബ}_3 + \text{ബ}_2\text{ബ}_4)(\text{ബ}_1\text{ബ}_4 + \text{ബ}_2\text{ബ}_3)}}{\sqrt{(\text{സ} - \text{ബ}_1)(\text{സ} - \text{ബ}_2)(\text{സ} - \text{ബ}_3)(\text{സ} - \text{ബ}_4)}}$$

ലീലാവതീവാക്യം:—

സർവ്വദോർയ്യുതിദലഞ്ചതുഃസ്ഥിതം ബാഹുഭിർവ്വിരഹിതഞ്ച തദ്വധാൽ ।
മൂലമസ്ഫുടഫലം ചതുർഭുജേ സ്പഷ്ടമേവമുദിതം ത്രിബാഹുകേ" ॥ എന്ന്.

ഇവിടെ ചതുരശ്രത്തെ വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിട്ടു കല്പിക്കുന്നില്ല. അതുകൊണ്ടാണ് ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം അസ്ഫുടം എന്നു പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. യുക്തിഭാഷയിൽ ഈ വാക്യത്തിന്നു പാഠഭേദം വരുത്തിയിട്ടുണ്ട്. "മൂലമസ്ഫുടഫലം ചതുർഭുജേ" എന്നതിന്നുപകരം "മൂലമത്രനിയതശ്രുതൌ ഫലം" എന്നു പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. നിയതങ്ങളായിരിക്കുന്ന കർണ്ണങ്ങളോടുകൂടിയ ചതുരശ്രം എന്നു പറഞ്ഞതുകൊണ്ടു ചതുരശ്രം വൃത്താന്തർഗ്ഗതമാകത്തക്കവണ്ണം നിശ്ചിതങ്ങളായിരിക്കുന്ന കർണ്ണങ്ങളോടുകൂടിയ ചതുരശ്രം എന്ന് അർത്ഥം വരും. അപ്പോൾ ഫലം സ്ഫുടമാവുകയും ചെയ്യും.]

ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗാനയനം

ഇവ്വണ്ണംതന്നെ ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ഫലവർഗ്ഗവുമുണ്ടാകും. അവിടെ ഭൂമ്യർദ്ധവും ബാഹുയോഗാർദ്ധവും കൂടിയതു സർവ്വദോര്യുതിദളമാകുന്നത്. ഇതിനെ നാലേടത്ത് ഉണ്ടാക്കൂ. ഇവററിൽ മൂന്നിൽനിന്നും ഓരോ ബാഹുക്കളെ കളയൂ. ഒന്നിങ്കന്ന് ഏതും കളയാ. ഇക്കേവലമായിരിക്കുന്ന സർവ്വദോര്യുതിദളവും ഭൂമിയാകുന്ന ബാഹുവിനെ കളഞ്ഞ സർവ്വദോര്യുതിദളവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു മിക്കതും ലംബവർഗ്ഗത്തോടു സമമായിട്ടിരിക്കും. ആബാധായോഗാർദ്ധവും ഭുജായോഗാർദ്ധവും തങ്ങളിൽ ഉള്ള വർഗ്ഗാന്തരമായിട്ടിരിക്കുമത്. ആബാധയും ഭുജയും തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരം ലംബവർഗ്ഗമാകുന്നത് എന്നു ലംബവർഗ്ഗത്തോടു സാമ്യമുണ്ടാവാൻ ഹേതുവാകുന്നത്. പിന്നെ രണ്ടു സർവ്വദോ

ജയുതിദളങ്ങളിൽനിന്ന് ഓരോ ബാഹുക്കളെ കളഞ്ഞ ശേഷങ്ങൾ രണ്ടിനേയും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും മിക്കതും. പിന്നെ ഇതും മുമ്പിലെ ലംബവർഗ്ഗപ്രായമാകുന്നതും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമുണ്ടാകും. ഇവിടെ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ കുറയുന്ന അംശം തന്നെ ലംബവർഗ്ഗത്തിൽ ഏറുന്നതു്. എന്നിട്ടു ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം തന്നെ വരുന്നു. ഇതിന്റെ പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ രണ്ടു ബാഹുക്കളുടേയും വർഗ്ഗങ്ങളാകുന്നതു് ഇക്കർണ്ണങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന ഈ രണ്ടു ഭുജകൾക്കും സാധാരണമായിട്ടിരിക്കുന്ന കോടി ലംബമാകുന്നതു യാതൊന്ന് ഇതിന്റെ വർഗ്ഗവും തന്റെ തന്റെ ആബാധയുടെ വർഗ്ഗവും കൂടിയതായിട്ടിരിക്കും. ആകയാലാബാധാവർഗ്ഗാന്തരത്തോടു തുല്യം കർണ്ണങ്ങളാകുന്ന ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം. ആകയാൽ ഭുജാവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധത്തിങ്കന്ന് ആബാധാവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധത്തെ കളഞ്ഞാൽ ശേഷം കേവലലംബവർഗ്ഗം. പിന്നെ ഭുജായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്ന് ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ലംബവർഗ്ഗത്തേക്കാൾ ഏറീട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ബാഹുക്കൾ രണ്ടിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെ അർദ്ധം യാതൊന്ന് ആബാധകൾ രണ്ടിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെ അർദ്ധവും യാതൊന്ന് ഇവ രണ്ടിനേയും വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിച്ചതിനോടു തുല്യം ലംബവർഗ്ഗത്തിൽ ഏറുന്ന അംശം എന്നു നിയതം. ഇവിടെ രണ്ടു ഘാതവും ഒരു അന്തരവർഗ്ഗവും കൂടിയതു വർഗ്ഗയോഗമാകയാൽ ഒരു ഘാതവും ഒര് അന്തരവർഗ്ഗാർദ്ധവും കൂടിയതു വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധമാകുന്നതു്. യോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കൽ പിന്നെ ഒരു ഘാതവും അന്തരവർഗ്ഗത്തിൽ നാലൊന്നും ഉണ്ടായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ യോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തേക്കാൾ വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധം അന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ടു് അധികമായിട്ടിരിക്കും എന്നു വന്നു. എന്നാൽ ഇവിടെ ഭുജായോഗാർദ്ധ വർഗ്ഗത്തിങ്കൽ ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം കുറയും, ആബാധായോഗാർദ്ധമാകുന്ന ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കൽ ആബാധാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗവും കുറയും, വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധത്തെ അപേക്ഷിച്ച്. ഇവിടെ ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗത്തേക്കാൾ ആബാധാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം വലിയതു്. ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ മറേറതിങ്കന്നു കളയേണ്ടൂതും. കളയേണ്ടുന്ന രാശിയിൽ കുറയുന്ന അംശം, കളഞ്ഞു ശേഷിച്ച രാശിയിങ്കൽ ഏറീട്ടിരിക്കും. തങ്കൽ കുറയുന്ന അംശംകൊണ്ടു് ഊനമായിട്ടുമിരിക്കും. ആകയാൽ ആബാധാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗവും ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരംകൊണ്ടു് അധികമായിട്ടിരിക്കും ലംബവർഗ്ഗം. യോഗാർദ്ധവർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളി-

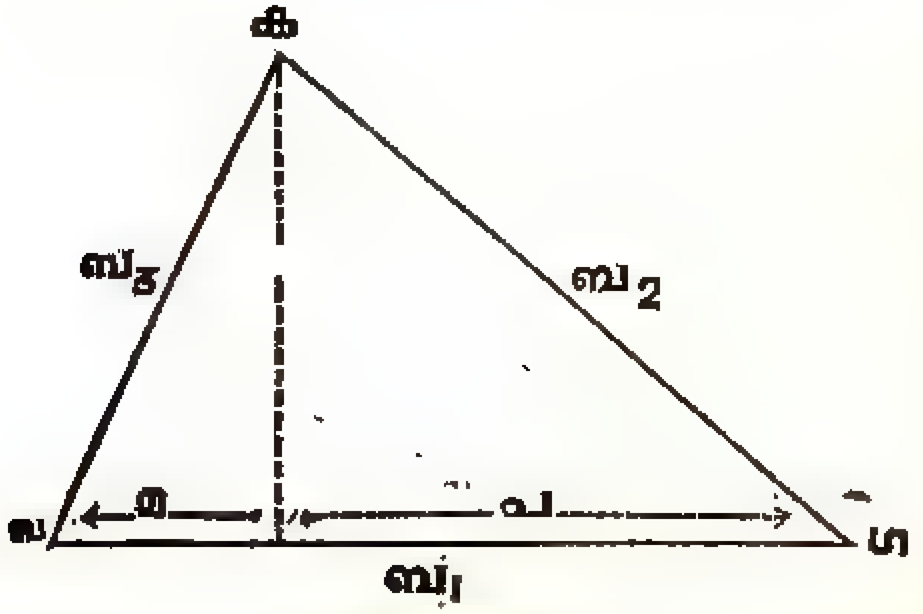
ലന്തരിക്ഷനപക്ഷം ഈവണ്ണം. ഇവിടെ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ തങ്ങളിൽ ഉള്ള വർഗ്ഗാന്തരവും ആബാധകൾ തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നേ ആകയാൽ, ഭുജായോഗത്തെ ഭുജാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലും ആബാധായോഗത്തെ ആബാധാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലും തുല്യമായിട്ടു വരും എന്നും വരും, യോഗാന്തരഘാതം വർഗ്ഗാന്തരമാകയാൽ. ഇങ്ങനെ രണ്ടു ഘാതങ്ങളും തുല്യങ്ങളാകയാൽ, ഈ നാലു രാശികളിലും കൂടീട്ടു പ്രമാണേച്ഛാതൽഫലങ്ങൾ എന്നപോലെ ഒരു സംബന്ധത്തെ കല്പിക്കാം. അവിടെ പ്രമാണഫലവും ഇച്ഛയും ഉള്ള ഘാതവും ഇച്ഛാഫലവും പ്രമാണവുമുള്ള ഘാതവും ഒന്നേ അത്രെ എന്നു സിദ്ധമെല്ലൊ. എന്നാൽ ഭുജായോഗത്തെ പ്രമാണം എന്നപോലെ കല്പിക്കുമ്പോൾ, ആബാധാന്തരം പ്രമാണഫലം, ആബാധായോഗം ഇച്ഛാ, ഭുജാന്തരം ഇച്ഛാഫലം എന്നപോലെ ഇരിക്കും. ഇവ്വണ്ണമിവററിൻെറ വർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിലും വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ തങ്ങളിലും സംബന്ധമുണ്ടായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഭുജായോഗത്തേക്കാൾ ആബാധായോഗം എത്ര കുറയും ആബാധാന്തരത്തേക്കാൾ ഭുജാന്തരം അത്ര കുറഞ്ഞിരിക്കുമെന്നു റിയതം. ഇവററിൻെറ അർദ്ധങ്ങൾക്കുമിവ്വണ്ണംതന്നെ സംബന്ധം. അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾക്കും ഇങ്ങനെ തന്നെ സംബന്ധം. ഇവിടെ ഭുജായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ പാതി ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗമെങ്കിൽ ആബാധാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ പാതിയായിട്ടിരിക്കും ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം. ഇവ്വണ്ണംതന്നെ യോഗാർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവും അന്തരാർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവും തങ്ങളിലുള്ള സംബന്ധം. എന്നാൽ ഇവിടെ ഇങ്ങനെത്തൊരു ത്രൈരാശികത്തെ കല്പിക്കാം. ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗം പ്രമാണം, ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം പ്രമാണഫലം, ഭുജായോഗാർദ്ധവും ആബാധയോഗാർദ്ധവും ഇവ രണ്ടിൻേറയും വർഗ്ഗാന്തരം ഇച്ഛാ. പിന്നെ ആബാധാന്തരാർദ്ധവും ഭുജാന്തരാർദ്ധവും ഇവ രണ്ടിൻേറയും വർഗ്ഗാന്തരം ഇച്ഛാഫലം. ഈ ഇച്ഛാഫലം ഇവിടെ ലംബവർഗ്ഗത്തിൽ ഏറുന്ന അംശമാകുന്നതു്. ആകയാൽ ഇഗ്ഗുണഹാരങ്ങളെക്കൊണ്ടുതന്നെ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു് ഉണ്ടാകുന്ന ഫലം ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ കുറയേണ്ടുവതു്. ഇവിടെ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗം ഗുണ്യം, ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം ഗുണകാരം, ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗം ഹാരകം. എന്നിട്ടു് ഇവിടെ ഗുണ്യവും ഹാരകവും ഒന്നേ ആകയാൽ ഗുണകാരവും ഫലവും ഒന്നേ ആയിട്ടിരിക്കും. അതു ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം. എന്നിട്ടു ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു പോകേണ്ടുവതു്. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു് അന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗാന്തരം കൂടി ഇരിക്കുന്നേ ലംബവർഗ്ഗത്തെ

ഗുണിച്ചാൽ ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം ഉണ്ടാകുന്നു. ഇവിടെ ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം കുറഞ്ഞ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗം ഉണ്ടാകുന്നു പിന്നെ സർവ്വദോർയ്യുതിദളങ്ങൾ രണ്ടിങ്കൽനിന്ന് ഓരോ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ വാങ്ങിയ ശേഷങ്ങൾ രണ്ടിൽവെച്ച് ചെറിയ ഭുജയെ കളഞ്ഞശേഷത്തിങ്കൽ ഭുജാന്തരാർദ്ധം കൂടിയ ഭൂമ്യർദ്ധം ഉണ്ടായിരിക്കും. വലിയ ഭുജയെ കളഞ്ഞ സർവ്വദോർയ്യുതിദളത്തിങ്കൽ ഭുജാന്തരാർദ്ധം കുറഞ്ഞ ഭൂമ്യർദ്ധം ശേഷിക്കും. പിന്നെ ഭുജാന്തരാർദ്ധം കുറഞ്ഞിട്ടും ഏറീട്ടുംഇരിക്കുന്ന ഭൂമ്യർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം കുറഞ്ഞ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും.

“ഇഷ്ടോനയുഗ്രാശിവധഃ കൃതിസ്സ്യാ
ദിഷ്ടസ്യ വർഗ്ഗേണ സമന്വിതോ വാ” ||

എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു വരുമത്. അവിടെ അന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗാന്തരം കൂടിയിരിക്കുന്ന ലംബവർഗ്ഗത്തിങ്കന്ന് അന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗാന്തരത്തെ വേറെയാക്കുവാൻ യാതൊന്നു ഗുണഹാരങ്ങളായതു് അതു തന്നെ കേവലഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിന്നു ഗുണഹാരങ്ങളാകേണ്ടുവതു്, കേവലലംബവർഗ്ഗത്തിങ്കലെ ഗുണഹാരങ്ങളെ അല്ല. യാതൊരുപ്രകാരം മൂന്നിനെക്കൊണ്ട് അഞ്ചിനെ ഗുണിക്കേണ്ടുമ്പോൾ തന്നിലെ അഞ്ചൊന്നു കൂടിയിരിക്കുന്ന ആറിനെ ഗുണിക്കുന്നുതാകിൽ മൂന്നാകുന്ന ഗുണകാരത്തിങ്കന്നു തന്നിൽ ആറൊന്നു പോയിരിക്കുന്ന രണ്ടരയെക്കൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ടു, ഇവ്വണ്ണമിവിടെയും കേവലഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളയേണ്ടുന്ന ഫലത്തെ വരുത്തേണ്ടു. എന്നാൽ സർവ്വദോർയ്യുതിദളം എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു വരുത്തുന്ന ത്രിഭുജക്ഷേത്രവർഗ്ഗം സൂക്ഷ്മമത്രെ എന്നുവന്നു.

[പരിലേഖം 55-ൽ,



പരിലേഖം 55

ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ഭൂമി = ബ_1

വലിയബാഹു = ബ_2

ചെറിയബാഹു = ബ_3

ലംബം = ല

സർവ്വദോർയ്യുതിദളം $= \frac{\text{ബ}_1 + \text{ബ}_2 + \text{ബ}_3}{2} = \text{ദ}$

നാലുരാശികൾ = ദ, $\text{ദ} - \text{ബ}_1$, $\text{ദ} - \text{ബ}_2$, $\text{ദ} - \text{ബ}_3$

ആബാധകൾ = പ, മ.

$$\text{ദ} \times (\text{ദ} - \text{ബ}_1)$$

$$= \frac{\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3 + \text{ബ}_1}{2} \times \frac{\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3 - \text{ബ}_1}{2}$$

$$= \left(\frac{\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{ബ}_1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{പ} + \text{മ}}{2}\right)^2$$

$$\text{ല}^2 = \text{ബ}_2^2 - \text{പ}^2 = \text{ബ}_3^2 - \text{മ}^2$$

$$2\text{ല}^2 = (\text{ബ}_2^2 + \text{ബ}_3^2) - (\text{പ}^2 + \text{മ}^2)$$

$$\therefore \text{ല}^2 = \frac{\text{ബ}_2^2 + \text{ബ}_3^2}{2} - \frac{\text{പ}^2 + \text{മ}^2}{2}$$

$\left(\frac{\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{പ} + \text{മ}}{2}\right)^2$ എന്ന രാശി $\frac{\text{ബ}_2^2 + \text{ബ}_3^2}{2} - \frac{\text{പ}^2 + \text{മ}^2}{2}$ എന്ന രാശിയോടു മിക്കതും തുല്യമായതുകൊണ്ടാണ്, $\text{ദ}(\text{ദ} - \text{ബ}_1)$ എന്നതു ലംബവർഗ്ഗത്തോടു മിക്കതും തുല്യമെന്നു പറയുവാൻ ഹേതു.

$$(\text{ദ} - \text{ബ}_2)(\text{ദ} - \text{ബ}_3) = \frac{\text{ബ}_1^2}{4} \text{ (മിക്കതും)}$$

ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം $= \frac{\text{ല}^2 \times \text{ബ}_1^2}{4} = \text{ദ}(\text{ദ} - \text{ബ}_1)(\text{ദ} - \text{ബ}_2)(\text{ദ} - \text{ബ}_3)$ എന്നതിനെ കാണിക്കുന്നു.

$\left(\frac{\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{പ} + \text{മ}}{2}\right)^2$ എന്നതു ലംബവർഗ്ഗത്തെക്കാൾ ഏറും.

ഇതിന്നു ഹേതു: അ, ഇ എന്നു രണ്ടു രാശികളെ കല്പിക്കുക.

എന്നാൽ $2 \times \text{അ} \times \text{ഇ} + (\text{അ} - \text{ഇ})^2 = \text{അ}^2 + \text{ഇ}^2$

$$\therefore \text{അ} \times \text{ഇ} + \frac{(\text{അ} - \text{ഇ})^2}{2} = \frac{\text{അ}^2 + \text{ഇ}^2}{2}$$

$$\left(\frac{\text{അ}}{2} + \frac{\text{ഇ}}{2}\right)^2 = \frac{\text{അ}^2}{4} + \frac{\text{ഇ}^2}{4} + \frac{\text{അ} \times \text{ഇ}}{2}$$

$$= \frac{\text{അ}^2}{4} + \frac{\text{ഇ}^2}{4} - \frac{2 \times \text{അ} \times \text{ഇ}}{4} + \text{അ} \times \text{ഇ}$$

$$=\left(\frac{\text{അ}-\text{ഇ}}{2}\right)^2+\text{അ}\times\text{ഇ}$$

$$=\frac{(\text{അ}-\text{ഇ})^2}{2}+\text{അ}\times\text{ഇ}-\frac{(\text{അ}-\text{ഇ})^2}{4}$$

$$=\frac{\text{അ}^2+\text{ഇ}^2}{2}-\left(\frac{\text{അ}-\text{ഇ}}{2}\right)^2$$

അപ്പോൾ $\frac{\text{അ}^2+\text{ഇ}^2}{2}$ എന്നതു $\left(\frac{\text{അ}+\text{ഇ}}{2}\right)^2$ എന്നതിനെക്കാൾ $\left(\frac{\text{അ}-\text{ഇ}}{2}\right)^2$ എന്നതുകൊണ്ടേറും. ഈ ന്യായംകൊണ്ടു്,

$$\frac{\text{ബു}_2^2+\text{ബു}_3^2}{2}-\left(\frac{\text{ബു}_2+\text{ബു}_3}{2}\right)^2=\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2$$

$$\frac{\text{പ}^2+\text{മ}^2}{2}-\left(\frac{\text{പ}+\text{മ}}{2}\right)^2=\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2 \text{ എന്നുവരും.}$$

$$\left\{\frac{\text{ബു}_2^2+\text{ബു}_3^2}{2}-\frac{\text{പ}^2+\text{മ}^2}{2}\right\}-\left\{\left(\frac{\text{ബു}_2+\text{ബു}_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{പ}+\text{മ}}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2$$

അതായതു്, $\text{ല}^2-\text{ഒ}(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)=\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2$

ഇവിടെ $\text{ബു}_2^2-\text{ബു}_3^2=\text{പ}^2-\text{മ}^2$

$$(\text{ബു}_2+\text{ബു}_3)(\text{ബു}_2-\text{ബു}_3)=(\text{പ}+\text{മ})(\text{പ}-\text{മ})$$

$$=\text{ബു}_1(\text{പ}-\text{മ})$$

രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തങ്ങളിൽ ഏററവും കുറഞ്ഞ ദൂരം അവയുടെ ഇടയിലുള്ള ഋജുരേഖയാകകൊണ്ടു്, $\text{ബു}_2+\text{ബു}_3>\text{ബു}_1$

$$\therefore\ \text{ബു}_2-\text{ബു}_3<\text{പ}-\text{മ}$$

$\therefore\ \left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2$ എന്നതു് ഋണരാശിയാകുന്നു.

$\therefore\ \text{ല}^2-\text{ഒ}(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)$ എന്നതും ഒരു ഋണരാശി

$\therefore\ \text{ഒ}(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)>\text{ല}^2$

അപ്പോൾ $\text{ഒ}(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)=\text{ല}^2+\left\{\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2\right\}$

ല²നെക്കാൾ $\text{ഒ}(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)$ൽ ഏറുന്നതു് $=\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2$

ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം $=\text{ല}^2\times\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2=\text{ഒ}(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)(\text{ഒ}-\text{ബു}_2)(\text{ഒ}-\text{ബു}_3)$ എന്നു കാണിക്കേണ്ടിടത്തു്, $\text{ഒ}(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)$ ലംബവർഗ്ഗത്തെക്കാളേറുന്നതുകൊണ്ടു ത്ര്യശ്വ

ഗ്ഗത്തിൽ ഏതാനും കളയേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. ഈ കളയേണ്ടുന്ന സംഖ്യയെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ മേല്പോട്ടു കാണിക്കുന്നു.

മൂന്നിനെ അഞ്ചിൽ ഗുണിക്കേണ്ടിയിരിക്കുമ്പോൾ, അഞ്ചിൽ തന്നിൽ അഞ്ചൊന്നു കൂടിയിരിക്കുന്ന ആറുകൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, തുല്യഫലം വരുത്തുവാൻ മൂന്നാകുന്ന ഗുണ്യത്തിങ്കൽനിന്നു തന്റെ ആറൊന്നുപോയ രണ്ടരയെ ഗുണിക്കേണം.

$$3\times 5=15=\left(5+5\times\tfrac{1}{5}\right)\left(3-3\times\frac{1}{5+1}\right)$$
$$=6\times 2\tfrac{1}{2}$$

ഇതുപോലെതന്നെ ഭുജാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ ലംബവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ടിരിക്കിൽ

$$\text{ല}^2+\left\{\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2\right\}$$ എന്നതുകൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, ഭുജാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കൽനിന്നു കളയേണ്ടുന്ന രാശിയുടെ ഗുണ്യം $=\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2$; ഗുണകാരം

$$=\frac{\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2}{\text{ല}^2+\left\{\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2\right\}}$$

∴ ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം

$$=\left[\text{ല}^2\times\left\{\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2\right\}\right]$$
$$\left[\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2\times\frac{\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2}{\text{ല}^2+\left\{\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2\right\}}\right]$$

$$=\left\{\left(\frac{\text{ബു}_2+\text{ബു}_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{പ}+\text{മ}}{2}\right)^2\right\}$$
$$\left\{\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2\times\frac{\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ബു}_2+\text{ബു}_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2}\right\}$$

ഇവിടെ $\text{ബു}_2^2-\text{ബു}_3^2=\text{പ}^2-\text{മ}^2$

$(\text{ബു}_2+\text{ബു}_3)(\text{ബു}_2-\text{ബു}_3)=(\text{പ}+\text{മ})(\text{പ}-\text{മ})$.

$$\frac{\text{ബു}_2+\text{ബു}_3}{\text{പ}-\text{മ}}=\frac{\text{പ}+\text{മ}}{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}$$

$$\therefore\ \frac{(\text{ബു}_2+\text{ബു}_3)^2}{(\text{പ}-\text{മ})^2}=\frac{(\text{പ}+\text{മ})^2}{(\text{ബു}_2-\text{ബു}_3)^2}$$

$$\frac{\left(\frac{\text{ബു}_2+\text{ബു}_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2}=\frac{\left(\frac{\text{പ}+\text{മ}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2}=\frac{\left(\frac{\text{ബു}_2+\text{ബു}_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{പ}+\text{മ}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2}$$

(ഇതിൻെറ ഉപപത്തിയെ മേലിൽ പറയുന്നുണ്ട്).

അപ്പോൾ $\frac{\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ബു}_2+\text{ബു}_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2}=\frac{\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{പ}+\text{മ}}{2}\right)^2}=\frac{\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2}$

ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗത്തിൻെറ ഗുണകാരം $\frac{\left(\frac{\text{പ}-\text{മ}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ബു}_2+\text{ബു}_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{പ}+\text{മ}}{2}\right)^2}$ ആണെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലൊ. ഇതിനുപകരം ഇതിനോടു തുല്യമായിരിക്കുന്ന $\frac{\left(\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ബു}_1}{2}\right)^2}$ എന്ന ഗുണകാരത്തെ ഉപയോഗിക്കാം.

അപ്പോൾ ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം $=\left\{\left[\frac{\text{ബു}_2+\text{ബു}_3}{2}\right]^2-\left[\frac{\text{പ}+\text{മ}}{2}\right]^2\right\}$

$$\left\{\left[\frac{\text{ബു}_1}{2}\right]^2-\left[\frac{\text{ബു}_1}{2}\right]^2\times\frac{\left[\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right]^2}{\left[\frac{\text{ബു}_1}{2}\right]^2}\right\}$$

$$=\text{ഒ}(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)\left\{\left[\frac{\text{ബു}_1}{2}\right]^2-\left[\frac{\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right]^2\right\}$$

$$=\text{ഒ}(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)\left[\frac{\text{ബു}_1+\text{ബു}_2-\text{ബു}_3}{2}\right]\left[\frac{\text{ബു}_1-\text{ബു}_2+\text{ബു}_3}{2}\right]$$

$$=\text{ഒ}(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)(\text{ഒ}-\text{ബു}_2)(\text{ഒ}-\text{ബു}_3)$$

അപ്പോൾ ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലം $=\sqrt{\text{ഒ}(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)(\text{ഒ}-\text{ബു}_2)(\text{ഒ}-\text{ബു}_3)}$

ഈ ഫലത്തെതന്നെ വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിൻെറ ഫലത്തിൽനിന്നും വരുത്താം. ഒരു ബാഹു ശൂന്യമായിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രക്ഷേത്രമെന്നു ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രത്തെ കല്പിക്കാം. അവിടെ ബു_4 എന്നതിനെ ശൂന്യമെന്നു കല്പിക്ക.

$$\text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം}=\sqrt{(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)(\text{ഒ}-\text{ബു}_2)(\text{ഒ}-\text{ബു}_3)(\text{ഒ}-\text{ബു}_4)}$$

അപ്പോൾ ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലം $=\sqrt{(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)(\text{ഒ}-\text{ബു}_2)(\text{ഒ}-\text{ബു}_3)(\text{ഒ}-0)}$

$$=\sqrt{\text{ഒ}(\text{ഒ}-\text{ബു}_1)(\text{ഒ}-\text{ബു}_2)(\text{ഒ}-\text{ബു}_3)}$$

മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ത്രൈരാശികങ്ങളുടെ യുക്തി:—

അ, ഇ, ഉ, ഒ എന്നു നാലു രാശികളെ കല്പിക്കുക.

$\text{അ} \times \text{ഇ} = \text{ഉ} \times \text{ഒ}$ എന്ന് ഇവയുടെ സംബന്ധം.

$\text{ഇ} \times \text{ഒ}$ എന്നതിനെക്കൊണ്ട് ഈ ഘാതങ്ങളെ ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ,

$$\frac{\text{അ} \times \text{ഇ}}{\text{ഇ} \times \text{ഒ}} = \frac{\text{ഉ} \times \text{ഒ}}{\text{ഇ} \times \text{ഒ}}$$

$$\therefore \frac{\text{അ}}{\text{ഒ}} = \frac{\text{ഉ}}{\text{ഇ}} = \text{ഫ} \text{ എന്നു കല്പിക്കുക}$$

$$\text{അപ്പോൾ } \text{അ} = \text{ഒ} \times \text{ഫ}$$

$$\text{ഉ} = \text{ഇ} \times \text{ഫ}$$

$$\text{അ}^2 = \text{ഒ}^2 \times \text{ഫ}^2$$

$$\text{ഉ}^2 = \text{ഇ}^2 \times \text{ഫ}^2$$

$$\frac{\text{അ}^2}{\text{ഒ}^2} = \text{ഫ}^2 = \frac{\text{ഉ}^2}{\text{ഇ}^2} \text{ (വർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിലുള്ള സംബന്ധം)}$$

$$\frac{\left(\frac{\text{അ}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ഒ}}{2}\right)^2} = \text{ഫ}^2 = \frac{\left(\frac{\text{ഉ}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ഇ}}{2}\right)^2} \text{ (അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിലുള്ള സംബന്ധം)}$$

$$\left(\frac{\text{അ}}{2}\right)^2 = \text{ഫ}^2 \times \left(\frac{\text{ഒ}}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{\text{ഉ}}{2}\right)^2 = \text{ഫ}^2 \times \left(\frac{\text{ഇ}}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{\text{അ}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{ഉ}}{2}\right)^2 = \text{ഫ}^2 \left\{ \left(\frac{\text{ഒ}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{ഇ}}{2}\right)^2 \right\}$$

$$\frac{\left(\frac{\text{അ}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{ഉ}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ഒ}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{ഇ}}{2}\right)^2} = \text{ഫ}^2 = \frac{\left(\frac{\text{അ}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ഒ}}{2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\text{ഉ}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ഇ}}{2}\right)^2}$$

ഇപ്രകാരം പല ത്രൈരാശികങ്ങളുടേയും ഉപപത്തിയെ കാണിക്കാം.]

ശരാനയനം

പിന്നെ ഇതിനോടു തുല്യന്യായമായിട്ടിരിപ്പോന്ന്

"ഗ്രാസോനേ ദ്വേ വൃത്തേ ഗ്രാസഗുണേ ഭാജയേൽ പൃഥക്ത്വേന |
ഗ്രാസോനയോഗലബ്ധൌ സംപാതശരൌ പരസ്പരതഃ ||" *എന്നിത്.

ഇവിടെ ചെറിയൊരു വൃത്തത്തിന്റെ കുറഞ്ഞൊരു പ്രദേശം വലിയൊരു വൃത്തത്തിന്റെ അകത്തു പുക്കിരിക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ രണ്ടിന്റേയും കേന്ദ്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിച്ച പുറത്തെ നേമിയോളം ചെല്ലുമാറ് ഒരു വ്യാസരേഖ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ രണ്ടു വൃത്തത്തിന്റെ

* ആര്യഭടീയം ഗണിതപാദം ശ്ലോകം 18.

യും നേമികൾ തങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുന്നേടത്തു തട്ടുമാറ് ഈ വ്യാസരേഖക്കു വിപരീതമായിട്ടിരിപ്പോരു രേഖ കല്പിപ്പൂ. ഇതു രണ്ടു വൃത്തത്തിന്നും സാധാരണമായിട്ടിരിപ്പോരു ജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. ഈ ജ്യാവും വ്യാസസൂത്രവും തങ്ങളിലുള്ള സംപാതത്തിങ്കന്ന് അടുത്ത വൃത്തനേമിയോളമുള്ള വ്യാസഖണ്ഡങ്ങൾ ശരങ്ങൾ. അവിടെ ചെറിയ വൃത്തത്തിങ്കലെ ശരം വലുതായിട്ടിരിക്കും. വലിയ വൃത്തത്തിങ്കലേതു ചെറുതായിട്ടിരിക്കും. ശരോനവ്യാസങ്ങൾ പിന്നെ മറിച്ച്. ചെറിയ വൃത്തത്തിങ്കൽ ചെറുത്, വലിയ വൃത്തത്തിങ്കൽ വലുത്. ഇവിടെ അതതു ശരോനവ്യാസവും ശരവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു രണ്ടു വൃത്തത്തിന്നും സാധാരണമായിട്ടിരിക്കുന്ന അർദ്ധജ്യാവിന്റെ വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും.

"വ്യാസാച്ഛരോനാച്ഛരസംഗുണാച്ച
മൂലം ദ്വിനിഘ്നം ഭവതീഹ ജീവാ ||"* എന്നുണ്ടാകയാൽ.

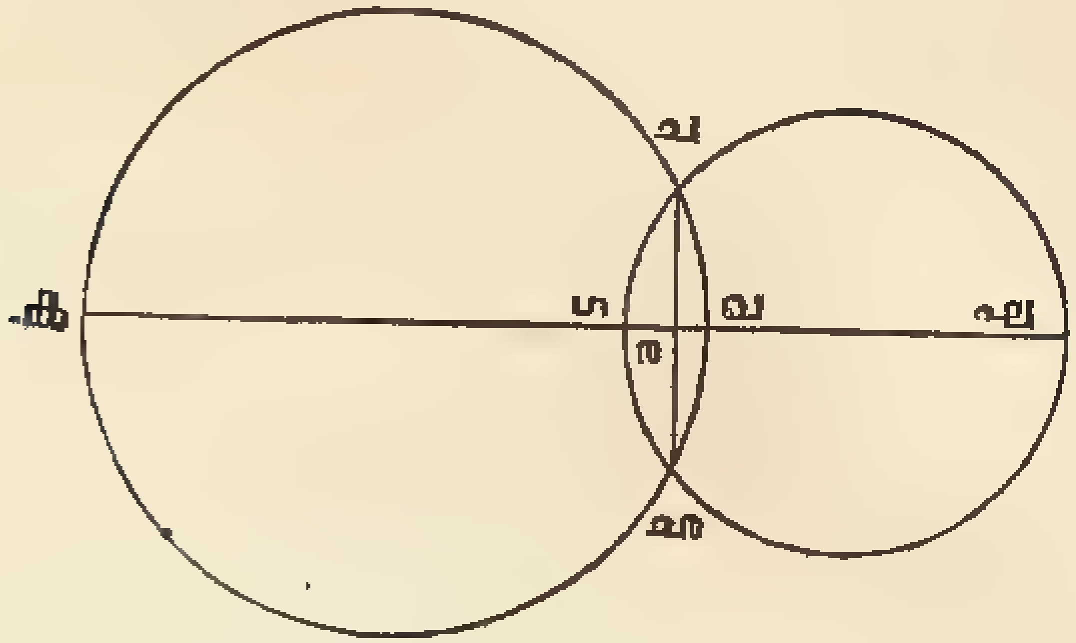
എന്നാൽ വലിയ ശരോനവ്യാസത്തേക്കാൾ എത്ര ചെറുതു ചെറിയ ശരോനവ്യാസം, ചെറിയ വൃത്തത്തിങ്കലെ ശരത്തേക്കാൾ അത്ര ചെറുതു വലിയ വൃത്തത്തിങ്കലെ ശരം എന്നിരിക്കും, ഘാതം സമമാകയാൽ; യാതൊരുപ്രകാരം ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ഭുജായോഗവും ആബാധായോഗവും എന്നപോലെ ഇരിക്കുന്നു ആബാധാന്തരവും ഭുജാന്തരവും, എന്നിട്ടു തുല്യന്യായമാകുന്നു. ഇവിടെ ശരയോഗത്തെ ഗ്രാസമെന്നു ചൊല്ലുന്നു. ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങൾ തങ്ങളിലും ഇങ്ങനെ സംബന്ധം, യാതൊരുപ്രകാരം ശരോനവ്യാസങ്ങൾ തങ്ങളിൽ. ഇവിടെ വലിയ ശരോനവ്യാസത്തിങ്കന്നു വലിയ ശരവും ചെറിയ ശരോനവ്യാസത്തിങ്കന്നു ചെറിയ ശരവും പോയ ശേഷം ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങളാകുന്നവ. എന്നിട്ടു ശരോനവ്യാസങ്ങളെപ്പോലെ ഇരിപ്പോ ചില ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങളും. ഇവിടെ ശരങ്ങളെ വെവ്വേറെ അറഞ്ഞിലാ എന്നിരിക്കുമ്പോൾ ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങൾ പ്രമാണഫലങ്ങളായി, ഗ്രാസോനവ്യാസയോഗം പ്രമാണമായി ഗ്രാസമിച്ഛയായിട്ടുണ്ടാകും ശരങ്ങൾ. മറ്റെ ഗ്രാസോനവ്യാസത്തിങ്കന്നു തന്റെ ശരമുണ്ടാം, തന്റേതിങ്കന്നു മറ്റെ ശരവും ഉണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ ഗ്രാസത്തിങ്കന്നു ശരവിഭാഗത്തെ അറിയുംപ്രകാരം.

["ഗ്രാസോനേ ദ്വേ വൃത്തേ......." ഇത്യാദി പ്രമാണംകൊണ്ടു ശരങ്ങളെ വരുത്തുന്നേടത്തും മുമ്പിലെ ന്യായത്തെത്തന്നെ അപേക്ഷിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ വൃത്തം എന്നതിന്നു വ്യാസമെന്നർത്ഥം.

---

* ലീലാവതി ശ്ലോകം 207.

ഇവിടെ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരംശം മറ്റൊരു വൃത്തത്തിന്റെ അകത്ത് അകപ്പെട്ടുമാറു കല്പിക്കുന്നു. പരിലേഖം 56-ൽ ചഖഛഗ എന്ന ഭാഗത്തി



പരിലേഖം 56

ന്നു മത്സ്യമെന്നു പേർ. കഖ വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം, ഗഘ ചെറിയതിന്റെ വ്യാസം. വൃത്തങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ഇട ചഛ രണ്ടു വൃത്തത്തിന്നും സാധാരണമായിരിക്കുന്ന ഒരു സമസ്തജ്യാവ്. ഈ ജ്യാവിന്നു സംപാതജീവാ എന്നു പേരുണ്ട്. ഇതു കഘ എന്ന രേഖയ്ക്കു വിപരീതദിക്കായിരിക്കും. കഘ, ചഛ ഇവയുടെ സംപാതം ര എന്ന ബിന്ദുവിങ്കൽ.

വലിയ വൃത്തത്തിൽ സംപാതജീവയുടെ ശരം = രഖ,
ചെറിയ വൃത്തത്തിൽ സംപാതജീവയുടെ ശരം = രഗ.
ശരോനവ്യാസങ്ങൾ ക്രമേണ കര, ഘര.
ഇവിടെ രഗ > രഖ; രക > രഘ.
"വ്യാസാൽ ശരോനാൽ......" ഇത്യാദിന്യായേന
രക × രഖ = ചര² = രഗ × രഘ.

(ത്ര്യശ്രത്തിങ്കൽ ഭുജായോഗാന്തരഘാതം = ആബാധായോഗാന്തരഘാതം എന്ന സംബന്ധംപോലെ ഇവിടേയുമൊരു സംബന്ധം ഉണ്ട്. അതുകൊണ്ടു രണ്ടിങ്കലും തുല്യന്യായം എന്നു പറഞ്ഞു.)

(രക − രഗ) × രഖ = രക × രഖ − രഗ × രഖ
= രഗ × രഘ − രഗ × രഖ
= രഗ (രഘ − രഖ)
= രഗ × ഖഘ
∴ കഗ × രഖ = രഗ × ഖഘ
(ശരോനവ്യാസങ്ങളിലെപ്പോലെ ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങളിലും സംബന്ധം)

കഗ(രഖ + രഗ) = കഗ × രഖ + കഗ × രഗ

= രഗ × ഖഘ + കഗ × രഗ

കഗ × ഗഖ = രഗ(ഖഘ + കഗ)

ഗ്രാസോനവ്യാസം × ഗ്രാസം = മറ്റെ വൃത്തത്തിലെ ശരം × ഗ്രാസോനവ്യാസയോഗം.

അപ്പോൾ രഗ = (കഗ × ഗഖ) / (ഖഘ + കഗ)

അതുപോലെതന്നെ രഖ = (ഖഘ × ഗഖ) / (ഖഘ + കഗ)

ഇവിടെ ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങൾ പ്രമാണഫലങ്ങൾ, ഗ്രാസോനവ്യാസയോഗം പ്രമാണം, ഗ്രാസമിച്ഛാ, ശരമിച്ഛാഫലം. ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഗ്രാസോനവ്യാസത്തിൽനിന്നു മറേറതിൻെറ ശരം വരും.]

ഛായാനയനം

ഇതിനോടു തുല്യന്യായമായിട്ടിരുന്നൊന്ന്

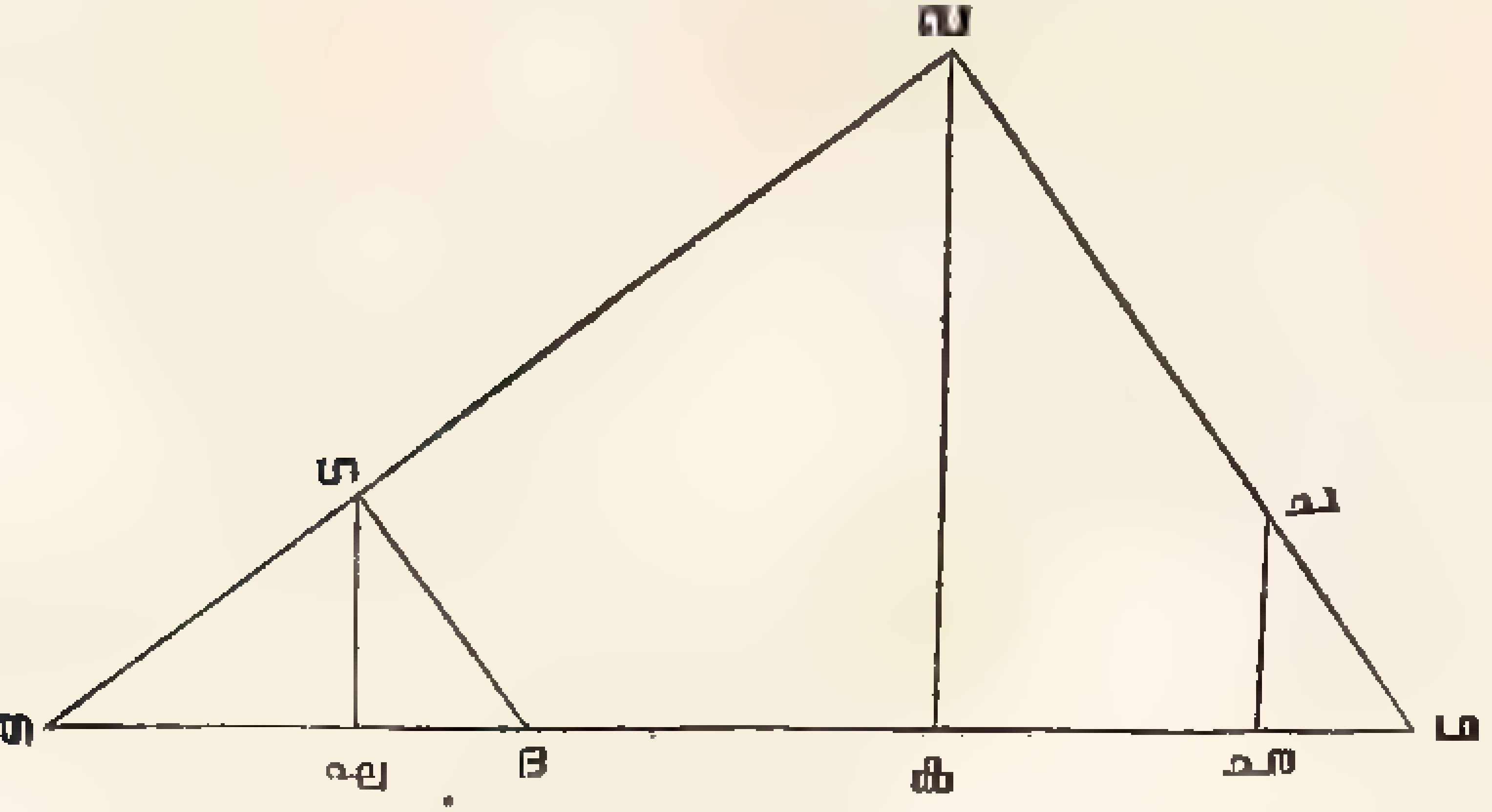
"ഛായയോഃ കർണ്ണയോരന്തരേ യേ തയോ-
ർവ്വർഗ്ഗവിശ്ലേഷഭക്താ രസാദ്രീഷവഃ ।
സൈകലബ്ധ്യം പദഘ്നന്തു കർണ്ണാന്തരം
ഭാന്തരേണോനയുക്തം ദളേ സ്തഃ പ്രഭേ ॥"*എന്നിത്തും.

ഇവിടെ സമനിലത്തു ദ്വാദശാംഗുലശംകുവിനേക്കാൾ ഉയരമുള്ളൊരു വിളക്കുവെച്ചു പിന്നെ ഇവിടുന്ന് ഒട്ട് അകലത്തു പന്ത്രണ്ടംഗുലം നീളമുള്ളൊരു ശംകുവിനെവെച്ചു പിന്നെ ഇശ്ശംകുവിങ്കന്നും ഒട്ട് അകലത്ത് ഇത്രതന്നെ നീളമുള്ളൊരു ശംകുവിനെവെച്ചാൽ, വിളക്കിൻെറ അണയത്തെ ശംകുവിന്നു ഛായ ചെറുതായിട്ടിരിക്കും, അകലത്തേതിന്നു വലുതായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഛായാഗ്രത്തിങ്കന്നു ശംകുവിൻെറ മീത്തെ തലക്കലോളമുള്ള അന്തരാളം ഛായാകർണ്ണമാകുന്നത്. ഛായ വലിയതിന്നു ഛായാകർണ്ണം വലുത്, ശംകുതുല്യമാകയാൽ. പിന്നെ ഈ രണ്ടു ഛായകളുടേയും യോഗത്തെ ഭൂമി എന്നും ഛായാകർണ്ണങ്ങളെ ബാഹുക്കളെന്നും ശംകുവിനെ ലംബമെന്നും കല്പിച്ചു പിന്നെ ഛായാന്തരമാകുന്നത് ആബാധാന്തരമെന്നും കർണ്ണാന്തരമാകുന്നതു ഭുജാന്തരമെന്നും ഇവ രണ്ടിൻേറയും വർഗ്ഗാന്തരത്തെ പ്രമാണമെന്നും ഛായായോഗവും കർണ്ണയോഗവും ഉള്ള വർഗ്ഗാന്തരത്തെ പ്രമാ

* ലീലാവതീ 11-ാമദ്ധ്യായം ശ്ലോകം 238. ഇവിടെ "സ്തഃപ്രഭേ" എന്നതിന്നു "സ്തംഭേ" എന്നൊരു പാഠഭേദവും കാണുന്നുണ്ട്.

ണഫലമെന്നും കൎണ്ണാന്തരവൎഗ്ഗത്തെ ഇച്ഛാ എന്നും കല്പിച്ചു ത്രൈരാശികം ചെയ്താൽ ഛായായോഗവൎഗ്ഗം ഇച്ഛാഫലമായിട്ടുണ്ടാകും. ഇവിടെ പ്രമാണത്തെക്കൊണ്ടു പ്രമാണഫലത്തെ ഹരിച്ചു മൂലിച്ചു ഗുണിക്കുന്നതാകിൽ കൎണ്ണാന്തരത്തെതന്നെ ഗുണിക്കേണ്ടൂ. എന്നാൽ ഛായായോഗമുണ്ടാകും. ഇവ്വണ്ണമിവിടെ ഉണ്ടാക്കുന്നു. യോഗവൎഗ്ഗമാകുന്നതു പിന്നെ ശംകുവൎഗ്ഗത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കൽ അന്തരവൎഗ്ഗാന്തരംകൂട്ടി ഇരിക്കുന്നതു്. ഇവിടെ ഹാൎയ്യത്തിൽ ഹാരകം കൂട്ടേണ്ടുകയാൽ ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തിൽ ഒന്നു കൂട്ടിയാലും ഫലസാമ്യം വരും. എന്നിട്ടു കേവലം ചതുൎഗ്ഗുണശംകുവൎഗ്ഗത്തെ ഹരിക്കുന്നു. ഇത്ത്രൈരാശികന്യായം മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ പ്രകാരംകൊണ്ടു സിദ്ധിക്കും. ഇങ്ങനെ ഇതിന്നു ക്ഷേത്രഫലവൎഗ്ഗന്യായത്തിനോടു സാമ്യം.

[പരിലേഖം 57_ൽ കഘ ഒരു ദീപം. ഗഖ=ചഛ=ദ്വാദശാംഗുല ശംകു. ദീപമൂലത്തിങ്കൽനിന്നു ഗഖ എന്ന ശംകുവിന്റെ മൂലത്തിന്റെ ദൂരം ചഛ എന്ന ശംകുവിന്റെ മൂലത്തിന്റെ ദൂരത്തേക്കാളേറും. അതായതു കഖ>കഛ.



പരിലേഖം 57

ഖത, ഛഫ ഛായകൾ. ഗത, ചഫ ഛായാകൎണ്ണങ്ങൾ. ഖക എന്ന രേഖയിൽ ഖദ എന്നതു ഛഫ എന്നതിനോടു തുല്യമാകത്തക്കവണ്ണം ദ എന്നൊരു ബിന്ദുവിടുക. അപ്പോൾ ഗദ=ചഫ എന്നു വരും.

$$\text{അപ്പോൾ } \text{തദ} = \text{തഘ} + \text{ഘദ}$$
$$= \text{തഘ} + \text{ഛഥ}$$
$$= \text{ഛായായോഗം}$$

ഈ തദ എന്ന ഛായായോഗത്തെ ഭൂമിയെന്നും, ഗത, ഗദ എന്ന ഛായാകൎണ്ണങ്ങളെ ഭുജകളെന്നും, ഗഘ എന്ന ദ്വാദശാംഗുലശംകുവിനെ ലംബമെന്നും കല്പിപ്പൂ.

ഇവിടെ ഛായാന്തരവും കൎണ്ണാന്തരവും ജ്ഞാതങ്ങൾ.

ഛായകളെ വെവ്വേറെ വരുത്തേണം.

$$\text{കൎണ്ണയോഗം} \times \text{കൎണ്ണാന്തരം} = \text{ഛായായോഗം} \times \text{ഛായാന്തരം}.$$

(ഗതദ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ കൎണ്ണങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഗത, ഗദ ഭുജകൾ, ഛായകളായിരിക്കുന്ന തഘ, ദഘ ആബാധകൾ എന്നിട്ട്.)

$$(\text{ഗത} + \text{ഗദ})(\text{ഗത} - \text{ഗദ}) = (\text{തഘ} + \text{ഘദ})(\text{തഘ} - \text{ഘദ})$$
$$= \text{തദ}\,(\text{തഘ} - \text{ഘദ})$$

$$\therefore (\text{ഗത} + \text{ഗദ})^2(\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2 = \text{തദ}^2(\text{തഘ} - \text{ഘദ})^2$$

$$(\text{തഘ} + \text{ഘദ})^2\{(\text{തഘ} - \text{ഘദ})^2 - (\text{തഗ} - \text{ഗദ})^2\}$$
$$= (\text{ഗത} + \text{ഗദ})^2(\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2 - (\text{തഘ} + \text{ഘദ})^2(\text{തഗ} - \text{ഗദ})^2$$
$$= (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2\{(\text{ഗത} + \text{ഗദ})^2 - (\text{തഘ} + \text{ഘദ})^2\}$$

$$\therefore (\text{തഘ} + \text{ഘദ})^2 = (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2\left\{\frac{(\text{ഗത} + \text{ഗദ})^2 - (\text{തഘ} + \text{ഘദ})^2}{(\text{തഘ} - \text{ഘദ})^2 - (\text{തഗ} - \text{ഗദ})^2}\right\}$$

$$= (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2\left\{\frac{\text{ഗത}^2 + \text{ഗദ}^2 + 2\text{ഗത} \times \text{ഗദ} - \text{തഘ}^2 - \text{ഘദ}^2 - 2\text{തഘ} \times \text{ഘദ}}{(\text{തഘ} - \text{ഘദ})^2 - (\text{തഗ} - \text{ഗദ})^2}\right\}$$

$$= (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2\ \{(\text{തഘ}^2 + \text{ഗദ}^2 - 2\text{തഘ} \times \text{ഘദ}) - (\text{ഗത}^2 + \text{ഗദ}^2 - 2\text{ഗത} \times \text{ഗദ}$$
$$+ 2(\text{ഗത}^2 - \text{തഘ}^2) + 2(\text{ഗദ}^2 - \text{ഘദ}^2\} \div \{(\text{തഘ} - \text{ഘദ})^2 - (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2\}$$

$$= (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2 \times \frac{(\text{തഘ} - \text{ഘദ})^2 - (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2 + 4\text{ഘഗ}^2}{(\text{തഘ} - \text{ഘദ})^2 - (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2}$$

$$= (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2\left\{1 + \frac{576}{(\text{തഘ} - \text{ഘദ})^2 - (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2}\right\}$$

$$(4\text{ഗഘ}^2 = 4 \times 12 \times 12 = 576)$$

$$\text{അതായത്}\ \text{ഛായായോഗവൎഗ്ഗം} = \text{കൎണ്ണാന്തരവൎഗ്ഗം}$$
$$\times\left\{\frac{576}{\text{ഛായാന്തരവൎഗ്ഗം} - \text{കൎണ്ണാന്തരവൎഗ്ഗം}} + 1\right\}$$

$$\text{ഛായായോഗം} = \text{കൎണ്ണാന്തരം}\sqrt{\left\{\frac{576}{\text{ഛായാന്തരവൎഗ്ഗം} - \text{കൎണ്ണാന്തരവൎഗ്ഗം}} + 1\right\}}$$

ഛായാന്തരം ജ്ഞാതം.

അപ്പോൾ ചരായകളുടെ യോഗത്തിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെയും യോഗാന്തരാർദ്ധങ്ങൾ ചരായകളാകുന്നവ.*]

അനന്തരം പിന്നെ പിണ്ഡജ്യാഭാഗത്തിങ്കന്നു ഖണ്ഡാന്തരയോഗം ഉണ്ടാകും എന്നിതും വ്യത്തവ്യാസങ്ങളെ കരിടത്ത് അറിഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടത്തിങ്കലേയ്ക്കു ത്രൈരാശികം ചെയ്യാം എന്നിച്ചൊല്ലിയ രണ്ടു ന്യായവും കൂടിയാൽ ഗോളപൃഷ്ഠത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം ഉണ്ടാകും എന്നതിനെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ നേരെ ഉരുണ്ടിരിക്കുന്ന വസ്തുവിന്നു ഗോളമെന്നു പേർ. ഇങ്ങനെ ഇരിന്നോരു ഗോളത്തിന്റെ നേരെ നടുവേ സമപൂർവ്വാപരമായിട്ടും ദക്ഷിണോത്തരമായിട്ടും ഓരോ വൃത്തത്തെ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഇസ്സമപൂർവ്വാപരത്തിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊന്നു തെക്കും വടക്കും നീങ്ങീട്ടു ഓരോ വൃത്തത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇവററിന്നു സമപൂർവ്വാപരത്തിങ്കന്ന് ഉള്ള അകലം എല്ലാ അവയവത്തിങ്കന്നും തുല്യമായിരിക്കേണം. ആകയാൽ ഇവ രണ്ടും നടേത്തേതിനേക്കാൾ കുറഞ്ഞൊന്നു ചെറുതായിട്ടിരിക്കും. പിന്നേയും ഇച്ചൊല്ലിയവണ്ണം തന്നെ ഇവററിങ്കന്നും തുടങ്ങി കുറഞ്ഞൊന്നു ചെറുതായി ചെറുതായി

---

* The problem in short is to find the base of a triangle when the difference between the two sides, the altitude and the difference between the segments into which the altitude divides the base, are given.

Let a be the base, b, c the sides, p the altitude, x, y the segments of a adjacent to b, c aespectireely.

Given $b-c$, $x-y$, and p. Required to find a.

$$b^2-c^2=x^2-y^2$$

$$\therefore (b+c)(b-c)=(x+y)(x-y)$$

$$\therefore \frac{b+c}{x-y}=\frac{x+y}{b-c}$$

$$\therefore \frac{(b+c)^2}{(x-y)^2}=\frac{(x+y)^2}{(b-c)^2}=\frac{(b+c)^2-(x+y)^2}{(x-y)^2-(b-c)^2}$$

$$\therefore (x+y)^2=(b-c)^2\times\frac{(b+c)^2-(x+y)^2}{(x-y)^2-(b-c)^2}$$

$$=(b-c)^2\left\{1+\frac{(b+c)^2+(b-c)^2-(x+y)^2-(x-y)^2}{(x-y)^2-(b-c)^2}\right\}$$

$$=(b-c)^2\left\{1+\frac{2(b^2+c^2-x^2-y^2)}{(x-y)^2-(b-c)^2}\right\}$$

$$=(b-c)^2\left\{1+\frac{4p^2}{(x-y)^2-(b-c)^2}\right\}$$

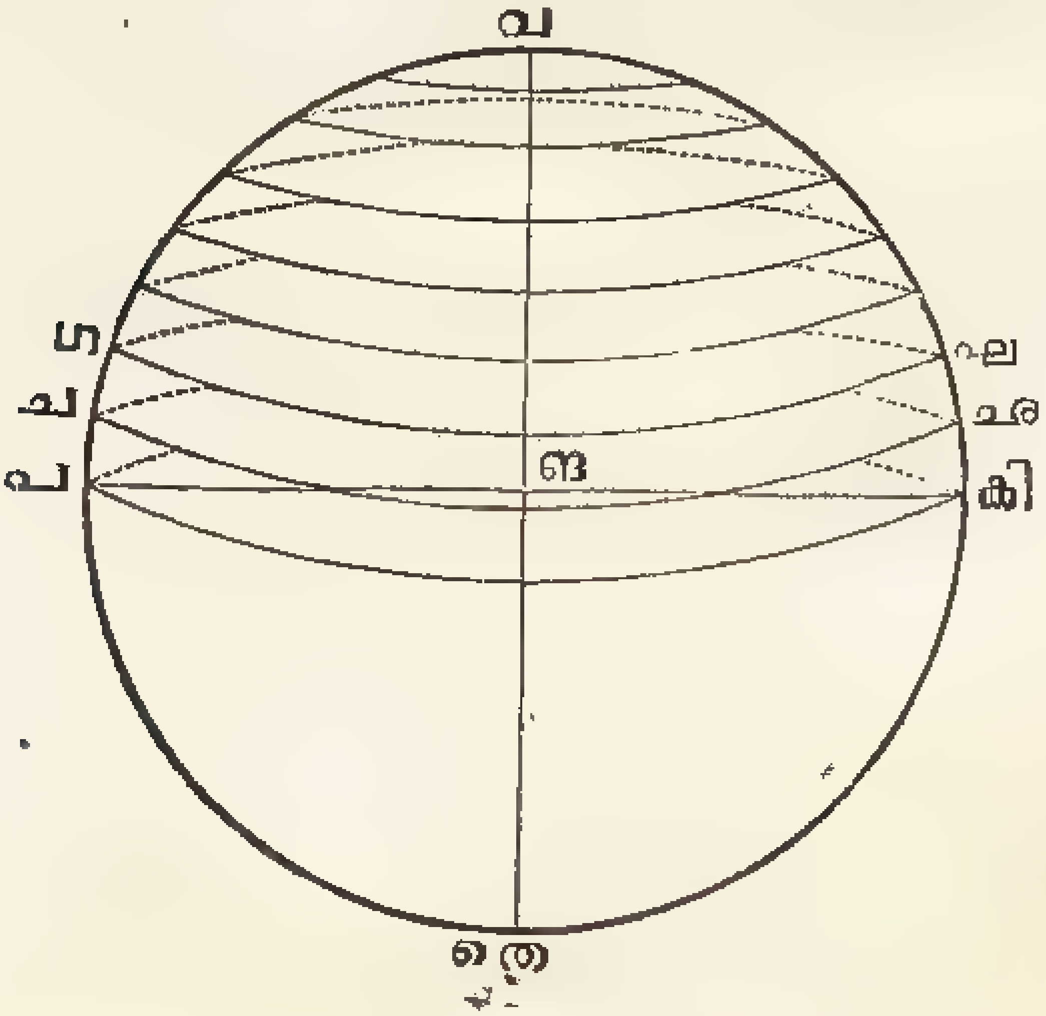
$$\therefore x+y=a=(b-c)\sqrt{\left\{1+\frac{4p^2}{\sqrt{(x-y)^2-(b-c)^2}}\right\}}$$

നാനാപ്രമാണങ്ങളായി പഴുത്ത് എല്ലാററിന്നും അന്യോന്യം അകലം ഒത്തു തെക്കേയും വടക്കേയും പാശ്വത്തിങ്കൽ ഒടുങ്ങുമാറു ചില വൃത്തങ്ങളെ കല്പിപ്പൂ. ഇവററിന്റെ അകലം ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കൽ തുല്യമായിട്ടു കാണായിരിക്കേണം. ഇവ്വണ്ണമിരിക്കുന്നേടത്തു രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ പഴുത്തു വൃത്താകാരേണ ഇരിക്കുന്നതിനെ ഒരിടത്തു മുറിച്ചു ചുരുൾ അഴിച്ചു നിവത്തുമാറു കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഈ പഴുതിന്റെ ഇരുപുറവും ഉള്ള വൃത്തങ്ങളിൽ വലിയ വൃത്തം ഭൂമി, ചെറിയ വൃത്തം മുഖം, പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കലെ വൃത്താന്തരാളമായിട്ടിരിക്കുന്ന ചാപഖണ്ഡം പാശ്വഭുജയായി സമലംബമായി ഇരിപ്പോരു ചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഒരു പാശ്വത്തിങ്കലെ ലംബത്തിങ്കന്നു പുറവാ മുറിച്ചു മററെ പാശ്വത്തിങ്കൽ മേൽ കീഴ പകൎന്നു കൂട്ടൂ. അപ്പോൾ മുഖഭൂയോഗാൎദ്ധം നീളമായി ലംബമിടയായി ഇരിപ്പോരു ആയതചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഈവണ്ണമെല്ലാമന്തരാളങ്ങളേയും ആയതചതുരശ്രങ്ങളായിട്ടു കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഇടമെല്ലാററിന്നും തുല്യമായിട്ടിരിക്കും. നീളം നാനാപ്രമാണങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ നീളവുമിടവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ക്ഷേത്രഫലം. അവിടെ വിസ്താരമെല്ലാററിന്നും തുല്യമാകയാൽ നീളമെല്ലാററിന്റേയും കൂട്ടി വിസ്താരംകൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ ഗോളപൃഷ്ഠഫലം വരും. ഇവിടെ അന്തരാളങ്ങൾ എത്ര ഉള്ളൂ എന്നും ഇവററിന്റെ ആയാമവിസ്താരങ്ങൾ എത്ര എന്നുമറിവാൻ എന്ത് ഉപായം എന്നു പിന്നെ. ഇവിടെ ഇഗ്ഗോളവ്യാസാൎദ്ധവൃത്തത്തിങ്കലെ അൎദ്ധജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും ഇക്കല്പിച്ച വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാൎദ്ധങ്ങൾ. ആകയാൽ ഈ ജ്യാക്കളെ ഗോളപരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഗോളവ്യാസാൎദ്ധത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അതതു ജ്യാവു വ്യാസാൎദ്ധമായിരിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുണ്ടാം. ഇവ ഇദ്ദീൎഘചതുരശ്രങ്ങളുടെ നീളമായിട്ടിരിക്കും, അന്തരാളമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ജ്യാക്കളെ കല്പിച്ചുകൊണ്ടാൽ. പിന്നെ ഈ അൎദ്ധജ്യായോഗത്തെ ഗുണിക്കിൽ എല്ലാ ക്ഷേത്രായാമങ്ങളുടേയും യോഗമുണ്ടാകും. ഇതിനെ വിസ്താരംകൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ ക്ഷേത്രഫലയോഗമുണ്ടാകും. മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കലെ വൃത്താന്തരാളഭാഗങ്ങൾ യാവചിലവ അവ ഗോളപരിധിയിങ്കലെ ചാപഖണ്ഡമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിന്റെ ജ്യാവ് ഇവിടെ ക്ഷേത്രവിസ്താരമാകുന്നത്. പിന്നെ ജ്യായോഗത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരം. അവിടെ ഖണ്ഡാന്തരയോഗത്തെക്കൊണ്ടു ഗോളവ്യാസാൎദ്ധവൃ

ർഗ്ഗത്തെ ഗുണിച്ച ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം അർദ്ധജ്യായോഗം. പിന്നെ ഇതിനെ ക്ഷേത്രവിസ്താരംകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണം. വിസ്താരമാകുന്നതു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ജ്യാവ്. ഖണ്ഡാന്തരയോഗമാകുന്നത് ആദ്യഖണ്ഡജ്യാവ്. ഇവററിനു മിക്കവാറും അല്പത്വംകൊണ്ടു സമസ്തജ്യാതുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇവ രണ്ടും ഗുണകാരങ്ങൾ, സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം ഹാരകം. എന്നാൽ ഗുണനവും ഹരണവും വേണ്ടാ. വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംതന്നെ ശേഷിപ്പൂ. പിന്നെ പരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. അപ്പോൾ വ്യാസാർദ്ധംതന്നെ ശേഷിക്കും. പിന്നെ ഗോളത്തിന്റെ രണ്ട് അർദ്ധത്തിങ്കലെ ഫലവും ഉണ്ടാക്കേണ്ടുകയാൽ വ്യാസാർദ്ധത്തെ ഇരട്ടിക്കേണം. ആകയാൽ ഗോളവ്യാസത്തെ ഗോളപരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഗോളപൃഷ്ഠത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രഫലമുണ്ടാകും.

[(1) പിണ്ഡജ്യായോഗത്തിങ്കന്നു ഖണ്ഡാന്തരയോഗമുണ്ടാകും. (2) വൃത്തവ്യാസങ്ങളെ ഒരിടത്തറിഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടത്തിങ്കലേയ്ക്കു ത്രൈരാശികം ചെയ്യാം. എന്നീ രണ്ടു ന്യായങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗോളപൃഷ്ഠത്തിങ്കലെ ക്ഷേത്രഫലത്തെ വരുത്താം.

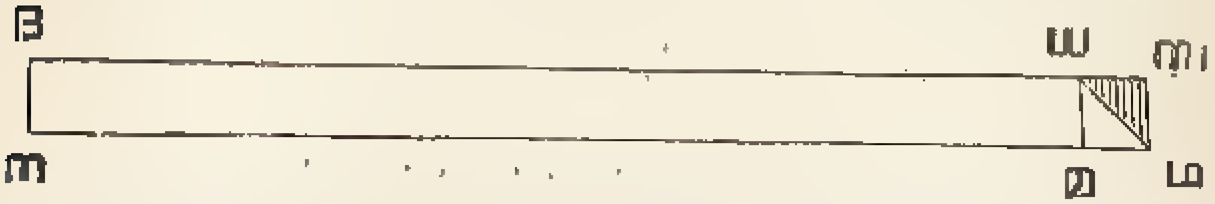
ഒരു ഗോളത്തിന്റെ നടുവിലുള്ള സമപൂർവ്വാപരവൃത്തം കിങപ എന്ന്. (പരിലേഖം 58(i)) സമപൂർവ്വാപരവൃത്തത്തിങ്കന്നു തെക്കും വടക്കും ഗോ



പരിലേഖം 58(i)

ഉപൃഷ്ഠത്തിങ്കൽ വൃത്തങ്ങളെ കല്പിക്ക. അടുത്തു് ഈരണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ തങ്ങളി ലുള്ള അകലം എല്ലാ അവയവത്തിങ്കലും തുല്യങ്ങളായിരിക്കണം. ഈ അ കലത്തെ ഗോളവൃത്തമായ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കൽ ചാപഖണ്ഡാകാരേ

പരിലേഖം 58 (ii)



പരിലേഖം 58 (iii)

ണ കാണാം. വടക്കോട്ടും തെക്കോട്ടും പോകുംതോറും വൃത്തങ്ങൾ ചെറുതായി ചെറുതായി വരും. ഈ വൃത്തങ്ങളുടെ പരിധികൾ നാനാപ്രമാണങ്ങളാണെ ങ്കിലും അടുത്തുള്ള ഈരണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ തങ്ങളിലുള്ള അകലങ്ങൾ എല്ലാം തു ല്യം. ഇങ്ങനെ തെക്കും വടക്കും ഗോളമൊടുങ്ങുവോളം വൃത്തങ്ങളെ കല്പിപ്പൂ.

രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ ഇടയിലുള്ള ഗോളപൃഷ്ഠഭാഗത്തെ വൃത്താകാരേണയു ള്ള പഴുതിൽക്കൂടി മുറിച്ചു നിവർത്തിവെക്കുകയാണെങ്കിൽ പരിലേഖം 58(ii) ലെപ്പോലെ തദധഥ എന്നൊരു ക്ഷേത്രം വരും. അവിടെ വലിയ വൃത്തത്തി ന്റെ പരിധി തഥ ഭൂമി; ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ പരിധി ദധ മുഖം; ദക്ഷി ണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കലെ വൃത്താന്തരാളചാപഖണ്ഡം (ദത, ധഥ) പാർശ്വഭുജ കൾ; ഇങ്ങനെ സമലംബമായിരിക്കുന്ന ഒരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ദന, ധമ എന്ന രണ്ടു ലംബങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുക. തദന എന്ന ത്ര്യശ്രത്തെ മുറിച്ചു ത എ ന്നതിനെ ധയിലും ദ എന്നതിനെ ഥയിലും തദ എന്നതിനെ ഥദ മാർഗ്ഗേണ യും വരുമാറു പരിലേഖം 58(iii)ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നപോലെ ചേർക്കുക. എ ന്നാൽ ദനഥന, എന്നൊരായതചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ഇതിന്റെ നീളം $= \frac{തഥ + ദധ}{2}$; ഇട = ലംബം. ഇതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം = ലംബം $\times \frac{തഥ + ദധ}{2}$. ഇ ങ്ങനെ എല്ലാ അന്തരാളഭാഗത്തിങ്കലേയും ക്ഷേത്രഫലത്തെ കാണാം. അ പ്പോൾ അടുത്തു രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ മദ്ധ്യത്തിങ്കലുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ പരിധി യെ ലംബംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ആ അന്തരാളത്തിങ്കലെ ക്ഷേത്രഫലം വരും.

സമപൂർവ്വാപരവൃത്തത്തിങ്കന്നു മീതെയുള്ള ഗോളപൃഷ്ഠഭാഗത്തിന്റെ ക്ഷേ ത്രഫലം വരുത്തുവാൻ അപ്പുറത്തുള്ള അന്തരാളമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ എല്ലാ വൃത്തപ രിധികളുടേയും യോഗത്തെ ലംബംകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണം.

ഈ പരിധികളെ $പ_1, പ_2, പ_3$........എന്നു കല്പിക്ക.

ഇവയുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളെ $ബ_1, ബ_2, ബ_3$.........എന്നും കല്പിക്ക. ഇ വയെല്ലാം ഗോളവ്യാസാർദ്ധവൃത്തത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാക്കൾ.

ഗോളവ്യാസാർദ്ധം = വ; ഗോളപരിധി = പ.

$$\left.\begin{array}{l}\text{പ}_1 = \dfrac{\text{ബ}_1 \times \text{പ}}{\text{വ}} \\[2ex] \text{പ}_2 = \dfrac{\text{ബ}_2 \times \text{പ}}{\text{വ}} \\[2ex] \text{പ}_3 = \dfrac{\text{ബ}_3 \times \text{പ}}{\text{വ}} \\[2ex] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}$$

(വൃത്തവ്യാസങ്ങളെ ഒരിടത്ത് അറിഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടത്തിങ്കലേക്ക് ത്രൈരാശികം ചെയ്യാം എന്ന ന്യായംകൊണ്ട്)

$$\therefore \text{പ}_1 + \text{പ}_2 + \text{പ}_3 + \cdots\cdots = \frac{\text{പ}}{\text{വ}}(\text{ബ}_1 + \text{ബ}_2 + \text{ബ}_3 + \cdots\cdots)$$

$$\text{അർദ്ധജ്യായോഗം} = \text{ബ}_1 + \text{ബ}_2 + \text{ബ}_3 + \cdots\cdots$$

$$= \frac{\text{ഖണ്ഡാന്തരയോഗം} \times \text{വ}^2}{\text{അന്തരാളചാപഖണ്ഡത്തിലെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{ഖണ്ഡാന്തരയോഗം} = \text{ആദ്യജ്യാഖണ്ഡം} - \text{ഒടുക്കത്തെ ജ്യാഖണ്ഡം}$$

അന്തരാളചാപഖണ്ഡത്തെ അണുപ്രായമായി കല്പിച്ചാൽ, ഒടുക്കത്തെ ജ്യാഖണ്ഡത്തെ ശൂന്യമെന്നുതന്നെ കല്പിച്ച ഖണ്ഡാന്തരയോഗത്തെ ആദ്യഖണ്ഡജ്യാവെന്നുതന്നെ കല്പിക്കാം.

അപ്പോൾ ഖണ്ഡാന്തരയോഗം = ആദ്യഖണ്ഡജ്യാവ്.

ലംബം = അന്തരാളചാപഖണ്ഡത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാവ്.

ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അല്പത്വംകൊണ്ട് ആദ്യഖണ്ഡജ്യാവിനേയും ലംബത്തേയും സമസ്തജ്യാതുല്യമെന്നു കല്പിക്കാം.

അപ്പോൾ ഗോളപൃഷ്ഠഫലാർദ്ധം.

$$= \frac{\text{പ}}{\text{വ}}(\text{ബ}_1 + \text{ബ}_2 + \text{ബ}_3 + \cdots\cdots) \times \text{ലംബം}$$

$$= \frac{\text{പ}}{\text{വ}} \times \frac{\text{ഖണ്ഡാന്തരയോഗം} \times \text{വ}^2}{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}} \times \text{ലംബം}$$

$$= \frac{\text{പ}}{\text{വ}} \times \frac{\text{വ}^2 \times \text{സമസ്തജ്യാവ്} \times \text{സമസ്തജ്യാവ്}}{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$= \frac{\text{പ}}{\text{വ}} \times \text{വ}^2$$

$$= \text{പ} \times \text{വ}.$$

$$\therefore \text{ഗോളപൃഷ്ഠഫലം} = 2\text{വ} \times \text{പ} = \text{ഗോളപരിധി} \times \text{ഗോളവ്യാസം}.$$]

ഗോളഘനക്ഷേത്രഫലാനയനം

അനന്തരം ഗോളത്തിങ്കലെ അന്തർഭാഗത്തിങ്കലെ ഘനക്ഷേത്രഫലത്തെ ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ ഗോളപൃഷ്ഠഫലത്തെ അറിവാനായിക്കൊണ്ടു കല്പിപ്പാൻ ചൊല്ലിയ വൃത്തമാർഗ്ഗേണ മുറിപ്പൂ. അപ്പോൾ നേരെ പരന്ന വൃത്തങ്ങളായിരിപ്പോ ചിലവ ഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. അവിടെ പൃഷ്ഠഫലത്തിങ്കൽ പൂർവ്വാപരങ്ങളായിട്ടു വൃത്തങ്ങളെ കല്പിക്കുന്നു എങ്കിൽ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കലെ പരിധിഖണ്ഡ

ത്തിന്റെ നീളമൊത്തിരിക്കേണം എന്നു നിയതമാകുന്നതു്. ഇവിടെ പിന്നെ എല്ലാ മറികളും മുഴപ്പ് ഒത്തിരിക്കേണമെന്നു നിയതമാകുന്നതു്. പിന്നെ എല്ലാ വൃത്തത്തിങ്കലേയും വർഗ്ഗക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാക്കി ഓരോ മാനം മുഴപ്പു എന്നു കല്പിച്ചു തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാൽ ഗോളത്തിന്റെ ഘനഫലമുണ്ടാകും. വൃത്തക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ വർഗ്ഗഫലത്തെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം പിന്നെ. വൃത്തക്ഷേത്രത്തെ വ്യാസമാർഗ്ഗേണ രണ്ടു പെളിപ്പു സമമായിട്ടു്. പിന്നെ രണ്ടു പെളിയിങ്കലും കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി നേമിയിങ്കലോളം കീറൂ; നേമിയിങ്കലേടം എല്ലാററിലും പരന്നു, കേന്ദ്രത്തിങ്കലേടം കൂർത്തു, ഇങ്ങനെ ഇരിക്കും. പിന്നെ രണ്ടു വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളേയും നേമീടെ രണ്ടു തലയും പിടിച്ചു നിവർത്തി തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ, കേന്ദ്രത്തിലെ കൂർത്തപ്രദേശം മറേറതിങ്കലെ പഴുതിൽ ചെല്ലുമാറു്. അപ്പോൾ വൃത്താർദ്ധം നീളമായി വ്യാസാർദ്ധം ഇടയായി ഇരിപ്പോരു് ആയതചതുരശ്രക്ഷേത്രം ഉണ്ടാകും. എന്നാൽ വൃത്താർദ്ധവും വ്യാസാർദ്ധവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ വൃത്തക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രഫലം ഉണ്ടാകും. എന്നാൽ അതതു് അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗത്തെ ഗോളപരിധികൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഗോളവ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അതതു ക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാകും. പിന്നെ ഇവററിന്റെ യോഗം ഗോളക്ഷേത്രഘനഫലമായിട്ടിരിക്കും. അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം. അവിടെ ശരവും ശരോനവ്യാസവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, കോടികർണ്ണയോഗം ശരോനവ്യാസം, അന്തരം ശരം, എന്നിട്ടു്. അവിടെ ശരത്തേയും ശരോനവ്യാസത്തേയും വർഗ്ഗിച്ചു കൂട്ടി വ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ അതിനെ അർദ്ധിച്ചതും അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, യോഗവർഗ്ഗവും വർഗ്ഗയോഗവും തങ്ങളിലന്തരം ദ്വിഗുണഘാതമായിട്ടിരിക്കും, എന്നിട്ടു്. അവിടെ വൃത്തക്ഷേത്രങ്ങൾ പെരികെ കുറഞ്ഞു് അണുപ്രായമാത്രം മുഴപ്പായിട്ടു് ഈ വൃത്തങ്ങളെ കല്പിക്കേണ്ടൂ. അവിടെ ഒരണുവായിട്ടിരിപ്പൊന്നു നടേത്തെ ശരം. ഈ ശരത്തിൽ ഓരോരോ അണുക്കൾ ഏറക്കൂടിയതു പിന്നെ പിന്നത്തെ ശരമാകുന്നതു്. എന്നാലണുക്കളുടെ ഏകാദ്യേകോത്തരസംകലിതങ്ങൾ പ്രഥമദ്വിതീയാദി ശരങ്ങളാകുന്നതു്. ആകയാൽ ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗസംകലിതം ശരവർഗ്ഗയോഗമാകുന്നതു്. വ്യാസം ഗച്ഛമായിട്ടിരിപ്പോരുരാശി ഇതു്. വ്യാസത്തെ അണുവായി ഖണ്ഡിച്ചിട്ടു വർഗ്ഗസംകലിതം ചെയ്യുന്നു. ഇതിനെ ഇരട്ടിച്ചതു ശരവർഗ്ഗയോഗവും ശരോനവ്യാസവർഗ്ഗയോഗവും കൂടിയതായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഒന്നു തുടങ്ങി വ്യാസാർദ്ധതുല്യമാവോളം കുറഞ്ഞതു ശരം വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കലേറിയതു ശരോനവ്യാസം. പിന്നെ ഏറിയതു

ശരം കുറഞ്ഞതു ശരോനവ്യാസം എന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ശരവർഗ്ഗയോഗവും ശരോനവ്യാസവർഗ്ഗയോഗവും തുല്യമായിട്ടിരിക്കും. എന്നിട്ട് ഏകാദ്യേകോത്തരസംകലിതത്തെ ഇരട്ടിപ്പാൻ ചൊല്ലീ. രണ്ടും തന്നെ ശരമത്രെ; വലിയ ശരം ഒന്ന്; ചെറിയ ശരം ഒന്ന്. രണ്ടിന്നും കൂടി ജ്യാവ് ഒന്ന് എന്നിങ്ങനെ കല്പിക്കിലുമാം. അവിടേ ശരവും ശരോനവ്യാസവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു് അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗമാകുന്നതു്.

"വൃത്തേ ശരസംവർഗ്ഗോഽർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗസ്സ ഖലു ധനുഷോഃ"*എന്നുണ്ടു്.

പിന്നെ ശരവർഗ്ഗവും ശരോനവ്യാസവർഗ്ഗവുംകൂടി വ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു പോയശേഷത്തിന്റെ അർദ്ധവും അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, വർഗ്ഗയോഗവും യോഗവർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ അന്തരം ദ്വിഗുണഘാതം എന്നിട്ട്. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ എത്ര അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗത്തെ ഉണ്ടാക്കേണം അത്രയിൽ ഗുണിക്കേണം വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ. ആകയാൽ അണുച്ഛേദം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന വ്യാസത്തിന്റെ ഘനമായിട്ടിരിക്കുമതു്. അവിടെ അണുച്ഛേദംകൊണ്ടു് പിന്നെ ഹരിക്കേണ്ടുകയാൽ കേവലം വ്യാസഘനമായിട്ടേ ഇരിക്കൂ ഇതു്. പിന്നെ അതിങ്കന്നു വർഗ്ഗസംകലിതത്തെ ഇരട്ടിച്ചു് അതിനെ കളയേണം. വർഗ്ഗസംകലിതമാകുന്നതു ഘനത്ര്യംശം. ഇതിനെ ഇരട്ടിച്ചു കളയേണ്ടുകയാൽ ശിഷ്ടം ഘനത്ര്യംശം. പിന്നെ ഇതിനെ അർദ്ധിക്കേണ്ടുകയാൽ ഘനഷഷ്ഠാംശം. ആകയാൽ വ്യാസത്തെ ഘനിച്ചു് ആറിൽ ഹരിച്ചതു ഗോളത്തിങ്കലെ നിരന്തരം ഉള്ള അർദ്ധജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗയോഗമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇതിനെ പരിധികൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. ആകയാൽ വ്യാസത്തെ നടേ തന്നെ ഘനിക്കേണ്ടാ, വർഗ്ഗിക്കേവേണ്ടൂ, പിന്നെ ഹരിക്കേണ്ടുകയാൽ. എന്നാൽ വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ ഗോളപരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു് ആറിൽ ഹരിച്ച ഫലം ഗോളത്തിങ്കലെ ഘനഫലമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ജ്യാവർഗ്ഗസംകലിതപ്രസംഗാൽ ശരവർഗ്ഗസംയോഗദ്വാരാ ഉണ്ടാകുന്ന ഘനഗോളഫലത്തെ ചൊല്ലീ പൃഷ്ഠഫലത്തേയും§.

---

* ആര്യഭടീയം ഗണിതപാദം ശ്ലോകം 17

§ If R is the radius of a sphere, then

the area of the surface of the sphere $=4\pi R^2$

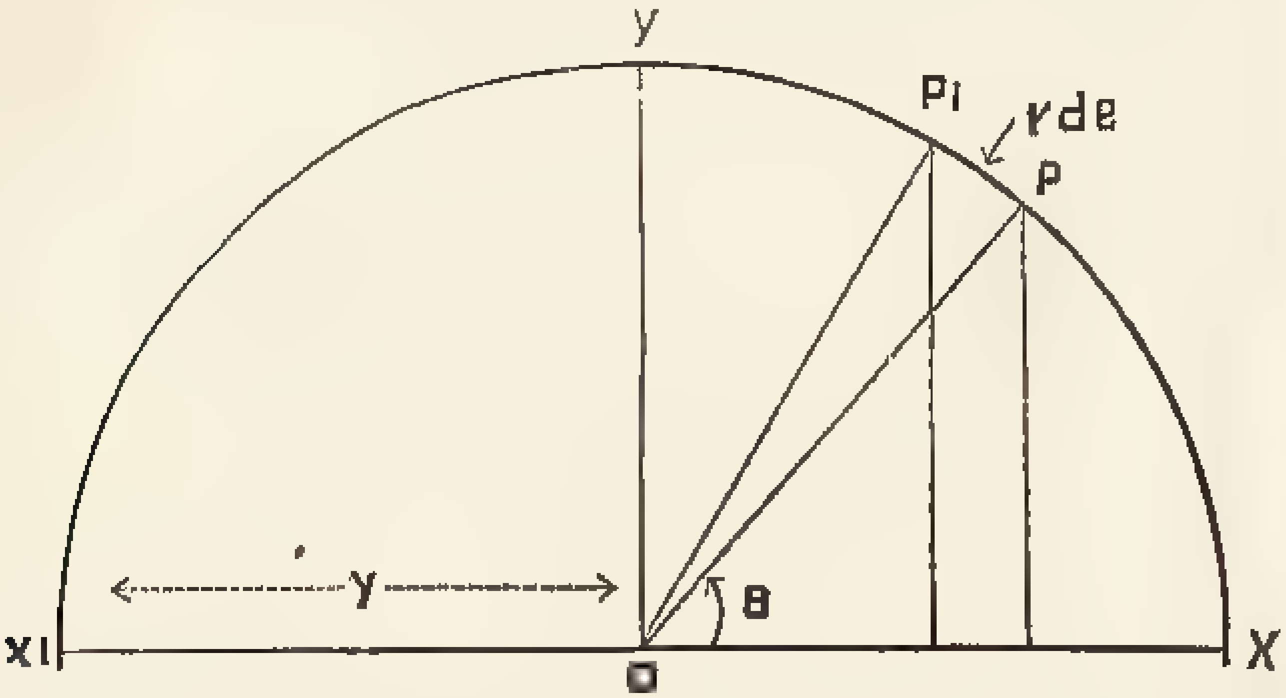
$$=(2\pi R)\times(2R)$$

The cubic contents of the sphere $=\dfrac{4\pi R^3}{3}=\dfrac{(2\pi R)\times(2R)^2}{6}$

The results shown above are now achieved by integral calculus as shown below.

[ഗോളത്തിന്റെ ഘനക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാക്കേണ്ടുന്നിടത്തു വൃത്തക്ഷേത്രഫലത്തിന്റെ അപേക്ഷയുണ്ടാകകൊണ്ടു് അതിനെ മുമ്പിൽ ഉണ്ടാക്കുന്നു. പരി

A sphere can be supposed to be formed by the revolution of a semi-circle about its diameter XOX' Then every point P on the circumference having its polar co-ordinates r, θ will describe a circle whose radius is $r \sin\theta$. The arc $PP'=r\times d\theta$



പരിലേഖം 59

Hence the area produced by the rotation of $PP'=2\pi r\times\sin\theta\times r\,d\theta$

Then ths sum of all such areas formed up to the point Y

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2 \sin\theta\times d\theta=\Big[-2\pi r^2\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\pi r^2$$

This is only half the surface of the sphere

Hence the whole surface area$=4\pi r^2$

Again the volume of the element produced by the rotation of

$$PP'=\pi y^2\times dx$$

But $y=r\sin\theta$, $x=r\cos\theta$

$$\therefore\quad dx=-r\sin\theta\,d\theta$$

$$\therefore\quad \pi y^2\,dx=-\pi r^3\sin^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$\therefore\quad \int_r^0 \pi y^2\,dx=-\pi r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=\pi r^3\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$=\pi r^3\left[\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^0$$

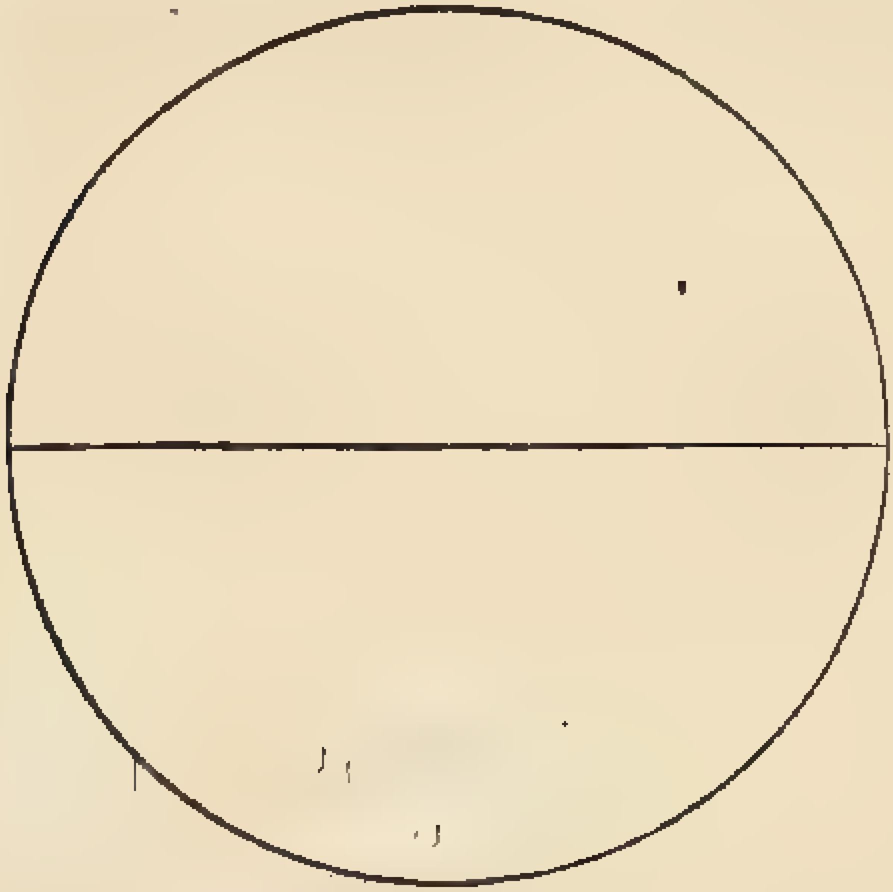
$$=\pi r^3\,(1-\tfrac{1}{3})$$

$$=\tfrac{2}{3}\pi r^3$$

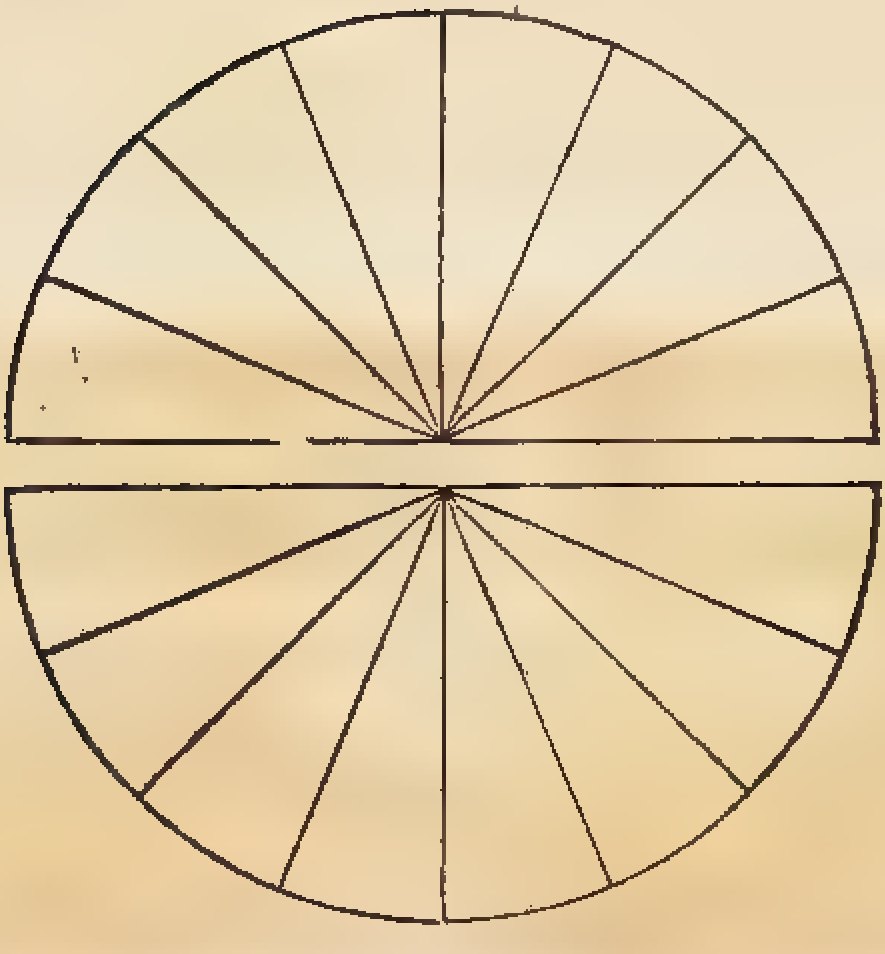
This is one half of the sphere. Hence the whole volume

$$=\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

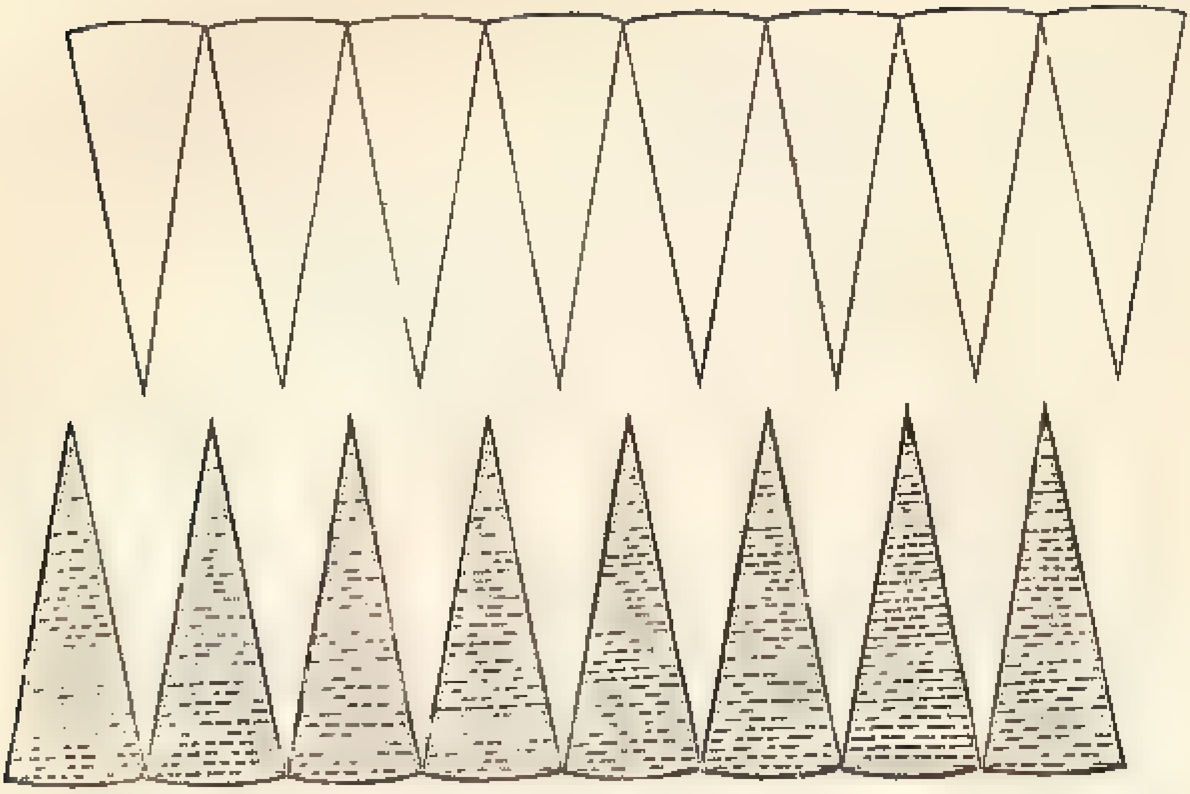
ലേഖം 60(i) ഒരു വൃത്തം. വൃത്തത്തെ ഒരു വ്യാസമാർഗ്ഗേണ രണ്ടു തുല്യങ്ങളായിട്ടു വിഭജിക്കുക. (ii) പരിധ്യർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടിനേയും തുല്യചാപഖണ്ഡങ്ങ



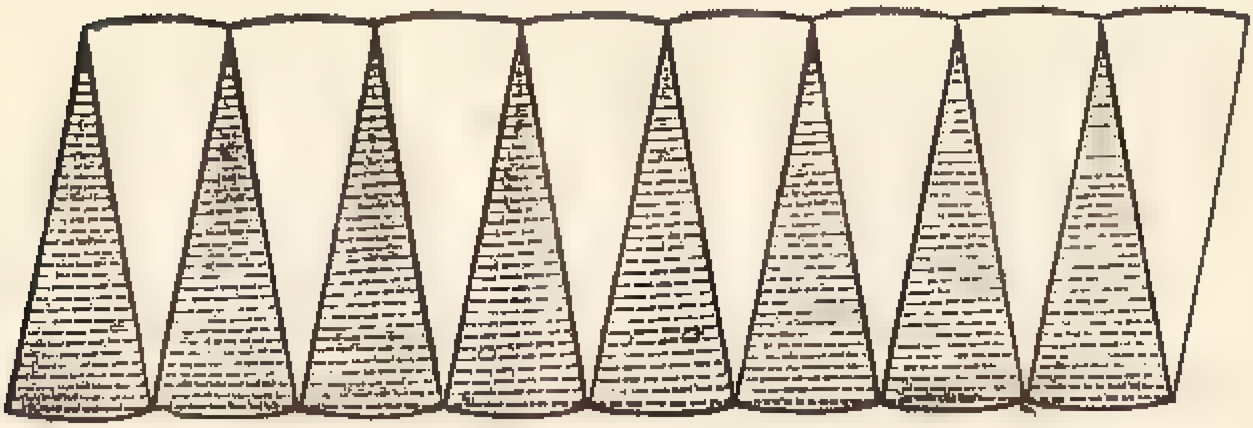
പരിലേഖം 60(i)



പരിലേഖം 60 (ii)



പരിലേഖം 60(iii)



പരിലേഖം 60(iv)

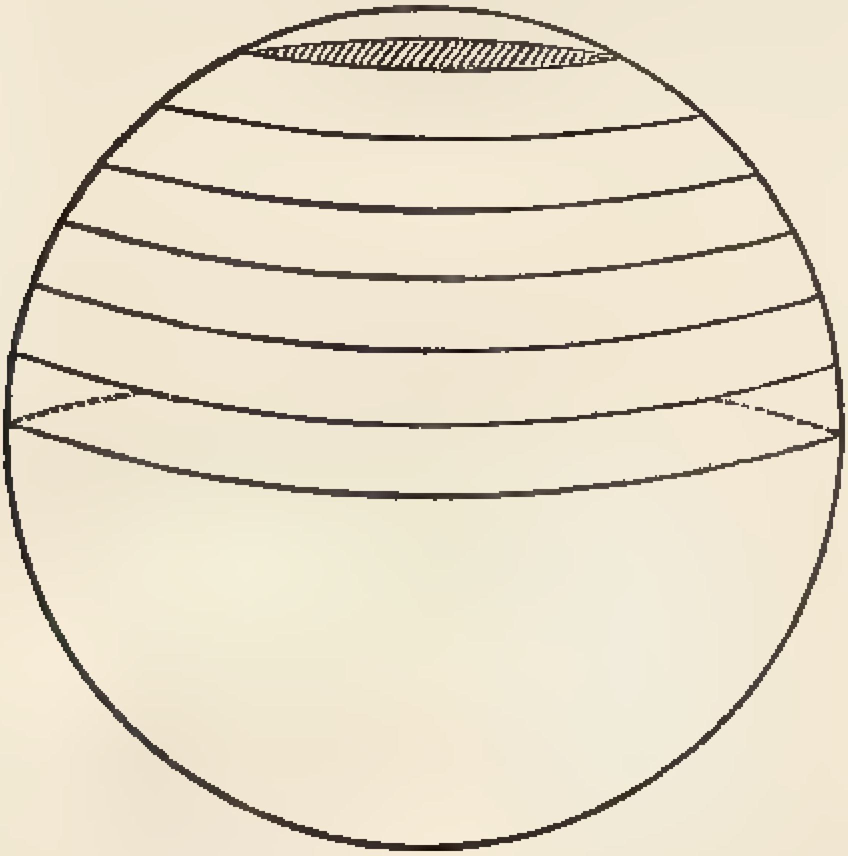
ളായിട്ടു ഭാഗിക്കുക. എല്ലാ ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽനിന്നും വ്യാസാർദ്ധങ്ങളെ വരക്കുക. ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽ കുറച്ചു വേർപെടാതെ ഈ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിൽകൂടി മുറിച്ച്, പരിധ്യർദ്ധത്തിന്റെ രണ്ടറ്റവും പിടിച്ചു നിവർത്തി (iii)ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നപ്രകാരം രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുക. ഈ ക്ഷേത്രങ്ങളെ (iv)ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നപ്രകാരം കൂട്ടിച്ചേർക്കുക. അപ്പോൾ രണ്ടു ഭുജകളും പരിധ്യർദ്ധത്തിനോടു തുല്യമായിട്ടും രണ്ടു ഭുജകൾ വ്യാസാർദ്ധത്തിനോടു തുല്യമായിട്ടും ഒരായതചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ഇതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം വൃത്തക്ഷേത്രത്തിനോടു തുല്യം. പരിധ്യർദ്ധത്തെ അസംഖ്യമായി ഖണ്ഡിക്കുകയാൽ ഈ ഉണ്ടായക്ഷേത്രത്തെ ആയതചതുരശ്രമെന്നുതന്നെ കല്പിക്കാം.

ആയതചതുരശ്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം = പരിധ്യർദ്ധം × വ്യാസാർദ്ധം

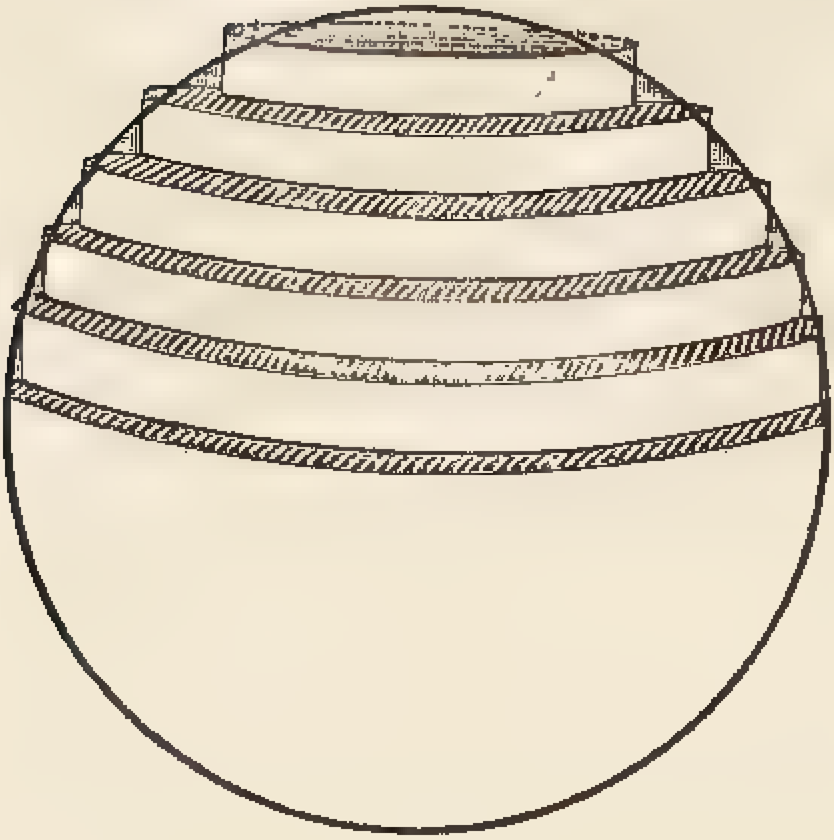
∴ വൃത്തക്ഷേത്രഫലം = പരിധ്യർദ്ധം × വ്യാസാർദ്ധം

അനന്തരം ഗോളഘനക്ഷേത്രഫലാനയനം:—

പരിലേഖം 61_ൽ ഗോളപൃഷ്ഠഫലാനയനത്തിലെപ്പോലെ ഗോളസമപൂർവ്വാപരവൃത്തത്തിന്റെ തെക്കും വടക്കും ഗോളത്തിങ്കൽ ചില വൃത്തങ്ങളെ



-a-



-b-

പരിലേഖം 61.

ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഗോളപൃഷ്ഠഫലാനയനത്തിങ്കൽ ഇവ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ തങ്ങളിലുള്ള അകലങ്ങൾ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കൽ തുല്യചാപഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടി

രിക്കേണമല്ലോ. എന്നാലിവിടെ അടുത്തുള്ള ഈ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ ഇടയിലുള്ള ഗോളഖണ്ഡങ്ങളുടെ മുഴുപ്പു തുല്യങ്ങളായിരിക്കേണം. അതായതു ഗോളഖണ്ഡങ്ങളുടെ പരന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ അന്തരാളങ്ങൾ തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കേണം. ഈ വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും. മുഴുപ്പ് എല്ലായിടത്തും ത്രുപമെന്നു കല്പിക്ക.

അപ്പോൾ ഒരു ഖണ്ഡത്തിന്റെ ഘനക്ഷേത്രഫലം

$$= \text{ഖണ്ഡമദ്ധ്യവൃത്തക്ഷേത്രഫലം} \times 1$$

$$\text{വൃത്തക്ഷേത്രഫലം} = \text{പരിധ്യർദ്ധം} \times \text{വ്യാസാർദ്ധം}$$

(അതതു വൃത്തത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ളവ)

$$\text{വൃത്തപരിധി} = \frac{\text{ഗോളപരിധി} \times \text{അർദ്ധജ്യാവ്}}{\text{ഗോളവ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\therefore \text{വൃത്തക്ഷേത്രഫലം} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{ഗോളപരിധി} \times \text{അർദ്ധജ്യാവ്}}{\text{ഗോളവ്യാസാർദ്ധം}} \times \text{അർദ്ധജ്യാവ്}.$$

$$= \frac{\text{ഗോളപരിധി} \times \text{അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ഗോളവ്യാസം}}$$

ഒരു വൃത്തത്തിൽ, $\text{ശരം} \times \text{ശരോനവ്യാസം} = (\text{കർണ്ണം} - \text{കോടി})(\text{കർണ്ണം} + \text{കോടി})$

$$= \text{കർണ്ണവർഗ്ഗം} - \text{കോടിവർഗ്ഗം}.$$

$$= \text{ഭുജാവർഗ്ഗം}$$

$$= \text{അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗം}$$

$$\therefore \text{അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗം} = \frac{2 \times \text{ശരം} \times \text{ശരോനവ്യാസം}}{2}$$

$$= \frac{(\text{ശരം} + \text{ശരോനവ്യാസം})^2 - (\text{ശരം}^2 + \text{ശരോനവ്യാസം}^2)}{2}$$

$$= \frac{\text{വ്യാസവർഗ്ഗം} - (\text{ശരം}^2 + \text{ശരോനവ്യാസം}^2)}{2}$$

ഇപ്പോൾ മുഴുപ്പു ത്രുപമായിട്ടല്ലോ കല്പിച്ചതു്. പിന്നെ ഈ മുഴുപ്പിനെ അണുവാക്കി കല്പിക്ക. അപ്പോൾ എല്ലാ ഖണ്ഡങ്ങളുടേയും മുഴുപ്പു തുല്യമാകയാൽ ആദ്യജ്യാവിന്നു ശരം ഒരണു, രണ്ടാംജ്യാവിന്നു ശരം രണ്ടണു, മൂന്നാമതിന്നു മൂന്നു് ഇങ്ങനെ ക്രമേണ ഏറിയേറിയിരിക്കും. അണുക്കളുടെ ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങൾ പ്രഥമദ്വിതീയാദിശരങ്ങളാകുന്നവ.

അപ്പോൾ ശരവർഗ്ഗയോഗം $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots$

വ്യാസത്തെ അണുവാക്കി വിഭജിക്കുകയാണെങ്കിൽ വ്യാസത്തിൽ എത്ര അണുക്കളുണ്ടോ ആ സംഖ്യ ഇവിടെ ഗച്ഛമാകുന്നതു്. ഗച്ഛം എന്നുവെച്ചാൽ ശ്രേഢിയിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം.

ശരം 1 എങ്കിൽ ശരോനവ്യാസം = വ്യാസം − 1

ശരം 2 എങ്കിൽ ശരോനവ്യാസം = വ്യാസം − 2

ശരം 3 എങ്കിൽ ശരോനവ്യാസം = വ്യാസം − 3

....

....

ശരം (വ്യാസം − 3) എങ്കിൽ ശരോനവ്യാസം = വ്യാസം   വ്യാസം − 3) = 3

ശരം (വ്യാസം − 2) എങ്കിൽ ശരോനവ്യാസം = 2

ശരം (വ്യാസം − 1) എങ്കിൽ ശരോനവ്യാസം = 1

∴ ശരയോഗം = 0 + 1 + 2 + 3 + ... + വ്യാസം.

ശരോനവ്യാസയോഗം = വ്യാസം + (വ്യാസം − 1) + ... + 1 + 0

ഇങ്ങനെ ശരയോഗവും ശരോനവ്യാസയോഗവും ഒന്നുതന്നെ.

∴ ശരവർഗ്ഗയോഗം = ശരോനവ്യാസവർഗ്ഗയോഗം

ശരത്തിന്നും ശരോനവ്യാസത്തിന്നും അർദ്ധജ്യാവു ഒന്നുതന്നെ.

$$\therefore \text{അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗം} = \frac{\text{വ്യാസവർഗ്ഗം} - 2\,\text{ശരവർഗ്ഗം}}{2}$$

$$= \frac{\text{വ്യാസവർഗ്ഗം}}{2} - \text{ശരവർഗ്ഗം}$$

ഖണ്ഡം വ്യാസസംഖ്യയാകയാൽ, അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗയോഗം

$$= \frac{\text{വ്യാസം} \times \text{വ്യാസവർഗ്ഗം}}{2} - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots + \text{വ്യാസവർഗ്ഗം})$$

$$= \frac{\text{വ്യാസഘനം}}{2} - \frac{\text{വ്യാസഘനം}}{3}$$

$$= \frac{\text{വ്യാസഘനം}}{6}$$

$$\therefore \text{ഗോളഘനക്ഷേത്രഫലം} = \frac{\text{ഗോളപരിധി}}{\text{ഗോളവ്യാസം}} \times \text{അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗയോഗം}$$

$$= \frac{\text{ഗോളപരിധി}}{\text{ഗോളവ്യാസം}} \times \frac{\text{ഗോളവ്യാസഘനം}}{6}$$

$$= \frac{\text{ഗോളപരിധി} \times \text{ഗോളവ്യാസവർഗ്ഗം}}{6}$$

$$\frac{\text{ഗോളപൃഷ്ഠക്ഷേത്രഫലം} \times \text{ഗോളവ്യാസം}}{6}$$

അനുബന്ധം

കുട്ടാകാരക്രിയാ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

നിരഗ്രകുട്ടാകാരം:

അനന്തരം കുട്ടാകാരമാകുന്ന ഗണിതത്തിന്റെ ക്രിയ ചൊല്ലുവാനായിക്കൊണ്ടു തുടങ്ങുന്നേടത്ത് അതിന്റെ വിഷയത്തെ കാട്ടുന്നു.

ഭാജ്യോയേന ഹതശ്ശുദ്ധിഹീനഃ ക്ഷേപാന്വിതോഥവാ |
ശക്യോ ഹാരേണ നിശ്ശ്ലേഷം ഹന്തും സ ഗുണകസ്തു കഃ || 1
തൽഫലം ച കിമിത്യേതൽ കുട്ടാകാരേണ ഗമ്യതേ |

കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ ഗുണ്യത്തെ **ഭാജ്യ**മെന്നും ശേഷത്തെ **അഗ്ര**മെന്നും ചൊല്ലുന്നു. ഭാജ്യത്തെ യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഇഷ്ടശുദ്ധിയെ (ശുദ്ധി=കളയേണ്ടും സംഖ്യ) കളയുകയൊ, ഇഷ്ടക്ഷേപത്തെ (ക്ഷേപം=കൂട്ടേണ്ടുംസംഖ്യ) കൂട്ടുകയൊ ചെയ്തനന്തരം **ഹാരകം**കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷം ഇല്ലാതെയിരിക്കും, അങ്ങനെയുള്ള **ഗുണകാര**മെന്ത് എന്നും ഹരിച്ചാൽ ഫലം എന്ത് എന്നും അറിവാനുള്ള ഉപായത്തെ നിരഗ്രകുട്ടാകാരക്രിയ എന്നു പറയുന്നു.

ഭാജ്യഹാരകങ്ങളെ അപവർത്തിക്കുംപ്രകാരം:

രാശ്യോരന്യോന്യഹൃതയോശ്ശേഷസ്സ്യാദപവർത്തനം || 2
സ്വാപവർത്തഹൃതൗ ഭാജ്യഹാരകൗ ദൃഢസംജ്ഞിതൗ |
തേനാപവർത്തനൈവാപ്താ ദൃഢാ ശുദ്ധിസ്തിശ്ചവാ || 3

സംഭവിക്കുമെങ്കിൽ, ഒടുക്കത്തെ ശേഷം ശൂന്യമാവോളം ഭാജ്യത്തേയും ഹാരകത്തേയും അന്യോന്യം ഹരണം ചെയ്താൽ ഒടുക്കത്തെ ഹാരകത്തിന് **അപവർത്തനം** എന്നുപേർ. ഒടുക്കത്തെ ശേഷം എന്നു വെച്ചാൽ ഒടുക്കത്തെ ഹാരകമെന്നർത്ഥം. ഈ അപവർത്തനസംഖ്യകൊണ്ടു ഭാജ്യത്തേയും ഹാരകത്തേയും ഹരിച്ചാൽ ഫലങ്ങൾക്കു **ദൃഢഭാജ്യഹാരകങ്ങൾ** അല്ലെങ്കിൽ **ദൃഢഭാജ്യഭാജകങ്ങൾ** എന്നു പേർ. ഈ അപവർത്തനംകൊണ്ടുതന്നെ ക്ഷേപത്തേയോ ശുദ്ധിയെ

യോ ആവശ്യമുള്ളതിനേയും ഹരിക്കേണം. ഇങ്ങനെ അപവൎത്തനം കൊണ്ടു ക്ഷേപത്തേയോ ശുദ്ധിയേയോ മുടിയത്തക്കവണ്ണം ഹരിക്കുവാൻ തരമാവാത്ത ദിക്കിൽ കുട്ടാകാരക്രിയ ചെയ്യുവാനും തരമില്ല. "യേന ച്ഛിന്നൌ ഭാജ്യഹാരൌ ന തേന ക്ഷേപശ്ചൈതദ്ദുഷ്ടമുദ്ദിഷ്ടമേവ" എന്നു ലീലാവതിയിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ഈ അപവൎത്തിതങ്ങളായിരിക്കുന്ന ക്ഷേപശുദ്ധികൾക്കു **ദൃഢക്ഷേപശുദ്ധികൾ** എന്നു പേർ. കുട്ടാകാരക്രിയ ചെയ്യുന്നേടത്തെല്ലാം ഈ ദൃഢങ്ങളായിരിക്കുന്ന വസ്തുക്കളെ ഉപയോഗിക്കണം.

കുട്ടാകാരപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

(ക) **അന്യോന്യഹരണവും വല്ല്യാനയനവും:**

ദൃഢയോൎഭാജ്യഹരയോരല്പേനാഢൌ ഹരേൽ പരം ।
തത്തച്ഛേഷേണ ഭൂയോപി യാവദല്പം മിഥോ ഹരേൽ ॥ 4

ഫലാന്യധോധഃ ക്രമശോ വല്ലീരൂപേണ നിക്ഷിപേൽ ।
തത്തച്ഛേഷഞ്ച സംരക്ഷേൽ പൃഥക് സൎവ്വാനപി ക്രമാൽ ॥ 5

ദൃഢങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭാജ്യഹാരങ്ങളിൽവെച്ചു ചെറിയതിനെ കൊണ്ടു വലിയതിനെ ഹരിക്ക. ശേഷംകൊണ്ടു മുമ്പിലത്തെ ഹാരകത്തെ ഹരിക്ക. ഇതിന്റെ ശേഷംകൊണ്ട് ഇതിന്റെ ഹാരകത്തെ ഹരിക്ക. ഇങ്ങനെ ശേഷം ചെറുതാവോളം ക്രിയ ചെയ്ക. ഫലങ്ങളെ ക്രമേണ മേൽകീഴായി **വല്ലീ**രൂപേണ വെക്ക. ശേഷങ്ങളേയും കളയാതെ സൂക്ഷിക്കണം.

(ഖ) **മതികല്പിക്കുംപ്രകാരം:**

ഭാജ്യഹാരകയോരല്പസ്യാല്പച്ഛേഷസ്തദാ യദാ ।
വല്ലീഫലാനാം യുഗ്മത്വം തദോജത്വേ വിപൎയ്യയാൽ ॥ 6

ഭാജ്യശേഷേ യദാല്പത്വം മതിസ്തത്ര പ്രകല്പ്യതാം ।

വല്ലീഫലങ്ങൾ യുഗ്മസംഖ്യങ്ങളായിരിക്കുമ്പോൾ ഭാജ്യഹാരകങ്ങളിൽവെച്ചു കുറഞ്ഞതിന്റെ ശേഷം കുറഞ്ഞത്, ഏറിയതിന്റെ ശേഷം ഏറിയത്. ഓജസംഖ്യകളാകുമ്പോൾ വിപരീതം. അന്യോന്യഹരണത്തിൽ ഒടുക്കത്തെ ശേഷം എല്ലായ്പ്പോഴും **അല്പശേഷം.** അതിന്നു മുമ്പിലത്തെ ശേഷം **മഹാശേഷം.** ഒടുക്കത്തെ ശേഷത്തെ സ്വീകരിക്കാത്തപക്ഷം അതിന്റെ മുകളിലുള്ള രണ്ടു ശേഷങ്ങളിൽ ചുവട്ടിലേത് അല്പശേഷം, മുകളിലേതു മഹാശേഷം. ഇങ്ങനെ കണ്ടു

കൊൾക. വല്ലീഫലങ്ങൾ യുഗ്മസംഖ്യങ്ങളാകുമ്പോൾ ഒടുക്കത്തെ സ്വല്പശേഷം ഭാജ്യഹാരകങ്ങളിൽവെച്ചു കുറഞ്ഞതിന്റേതായിരിക്കും. ഓജത്വത്തിങ്കൽ വിപരീതവും. ഭാജ്യശേഷം അല്പശേഷമാകുമ്പോൾ സാമാന്യേന **മതി** കല്പിക്കപ്പെടുന്നു.

(ഗ) മതിയുടെ സ്വരൂപം:

യേനാഹതോല്പശേഷോയം ശുദ്ധ്യൂനഃ ക്ഷേപയുക് ച വാ ॥ 7
മഹാശേഷേണ നിശ്ശേഷം ഹ്രിയതേ സ ഗുണോ മതിഃ ।

അല്പശേഷത്തെ യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ശുദ്ധിയെ കളയുകയൊ ക്ഷേപത്തെ കൂട്ടുകയൊ ചെയ്തു മഹാശേഷംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷമില്ലാതെ വരുന്നു, അഗ്ഗുണകാരത്തിന്നു **മതി** എന്നു പേർ. മഹാശേഷംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം **മതിഫലം.**

(ഘ) വല്ല്യുപസംഹാരം:

താം ഫലാനാമധോ ന്യസ്യ തദധശ്ച മതേഃ ഫലം ॥ 8
ഉപാന്ത്യേന ഹതേ സ്വോർദ്ധ്വേ ക്ഷിപേദന്ത്യം മുഹുസ്തഥാ ।
കുര്യാദ്രാശിദ്വയം യാവൽ ഗുണോ രാശിരിഹോർദ്ധ്വഗഃ ॥ 9
അധോഗസ്തു ഫലം ഹാരേധികേ ഭാജ്യേധികേന്യഥാ ।

മുൻ ഉണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്ന വല്ലിയുടെ താഴെ മതിയെ വെക്കു. മതിയുടെ താഴെ മതിഫലത്തെ വെക്കു. ഈ വല്ലിയുടെ ഒടുക്കത്തെ സംഖ്യക്ക് അന്ത്യമെന്നു പേർ. അതിന്റെ മുകളിലുള്ളതിന്ന് ഉപാന്ത്യമെന്നു പേർ. അതിന്നും മുകളിലുള്ളതിന്നു സ്വോർദ്ധ്വമെന്നു പേർ. സ്വോർദ്ധ്വത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അന്ത്യത്തെ കൂട്ടി സ്വോർദ്ധ്വത്തിന്റെ നേരെ വെക്കുക. അന്ത്യം മേലാൽ ആവശ്യമില്ലാത്തതിനാൽ കളയുകയും ചെയ്യാം. ഇപ്പോൾ ഒരു പുതിയ വല്ലി ഉണ്ടായി. അതിൽ അന്ത്യം മുൻ ഉപാന്ത്യം. ഉപാന്ത്യം മുൻ ക്രിയകൊണ്ടു ലഭിച്ച ഫലം. സ്വോർദ്ധ്വം മുമ്പിലത്തെ വല്ലിയിൽ ഒടുവിൽനിന്നു നാലാമത്തെ ഫലം. ഇവിടേയും സ്വോർദ്ധ്വത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അന്ത്യം കൂട്ടുക. അന്ത്യം കളയുകയും ചെയ്യുക. ഇങ്ങനെ രണ്ടു രാശികളാവോളം ക്രിയ ചെയ്യുക. ഈ ക്രിയക്കു **വല്ല്യുപസംഹാര**മെന്നു പേർ. കുട്ടാകാരത്തിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഗുണകാരവും ഫലവും ഈ രാശികളാകുന്നു. ഭാജ്യഹാരകങ്ങളിൽവെച്ചു ഹാരകമേറുന്നതെങ്കിൽ ഇവിടെ മേലെരാശി ഗുണകാരം, കീഴെരാശി ഫലം; ഭാജ്യ

മേറുന്നതെങ്കിൽ കീഴെരാശി ഗുണകാരം, മേലെരാശി ഫലം. ഇങ്ങനെ സാമാന്യനിരഗ്രകുട്ടാകാരക്രിയ.

ക്രിയയിലെ ചില വിശേഷങ്ങൾ:—തക്ഷണം.

ത ഏവ ഭാജ്യഹാരാഭ്യാം തഷ്ടേ ഗുണഫലേ ക്വചിൽ || 10

ശേഷാത്ഥമേവ ഹരണം തക്ഷണം ന ഫലായ തൽ |

ഗുണലബ്ധ്യോസ്സമം ഗ്രാഹ്യം ധീമതാ തക്ഷണേ ഫലം || 11

ഇഷ്ടാഹതസ്വസ്വതക്ഷണാഢ്യൌ ലബ്ധിഗുണൌ തു വാ |

ചിലപ്പോൾ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ തക്ഷിക്കേണ്ടിവരും. തക്ഷണം എന്നത് ഒരു ഹരണവിശേഷം. ഫലം ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുമ്പോൾ ആ ഹരണത്തെ ഹരണമെന്നു പറയുന്നു. **ശേഷംമാത്രം ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുമ്പോൾ അതിന്നു തക്ഷണം എന്നു പറയുന്നു.** തക്ഷണത്തിങ്കൽ ശേഷങ്ങൾ മാത്രമെ ആവശ്യമുള്ളു. ഫലങ്ങൾ കളയാം. ഗുണകാരത്തിൻെറ തക്ഷണഹാരകം ഹാരകം; ഫലത്തിൻെറ തക്ഷണഹാരകം ഭാജ്യം. ഇവിടെ തക്ഷിതഫലങ്ങളും (അതായതു ഹരണശേഷങ്ങൾ) ഗുണകാരഫലങ്ങളാകുന്നു. ഫലത്തെ അറിവാനായിക്കൊണ്ടു ഹാരകത്തെ ആവത്തിച്ചു വാങ്ങുക ഹരിക്കയാകുന്നു. ശേഷത്തെ അറിവാനായിക്കൊണ്ടു ഹാരകത്തെ ആവത്തിച്ചു വാങ്ങുക **തക്ഷണ**മാകുന്നു. ഗുണകാരഫലങ്ങളെ തക്ഷിക്കുമ്പോൾ തൻെറ തൻെറ തക്ഷണമായ ഹാരകത്തേയൊ ഭാജ്യത്തേയൊ ഗുണകാരത്തിൽനിന്നോ ഫലത്തിൽനിന്നോ **എത്ര ആവത്തിച്ചു** വാങ്ങി, ഫലത്തിങ്കന്നോ ഗുണകാരത്തിങ്കന്നോ സ്വസ്വതക്ഷണമായ ഭാജ്യത്തേയൊ ഹാരകത്തേയൊ **അത്ര ആവത്തിച്ചു** വാങ്ങണം. അവ്വണ്ണംതന്നെ ഗുണകാരഫലങ്ങളിൽ തങ്ങൾതങ്ങളുടെ തക്ഷണങ്ങളെ ഒരിഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയാലും ഗുണകാരഫലങ്ങൾ ലഭിക്കും.

തക്ഷണത്തിങ്കലെ വിശേഷത്തെ ചൊല്ലുന്നു:

യദാ വല്ല്യുപസംഹാരേ സ്യാദ്വ്യുത്ക്രാധികസംഖ്യതാ || 12

തദാ തൽസ്ഥാനഗൈശ്ശേഷൈഃ കുയ്യാദ്വാ തക്ഷണം മുഹുഃ |

യാതൊരിക്കൽ വല്ല്യുപസംഹാരത്തിന്നിടയിൽതന്നെ അതതു ശേഷത്തേക്കാൾ രാശിക്ക് അധികസംഖ്യത ഉണ്ടാകുന്നു, അപ്പോൾ **ആസ്ഥാനത്തിങ്കലെ ശേഷത്തെ**ക്കൊണ്ടു രാശിയെ തക്ഷിക്കാം. എന്നാൽ **കീഴെ സ്ഥാനത്തെ ശേഷത്തെക്കൊണ്ടു കീഴെ രാശിയേയും തക്ഷിക്കണം.**

മതികല്പനത്തിങ്കലെ വിശേഷം:

അഥാല്പേ ഹാരശേഷേ ചേന്മതിഃ കല്പ്യേത തത്ര തു || 13

ശുദ്ധിക്ഷേപൌ വിപര്യസ്തം കല്പയിത്വോക്തവൽ ക്രിയാ |

ഭാജ്യശേഷം കുറയുമ്പോഴാം മതികല്പിക്കുവാനാണല്ലൊ സാമാന്യ വിധിയിൽ പറഞ്ഞത്. ഹാരശേഷം കുറയുമ്പോഴാം മതികല്പിക്കുന്നു എന്നിരിക്കിൽ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ **പകൎന്നുകല്പിച്ചു** മുമ്പിലെപ്പോലെ ക്രിയചെയ്താൽ മതിയാകും. ശുദ്ധി ഉദ്ദിഷ്ടമായതെങ്കിൽ അതിനെ ക്ഷേപം എന്നു കല്പിക്കേണം. ക്ഷേപം ഉദ്ദിഷ്ടമായതെങ്കിൽ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്കേണം.

യദാ പുനൎഹാരഭാജ്യശേഷയോരധികേ മതിഃ || 14

കല്പ്യതേത്ര മതിസ്ത്വന്തേ സ്ഥാപ്യോപാന്ത്യേ ച തൽഫലം |

ചെറിയശേഷം ഭാജ്യമായും വലിയ ശേഷം ഹാരകമായും മതി വരുത്തുവാനാണല്ലൊ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ളത്. എന്നാൽ യാതൊരിക്കൽ വലിയ ശേഷത്തെ ഭാജ്യമാക്കിയും ചെറിയ ശേഷത്തെ ഹാരകമാക്കിയും മതികല്പിക്കപ്പെടുന്നു, അവിടെ വല്ലിയിങ്കൽ **അന്ത്യമായിട്ടു മതി**യെ വെക്കുക, **ഉപാന്ത്യമായിട്ടു മതിഫലത്തെയും** വെക്കുക. ശേഷം ക്രിയ മുമ്പിലെപ്പോലെ. ഇവിടെ വലിയ ശേഷം ഭാജ്യശേഷമാകണം. വലിയശേഷം ഹാരകശേഷമെങ്കിൽ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകൎന്നു കല്പിക്കേണം.

മതികല്പനത്തിങ്കൽ പ്രകാരാന്തരം:

മതേരപ്രതിഭാനേത്തു യാവദ്രൂപസ്യ ശേഷതാ || 15

ഭാജ്യേ വാ ഹാരകേ വാ സ്യാത്താവദേവം മിഥോ ഹരേൽ |

ഭാജ്യേ ചേച്ഛിഷ്യതേ രൂപം ശുദ്ധേസ്സ്യാന്മതിതാ തദാ || 16

ക്ഷേപസ്യ മതിതാന്യത്ര ശൂന്യം മതിഫലം തയോഃ |

ശുദ്ധിക്ഷേപൌ വിപര്യസ്തൌ ഭവേതാം തൎഹി പൂൎവ്വവൽ || 17

ലബ്ധൌ ലബ്ധിഗുണൌ സ്വസ്വതക്ഷണാച്ഛോധിതൌ സ്ഫുടൌ |

കുറെനേരം അന്യോന്യഹരണം ചെയ്തതിൻെറശേഷം മതിതോന്നിയില്ല എന്നു വരുകിൽ ഭാജ്യത്തിങ്കലൊ ഹാരകത്തിങ്കലൊ **രൂപം** ശേഷിക്കുന്നതുവരെഹരിക്കുക. ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കുന്നതെങ്കിൽ ശുദ്ധിതന്നെ മതിയാകുന്നത്. ഹാരകത്തിലെങ്കിൽ ക്ഷേപം തന്നെ. രണ്ടേടത്തും മതിഫലം ശൂന്യം. ഇപ്രകാരം വല്ലി ഉണ്ടാക്കി മുന്നേപ്പോ

ലെ ക്രിയചെയ്താൽ ഗുണകാരഫലങ്ങൾ ലഭിക്കും. എന്നാൽ ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിച്ചിരിക്കുമ്പോൾ ക്ഷേപം ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുന്നതെന്നോ, ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിച്ചിരിക്കുമ്പോൾ ശുദ്ധി ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുന്നതെന്നോ വരും വിഷയത്തിൽ ചെയ്യേണ്ട ഉപായത്തെ പറയുന്നു. ഇവിടെ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകന്നു കല്പിച്ചു ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കു. ഈ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ തന്റെ തന്റെ തക്ഷണത്തിങ്കന്നു വാങ്ങി ശേഷിച്ചവ സ്ഫുടങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരും. ഹാരകശേഷം കുറയുമ്പോൾ മതി കല്പിച്ചുവെങ്കിൽ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകന്നു കല്പിക്കേണമെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞുവല്ലോ. ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകരാതെ തന്നെ ക്രിയ ചെയ്തുണ്ടായ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ തന്റെ തന്റെ തക്ഷണത്തിൽനിന്നു വാങ്ങി ശേഷിച്ചവയും സ്ഫുടഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരുമെന്നു് ഈ ന്യായംകൊണ്ടു വന്നു.

ഗുണകാരഫലങ്ങളെ അറിവാൻ പ്രകാരാന്തരം:

രൂപേ ക്ഷേപേഽഥവാ ശുദ്ധൌ ഗുണാപ്തീയേ പ്രസാധിതേ || 18
ഇഷ്ടഘ്നേ തേ ക്രമാൽ സ്യാതാമിഷ്ടക്ഷേപവിശുദ്ധിജേ |

രൂപത്തെ ക്ഷേപമെന്നോ ശുദ്ധിയെന്നോ കല്പിച്ചു മുമ്പിലെപ്പോലെ ക്രിയചെയ്തു ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി അവറ്റെ ഇഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ക്രമത്താലെ ഇഷ്ടസംഖ്യാ ക്ഷേപമൊ ശുദ്ധിയൊ ആയിട്ടുള്ള ഗുണകാരഫലങ്ങൾ ഉളവാകും.

അനന്തരം **രാശിശേഷാദികൾ ക്ഷേപശുദ്ധികളാകുമ്പോളുള്ള ക്രിയാ**വിശേഷത്തെ പറയുന്നു.

രാശിഭാഗകലാദീനാം ശേഷേ ദൃഷ്ടേ യഥായഥം || 19
ദ്വാദശാദിഹതോ ഭാജ്യോ ഗ്രാഹ്യസ്ത്വേഷന്തു പൂർവ്വവൽ |

മദ്ധ്യമങ്ങൾ രാശ്യാദിശേഷങ്ങളാകുന്നു. രാശിശേഷം ക്ഷേപമായൊ ശുദ്ധിയായൊ കാണപ്പെട്ടുവെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചതു ഭാജ്യമായി കല്പിക്കേണം. അവ്വണ്ണം ഭാഗശേഷമെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തെ മുന്നൂററി അറുപതിൽ ഗുണിക്കേണം. കലാശേഷമാണെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തെ ഇരുപത്തോരായിരത്തിഅറുനൂററിൽ ഗുണിക്കേണം. ഇവ്വണ്ണം വികലാദി ശേഷങ്ങൾക്കും ഊഹിച്ചുകൊള്ളണം. മററു ക്രിയകൾ മുമ്പിലെപ്പോലെ

നിരഗ്രകുട്ടാകാരക്രിയയുടെ വിശദീകരണത്തിന്നായിക്കൊണ്ടു് ഒരു ഉദാഹരണത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

യൽഗുണാസ്സൂര്യഭഗണാഃ ഖഖതത്വാശ്വിഭിർഹൃതാഃ ॥ 20

ഹീനാ വാ ഭൂദിനൈർഭക്താ നിശ്ശേഷാസ്തം ഗുണം വദ ।

ആദിത്യന്റെ ഭഗണങ്ങളെ യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഇരുപത്തീരായിരത്തിഅഞ്ഞൂറു കൂട്ടുകതാൻ കളയുകതാൻ ചെയ്തു ഭൂദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷമില്ലാതെ മുടിയും, അങ്ങനെയുള്ള ഗുണകാരത്തെ ചൊല്ലുക.

ഭാജ്യം = ആദിത്യഭഗണം = 4320000
ഹാരകം = ഭൂദിനം = 1577917500
ക്ഷേപം അല്ലെങ്കിൽ ശുദ്ധി = 22500

അപവർത്തനഹാരകം = 7500

അപ്പോൾ ദൃഢഭാജ്യം = 576
ദൃഢഹാരകം = 210389
ദൃഢക്ഷേപം അല്ലെങ്കിൽ ദൃഢശുദ്ധി = 3

ദൃഢഭാജ്യഹാരകങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരണം ചെയ്താൽ,

ഫലങ്ങൾ:— 365,3,1,6,2,4
ശേഷങ്ങൾ— 149,129,20,9,2,1

I. ഇവിടെ ഹാരകം ഭാജ്യത്തെക്കാളേറുന്നു. ക്ഷേപം = 3.
ആദ്യത്തെ നാലു ഫലങ്ങളെ വല്ലിയിൽ ക്രമേണ വെക്ക,
യുഗ്മഫലമാകയാൽ നാലാമത്തെ ശേഷം 9 ഭാജ്യശേഷമാകുന്നു.
അപ്പോൾ അല്പശേഷം = 9; മഹാശേഷം = 20.

$\frac{9\times13+3}{20}=6$; അപ്പോൾ മതി = 13; മതിഫലം = 6.

ഒടുക്കത്തെ ഫലമാകുന്ന 6ന്റെ ചുവട്ടിൽ മതിയാകുന്ന 13 വെക്ക, അതിന്റെ ചുവട്ടിൽ മതിഫലമായ 6നേയും വെക്ക. അപ്പോളുണ്ടാകുന്ന വല്ലി:

365...136972
3...375
1...97
6...84
13
6

ഈ വല്ലിയിൽ ഒടുക്കത്തെ സംഖ്യ 6 അന്ത്യം, 13 ഉപാന്ത്യം, ഇതിന്റെ മുകളിലെ 6 സോപാന്ത്യം. സോപാന്ത്യത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് അന്ത്യം കൂട്ടുമ്പോൾ $6\times13+6=84$ എന്ന്. അതിനെ സോപാന്ത്യമാകുന്ന 6ന്റെ നേരെ വെക്ക. മുമ്പിലത്തെ അന്ത്യം 6നെ കളയുകയാണെങ്കിൽ വല്ലിയുടെ സ്വരൂപം: 365,3,1,84,13 എന്ന്. ഇവിടെ 13 അന്ത്യം, 84 ഉപാന്ത്യം 1 സോപാന്ത്യം.

$1\times84+13=97$; അപ്പോൾ വല്ലിയുടെ സ്വരൂപം: 365,3,97,84.
$3\times97+84=375$; അപ്പോൾ വല്ലിയുടെ സ്വരൂപം: 365,375,97.
$365\times375+97=136972$; 97നെ കളയുന്നു.
ഇങ്ങനെ മുകളിൽ 136972 എന്നും കീഴെ 375 എന്നും കിട്ടുന്നു.
ഇവിടെ ഹാരകം ഏറുന്നതുകൊണ്ട്,

ഗുണകാരം = 136972
ഫലം = 375

$$\left[\frac{576\times136972+3}{210389}=\frac{78895875}{210389}=375.\right.$$ ശേഷമില്ല.]

പിന്നെ 3നെ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്ക.

365...73417	ഇവിടെ $\frac{9\times7-3}{20}=3.$
3...201	അപ്പോൾ മതി=7; മതിഫലം=3.
1...52	$45=6\times7+3.$
6...45	$52=1\times45+7.$
7	$201=3\times52+45$
3	

$$73417=365\times201+52.$$

ഗുണകാരം=73417; ഫലം=201

$$\left[\frac{73417\times576-3}{210389}=\frac{42288189}{210389}=201.\right.$$ ശേഷമില്ല.]

II. "അഥാല്പേ ഹാരശേഷേ ചേൽ......" ഹാരകം ഭാജ്യത്തേക്കാൾ ഏറുന്നു. വല്ലീഫലങ്ങൾ ഭാജ്യസംഖ്യങ്ങൾ. അപ്പോൾ ഹാരകശേഷം അല്പശേഷമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ക്ഷേപശുദ്ധികളെ പകൎന്നു കല്പിക്കേണം.

ക്ഷേപം=3. ഇതിനെ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്കേണം.

365...136972	ഇവിടെ അയുഗ്മഫലങ്ങളെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ അല്പശേഷം=2, മഹാശേഷം=9.
3...375	$\frac{2\times6-3}{9}=1.$
1...97	മതി=6; മതിഫലം=1.
6...84	ഗുണകാരം=136972. (ഹാരകം ഏറുന്നതുകൊണ്ടു്)
2...13	ഫലം=375. (I ലെപ്പോലെ തന്നെ)
6	
1	

ശുദ്ധി=3. ഇതിനെ ക്ഷേപമെന്നു കല്പിക്കുക.

365...73417	$\frac{2\times3+3}{9}=1.$
3...201	അതുകൊണ്ടു മതി=3, മതിഫലം=1.
1...52	ഗുണകാരം=73417
6...45	ഫലം=201 (I.ലേപോലെതന്നെ)
2...7	
3	
1	

III. ഭാജ്യം ഹാരകത്തേക്കാളേറുന്നു ഇവിടെ 210389-നെ ഭാജ്യമെന്നും 576-നെ ഹാരകമെന്നും കല്പിക്ക. അപ്പോൾ ഫലങ്ങളും

ശേഷങ്ങളും മുമ്പിലെപ്പോലെ തന്നെ. ഇവിടെ വല്ലീഫലങ്ങൾ യുഗ്മസംഖ്യങ്ങളാകുമ്പോൾ അല്പശേഷം ഹാരകശേഷമാകുന്നു; ഓജസംഖ്യങ്ങളാകുമ്പോൾ വിപരീതം. വല്ല്യുപസംഹാരം കഴിഞ്ഞു ശേഷിക്കുന്ന രണ്ടു രാശികളിൽ ആദ്യത്തേതു ഫലവും കീഴേതു ഗുണകാരവുമാകുന്നു.

ദൃഢഭാജ്യം=210389; ദൃഢഭാജകം=576; ദൃഢക്ഷേപം=3.

വല്ലീ—(ഓജസംഖ്യങ്ങൾ)

365...73417	ഭാജ്യശേഷം=അല്പശേഷം=2
3...201	മഹാശേഷം=9
1...52	$\frac{2\times3+3}{9}=1$
6...45	
2...7	മതി=3, മതിഫലം=1
3	ഗുണകാരം=201; ഫലം=73417
1	[$\frac{201\times210989+3}{576}=73417$ ശേഷമില്ല]

വല്ലീഫലങ്ങൾ യുഗ്മസംഖ്യങ്ങളാകുമ്പോൾ, അല്പശേഷം ഹാരകശേഷമാകുന്നു. ഇവിടെ ക്ഷേപമാകുന്ന 3നെ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്കേണം.

365	ഹാരകശേഷമാകുന്ന അല്പശേഷം=9
3	മഹാശേഷം=20
1	$\frac{9\times7-3}{20}=3$
6	
7	മതി=7, മതിഫലം=3
3	ഗുണകാരം=201; ഫലം=73417

IV. "യദാ പുനഃ.........."

ദൃഢഭാജ്യം=576; ദൃഢഹാരകം=210889; ദൃഢക്ഷേപം=3

ഇവിടെ മതി കല്പിക്കുന്നേടത്തു മഹാശേഷത്തെ ഭാജ്യമാക്കിയും അല്പശേഷത്തെ ഹാരകമാക്കിയും ക്രിയ ചെയ്യുന്നു. അവിടെ മതിയെ അന്ത്യമായിട്ടും മതിഫലത്തെ ഉപാന്ത്യമായിട്ടും വല്ലിയിൽ വെക്കേണം. മഹാശേഷം ഭാജ്യശേഷമാണെങ്കിൽ സാമാന്യന്യായംകൊണ്ടു ക്രിയ ചെയ്യേണം. അതു ഹാരകശേഷമാണെങ്കിൽ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകർന്നു കല്പിക്കേണം. അഥവാ, പകർന്നു കല്പിക്കാതെതന്നെ ഗുണകാരഫലങ്ങളുണ്ടാക്കി സ്വസ്വതക്ഷണത്തിൽനിന്നും വാങ്ങിയ ശേഷങ്ങൾ സ്ഫുടഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരും.

365...136972	ഇവിടെ വല്ലിയിൽ ഒടുവിലത്തെ ഫലം 2
3...375	ഹാരശേഷം 9 ഭാജ്യശേഷമാകുന്നു.
1...97	അല്പശേഷം 2 ഹാരകമാകുന്നു.
6...84	$\frac{1\times9+3}{2}=6.$
2...18	
6	മതി=1, മതിഫലം=6.
1	ഗുണകാരം=136972; ഫലം=375.

ഒടുക്കത്തെ ഫലം 6 ആകിലുള്ള ക്രിയ:

365...73417	
3...201	ഇവിടെ ഹാരശേഷം ഹാരകശേഷമാകുന്നു.
1...52	$\frac{20\times3+3}{9}=7$
6...45	
7	മതി=3; മതിഫലം=7.
3	ഗുണകാരം=73417; ഫലം=201

ഇവിടെ സ്വതക്ഷണമാകുന്ന 210389-ൽനിന്നു 73417-നെ വാങ്ങിയാൽ സ്വഗുണകാരമായ 136972 വരും. സ്വതക്ഷണമായ 576-ൽനിന്നു 201-നെ വാങ്ങിയാൽ സ്വഫലമായ 375 കിട്ടും.

അഥവാ, ക്ഷേപമാകുന്ന 3നെ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്ക.

365.. 136972	
3...375	$\frac{20\times6-3}{9}=13$
1...97	
6...84	മതി=6; മതിഫലം=13
13	ഗുണകാരം=136972
6	ഫലം=375

V. മതേരപ്രതിഭാനേനതു......"

ദൃഢഭാജ്യം=576; ദൃഢഹാരകം=210389; ദൃഢക്ഷേപം അഥവാ ശുദ്ധി=3

ശേഷങ്ങൾ	ഫലങ്ങൾ	സംഹൃതഫലങ്ങൾ
210389	365	283806
576	3	777
149	1	201
129	6	174
20	2	27
9	4	12
2	3	
1	0	

ഇവിടെ രൂപം ഭാജ്യശേഷമാകകൊണ്ടു 3ശുദ്ധിയാകുന്നു. ദൃഢശുദ്ധി 3ആകയാൽ, ഗുണകാരം=283806, ഫലം=777.

[$\frac{283806\times576-3}{210389}=777.$ ശേഷമില്ല.]

ഇവയെ തക്ഷണം ചെയ്യേണം. 283806-നെ 210389കൊണ്ടു തക്ഷണം ചെയ്യുമ്പോൾ ഫലമാകുന്ന ഒന്നിനെ കളയാം. ശേഷം$=73417(=283806-210389)$; 777നെ 576കൊണ്ടു തക്ഷണം ചെയ്യുമ്പോൾ ഫലമാകുന്ന ഒന്നിനെ കളയാം. ശേഷം$=201\ (=777-576)$.

∴ ഗുണകാരം$=73417$; ഫലം$=201$.

8 ഋണക്ഷേപമാകുമ്പോൾ സ്വസ്വതക്ഷണത്തിൽനിന്നു മുമ്പിൽ വരുത്തിയ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ വാങ്ങിയാൽ ശേഷങ്ങൾ ഇഷ്ടഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരും.

$210389-73417=136972=$ ഗുണകാരം

$576-201 = 375=$ ഫലം

VI. തക്ഷണത്തിന്റെ ഉദാഹരണം \ കൊണ്ടു സാധിച്ചിരിക്കുന്നു. ഗുണകാരത്തിൽനിന്നും ഫലത്തിൽനിന്നും സ്വസ്വതക്ഷണത്തെ ഓരോ ആവൃത്തി വാങ്ങിയിരിക്കുന്നു. തന്റെ തന്റെ തക്ഷണത്തെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയാലും ഗുണകാരഫലങ്ങൾ ലഭിക്കും.

ഗുണകാരം$=136972+210389\times 3=768139$

ഫലം$=375+576\times 3=2103$

$$\left[\frac{768139\times 576+3}{210389}=\frac{442448067}{210389}=2103.\right.$$ ശേഷമില്ല.]

ഇവിടെ ശ്ലോകാർദ്ധം—"ഗുണലബ്ധ്യോസ്സമംഗ്രാഹ്യം ധീമതാ തക്ഷണേ ഫലം" (ശ്ലോ. 11)—ലീലാവതിയിൽനിന്നും ഉദ്ധരിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ളതാകുന്നു. ഗുണകാരഫലങ്ങളുടെ തക്ഷണത്തിങ്കലെ ഹരണഫലങ്ങൾ സമങ്ങളായിരിക്കണം. അല്ലെങ്കിലത്തെ വൈഷമ്യം ഒരുദാഹരണംമൂലം കാണിക്കാം.

		വല്ലീ:
ഭാജ്യം	5	1–46
ഹാരകം	3	1–23
ക്ഷേപം	23	23
		0

ഇവിടെ ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ 23 ക്ഷേപം തന്നെ. ഭാജ്യമൊന്നുകൊണ്ടു ഫലം$=46$, ഗുണകാരം$=23$. 46ന്റെ തക്ഷണം 5 23ന്റെ തക്ഷണം 3. 46ൽ 5-നെ 9 ആവൃത്തി കളയാം. ശേഷം 1. 23ൽ 3-നെ 7 ആവൃത്തി മാത്രമേ കളയാവൂ. ശേഷം$=2$. അപ്പോൾ ഫലം$=1$, ഗുണകാരം$=2$.

$\frac{5\times 2+23}{3}=11$. ഇവിടെ ഫലം 1 എന്നു വരുന്നില്ല.

ഇവിടെ 23-ൽ 3-നെ 7 ആവൃത്തി മാത്രമേ കളഞ്ഞിട്ടുള്ളൂ. അതുകൊണ്ടു 46ൽ 5നെ 7ആവൃത്തി മാത്രമേ കളയാവൂ. അങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ ഫലം=11, ഗുണകാരം=2 എന്നു കിട്ടും.

$\frac{5\times2+23}{23}=11$. പ്രശ്നോത്തരം ശരിയായി.

VII. വല്ല്യപസംഹാരത്തിന്നിടയിൽ തന്നെ തക്ഷണംചെയ്യാം.

"യദാവല്ല്യപസംഹാരേ......"

ദൃഢഭാജ്യം=576. ദൃഢഹാരകം=210389. ദൃഢശുദ്ധി=3.

ശേഷങ്ങൾ ഫലം സംഗൃഹീതഫലങ്ങൾ

210389......365......73417
576.........3.........201
149.........1..........52
129.........6..........45
20.........2......27...7
9.........4......12...3
2.........3
1.........0

ഇവിടെ 27, 12 എന്ന രാശികൾ തങ്ങളുടെ ശേഷങ്ങളാകുന്ന 20, 9 ഈ രാശികളെക്കാളേറുന്നു. 27നേയും 12-നേയും 20കൊണ്ടും 9കൊണ്ടും തക്ഷണംചെയ്തു ശേഷങ്ങൾ 7, 3 ഇവയെ വല്ലിയിൽ യഥാസ്ഥാനംവെച്ചു വല്ല്യപസംഹാരം ചെയ്താൽ സ്ഫുടഗുണകാരഫലങ്ങൾ വരും.

365.........73417
3............201
1...201......52(201 – 149)
6...174 .....45(174 – 129)
2.... 27
4.....12
3......1
0

201, 174 ഈ രാശികളുടെ ശേഷങ്ങളാകുന്ന 149, 129 ഇവയെക്കൊണ്ടു തക്ഷിച്ചാൽ ശേഷങ്ങൾ 52, 45. മേല്പോട്ടു വല്ല്യപസംഹാരംചെയ്താൽ

ഗുണകാരം=73417
ഫലം=201

VIII. ഗുണകാരഫലാനയനത്തിങ്കൽ പ്രകാരാന്തരം:

"രൂപക്ഷേപേ ഫലവാ......"

365......115787
3.......... 317
1............82
6............71
11
5

ഇവിടെ ക്ഷേപം 1 എന്നു കല്പിച്ചു.

$\frac{11\times9+1}{20}=5$. മതി=11, മതിഫലം=5.

ഗുണകാരം=115787, ഫലം=317

ഇവയെ ഇഷ്ടക്ഷേപമാകുന്ന 3കൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ

ഗുണകാരം=347361, ഫലം=951

തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം=136972, ഫലം=375

365...94602 3......259 1...... 67 6 ...... 58 9 4	ഇവിടെ ശുദ്ധി=1 $\frac{9\times9-1}{20}=4$; മതി=9, മതിഫലം=4 ഗുണകാരം=94602, ഫലം=259 ഇവയെ മൂന്നിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ, ഗുണകാരം=283806, ഫലം=777. തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം=73417, ഫലം=201

“മതേരപ്രതിഭാനേത്ര......” എന്നും “രൂപേ ക്ഷേപേഥവാ ......” എന്നുമുള്ള രണ്ടു ന്യായങ്ങളുപയോഗിച്ചും ഈ ക്രിയചെയ്യാം. ക്ഷേപത്തേയോ ശുദ്ധിയേയോ രൂപമായിട്ടു മതിയായിട്ടു കല്പിച്ചും ശൂന്യത്തെ മതിഫലമായിട്ടും കല്പിച്ചും ക്രിയചെയ്തു ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുന്ന ക്ഷേപത്തിന്റെയോ ശുദ്ധിയുടേയോ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ആവശ്യമുണ്ടെങ്കിൽ തക്ഷിച്ചു സ്ഫുടങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം.

365 94602 3......259 1.......67 6.......58 2.........9 4.........4 1 0	ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ രൂപം ശുദ്ധിയാകുന്നു. 94602-നേയും 259-നേയും 3-ൽ ഗുണിച്ചു തക്ഷിച്ചാൽ ഗുണകാരഫലങ്ങളാകുന്ന 73417, 201 വരും. ക്ഷേപമാണുദ്ദിഷ്ടമായതെങ്കിൽ സ്വസ്വതക്ഷണങ്ങളിൽനിന്ന് ഇവയെ വാങ്ങിയാൽ ഗുണകാരഫലങ്ങളായ 136972, 375വരും.

IX. “രാശിഭാഗകലാദീനാം......”

രാശിശേഷാദികൾ ക്ഷേപശുദ്ധികളാകുമ്പോൾ ഉള്ള വിശേഷത്തെ പറയുന്നു. മദ്ധ്യമം അറിഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ ഇഷ്ടാഹര്‍ഗ്ഗണാനയനമാര്‍ഗ്ഗമാണ് ഈ ക്രിയ. ഭഗണശേഷത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു രാശിശേഷമാണ് കാണപ്പെട്ടതെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തിനെ 12-ൽ ഗുണിച്ചതിനെ ഭാജ്യമായി കല്പിക്കേണം. ഭാഗശേഷമെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തെ 360ലും, ലിപ്താശേഷമെങ്കിൽ 21600ലും ഗുണിച്ചതു ഭാജ്യമാകുന്നു. വികലാദിശേഷങ്ങളിലും ഇപ്രകാരം ഊഹിച്ചുകൊള്ളണം. ഒരു അഹര്‍ഗ്ഗണത്തെവെച്ചു 576കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു 210389കൊണ്ടു ഹരിച്ചു വികലവരെ വരുത്തിയാൽ അന്നത്തെ ഉദയത്തിങ്കലെ സൂര്യമദ്ധ്യമം വരും. ബാക്കി വരുന്ന സംഖ്യ വികലാശേഷവുമാണ്. വികലാശേഷം തന്നിരിക്കുമ്പോൾ ഭാജ്യത്തെ 1296000കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു ഭാജ്യമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം:—വികലാശേഷം 181244—ശുദ്ധി.

ദൃഢഭാജ്യം=576×1296000=746496000

ദൃഢഹാരകം=210389

അന്യോന്യഹരണശേഷം വല്ലി:—

3548...216335491
5...60971
1...10383
6...9056
1...1327
4...1094
1...233
2...162
3...71
1...20
1...11
4...9
2...2
1
0

ഇവിടെ ഓജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ രൂപം ശുദ്ധിതന്നെ. ഓജ്യമേറുകകൊണ്ടു ഗുണകാരം=60971

ഫലം=216335491

ഗുണകാരം×ശുദ്ധി=1105 '627924

ശുദ്ധി×ഫലം=39209509730804

തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം=156088

ഫലം=553826804

ഈ ഗുണകാരത്തിൽനിന്ന് അഹർഗ്ഗണവും ഫലത്തിൽനിന്നു മദ്ധ്യമവും വരും. തക്ഷണങ്ങളെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഈ ഗുണകാരഫലങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാലും ഗുണകാരഫലങ്ങൾ കിട്ടുമല്ലോ.

8×210389+156088=1839200 (അനന്തരഭാഗശമാദ്യോന്ത)

=അഹർഗ്ഗണം

8×746496000+553826804=6525794804 വികല

=5085ഭഗണം. 4രാശി. 0തി. 46ഇലി. 44വിലി.

മദ്ധ്യമം=4രാ–0തി–46ഇ–45വി (അല്പാധികത്തോടുകൂടി)

തികഞ്ഞ കലിവർഷം=5085

ഇങ്ങനെ രാശ്യാദിശേഷങ്ങൾകൊണ്ടു മദ്ധ്യമാഹർഗ്ഗണങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം

പ്രകാരാന്തരം (ലീലാവതിയിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നപ്രകാരം):

വികലാശേഷം=181244 (ശുദ്ധി)

210389നേയും 60നേയും അന്യോന്യഹരണംചെയ്തു വല്ലിയുണ്ടാക്കി, 181244 ശുദ്ധി എന്നും കല്പിച്ചു ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുക. ഇവിടെയുണ്ടായ ഗുണകാരം കലാശേഷമായിട്ടിരിക്കും. ഫലം മദ്ധ്യമത്തിലെ വികലയായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ മുകളിലേക്കും ഊഹിച്ചുകൊള്ളുക. ശേഷങ്ങളെല്ലാം ശുദ്ധികൾ.

(ക) വികലാശേഷം=181244

210389, 60 ഇവയെ അന്യോന്യഹരണം ചെയ്തവല്ലി:

3506...18430339872
2...5256076
14...2537416
181244
0

ഹാരകമേറുന്നതുകൊണ്ടു ഗുണകാരം=18430839872

ഫലം=5256076

തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം=58083

ഫലം=16

ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ തന്റെ തന്റെ തക്ഷണത്തിൽനിന്നു ഇവയെ വാങ്ങണം.

അപ്പോൾ ഗുണകാരം = 210389 − 53083 = 157306

ഫലം 60 − 16 = 44

അപ്പോൾ മദ്ധ്യത്തിങ്കലെ വികലാസംഖ്യ = 44, കലാശേഷം = 157306

(ഖ) കലാശേഷം = 157306

210389, 60 ഇവകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വല്ലീ:

3506...15996132528
2...4561874
14 ..2202284
157306
0

ഗുണകാരം (ഭാഗശേഷം) = 163920
ഫലം (മദ്ധ്യമത്തിങ്കലെ കലാ) = 46

(ഗ) ഭാഗശേഷം = 163920

210389, 30 ഇവയെക്കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വല്ലീ:

7012...115104624
1...163920
163920
0

ഗുണകാരം (രാശിശേഷം) = 5464
ഫലം (മദ്ധ്യമത്തിങ്കലെ ഭാഗം) = 0

(ഘ) രാശിശേഷം = 5464

210389, 12 ഇവയെക്കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വല്ലീ:

17532...478985168
2...27320
2...10928
5464
0

ഹാരത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ,
ഗുണകാരം (ഭഗണശേഷം) = 210389 − 139804
= 70585
ഫലം = 12 − 8 = 4.

(ങ) ഭഗണശേഷം = 70585

210389, 576 ഇവയെക്കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വല്ലീ:—

365.....................787255
3.....................2155
1...4729195....680 } തക്ഷണശേഷം
6...4093930....115 }
2...635265
4...282340
70585
0

ഗുണകാരം = 787255
ഫലം = 2155

അഹർഗ്ഗണം = 787255 + 210389 × 5 = 1839200

തികഞ്ഞ കലിവർഷം = 2155 + 576 × 5 = 5035

മദ്ധ്യമം = 4രാ − 0 − 46 − 45 (അബ്ദാധികത്തോടുകൂടി)

ഈ പ്രകാരം തന്നെ അധിമാസങ്ങൾ, തിഥിക്ഷയങ്ങൾ മുതലായവയെ കണക്കാക്കുന്നതിലും കുട്ടാകാരക്രിയയെ ഉപയോഗിക്കാം.

X. കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ ഭാജ്യത്തിന്റേയും ഹാരകത്തിന്റേയും അപവർത്തനംകൊണ്ടു ക്ഷേപത്തേയോ ശുദ്ധിയേയോ ശേഷിയാതെ ഫ

രിക്കുവാൻ കഴിയണമെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. എന്നാൽ ഭാജ്യത്തിന്റെയും ക്ഷേപശുദ്ധികളിലൊന്നിന്റെയും അപവത്തനത്തെക്കൊണ്ടു **ഹാരകത്തെ ശേഷിയാതെ ഹരിക്കേണമെന്നില്ല.** അതുപോലെതന്നെ ഹാരകത്തിന്റെയും ക്ഷേപശുദ്ധികളിലൊന്നിന്റെയും അപവത്തനംകൊണ്ടു ഭാജ്യത്തെ ശേഷിയാതെ ഹരിക്കേണമെന്നുമില്ല. ഈ വിഷയങ്ങളിൽ അപവത്തനം ചെയ്താൽ ചില എളുപ്പവുമുണ്ട്. ഈ ക്രിയയെ ലീലാവതിയിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്.

ഭാജ്യം = 100; ഹാരകം = 63; ക്ഷേപം = 90

(ക) സമാന്യക്രിയ:

അന്യോന്യഹരണം.

1	63	100	1
2	26	37	1
1	4	11	2
	1	3	

ശേഷങ്ങൾ	ഫലം	സംഗുണഫലം
100	1	2430
63	1	1530
37	1	900
26	2	630
11	2	270
4	1	90
3	90	
1	0	

ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കുന്നു.
ഭാജ്യം വലുതായതുകൊണ്ട്,
ഗുണകാരം = 1530
ഫലം = 2430
തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം $= 1530 - 24 \times 63$
$= 18$
ഫലം $= 2430 - 24 \times 100$
$= 30.$

(ഖ) ഭാജ്യക്ഷേപങ്ങളുടെ അപവത്തനം = 10. അപവത്തിക്കുമ്പോൾ,

ഭാജ്യം = 10, ഹാരകം = 63, ക്ഷേപം = 9.

വല്ലീ:
6 — 171
3 — 27
9
0

ഹാരകമേറിയതുകൊണ്ടു ഗുണകാരം = 171. തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം $= 171 - 2 \times 63 = 45$. ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിച്ചതുകൊണ്ട്
ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരം $= 63 - 45 = 18$
തക്ഷണശേഷം ഫലം $= 27 - 2 \times 10 = 7$
അപ്പോൾ ഉദ്ദിഷ്ടഫലം $= 10 \times (10 - 7) = 30$

സ്പഷ്ടഫലമായ 3നെ അപവത്തനമായ 10ൽ ഗുണിച്ചതാണ് ഉദ്ദിഷ്ടഫലം

(ഗ) ഹാരകത്തിന്റെയും ക്ഷേപത്തിന്റെയും അപവത്തനം = 9.

അപവത്തിക്കുമ്പോൾ ഭാജ്യം = 100, ഹാരകം = 7, ക്ഷേപം = 10

വല്ലീ:
14 ... 430
3 ... 30
10
0

തക്ഷണശേഷം ഫലം $= 430 - 4 \times 100 = 30$
" ഗുണകാരം $= 30 - 4 \times 7 = 2$
2-നെ അപവത്തനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ,
ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരം $= 2 \times 9 = 18$.

(ഖ)യിൽ ഹാരകത്തെ അപവത്തിച്ചിട്ടില്ല. അതുകൊണ്ടു വല്ല്യുപസംഹാരംചെയ്തു കിട്ടുന്ന ഗുണകാരം സ്ഫുടംതന്നെ. ഫലം $= \frac{100 \times 18 + 90}{63} = 30$. ഇങ്ങനേയും ഫലം വരുത്താം.

(ഗ)യിൽ ഭാജ്യത്തെ അപവർത്തിച്ചിട്ടില്ല. ശങ്കുകൊണ്ടു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്തു കിട്ടുന്ന ഫലം സ്ഫുടംതന്നെ.

$$\text{ഗുണകാരം} = \frac{30 \times 63 - 90}{100} = \frac{1800}{100} = 18$$

ഇങ്ങനെ ഗുണകാരവും വരുത്താം.

അനന്തരം ഇവിടെ പറഞ്ഞതും ഇനി പറയുവാൻ ഭാവിക്കുന്നതുമായ കുട്ടാകാരങ്ങളുടെ നാമഭേദങ്ങളെ പറയുന്നു.

കുട്ടാകാരോ നിരഗ്രോഽയമഥ സാഗ്രഃ പ്രകീർത്ത്യതേ ॥ 21

ചൊല്ലപ്പെട്ട കുട്ടാകാരം നിരഗ്രമെന്നു പേരായൊന്ന്. അനന്തരം സാഗ്രമെന്ന കുട്ടാകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

സാഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കലെ വിഷയം :

യസ്മിൻ ഭാജ്യേ ഹൃതേ ദ്വാഭ്യാം ഹാരാഭ്യാം ശേഷയോരപി ।
ദ്വൈവിധ്യം സ്യാൽ സ ഭാജ്യോത്ര ജ്ഞേയശ്ശേഷോഗ്രമുച്യതേ ॥ 22

യാതൊരു ഭാജ്യത്തെ രണ്ടു ഹാരകങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ രണ്ടു ശേഷങ്ങളും രണ്ടു പ്രകാരമായിട്ടു വരും ആ ഭാജ്യം ഇവിടെ ജ്ഞേയമായിട്ടുള്ളത്. ശേഷത്തെ അഗ്രമെന്നു ചൊല്ലുന്നു.

അനന്തരം നിരഗ്രകുട്ടാകാരത്തിനോടുള്ള സാമ്യത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

അത്രാധികാഗ്രഹാരസ്യ ഭാജ്യത്വമിതരസ്യ ച ।
ഭാജകത്വം തഥാഗ്രാന്തരസ്യ ക്ഷേപത്വമിഷ്യതേ ॥ 23

ഈ സാഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ അധികാഗ്രഹാരത്തിന്നു ഭാജ്യത്വവും ഊനാഗ്രഹാരത്തിന്നു ഭാജകത്വവും അഗ്രാന്തരത്തിന്നു ക്ഷേപത്വവും ഇച്ഛിക്കപ്പെടുന്നത്. യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ സംഖ്യകൊണ്ടു ഏറിയ ശേഷം ഭവിക്കുന്നു, അത് അധികാഗ്രഹാരം. യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ചെറിയ ശേഷം ഭവിക്കുന്നു, അത് ഊനാഗ്രഹാരം. ശേഷാന്തരം ക്ഷേപം. ശേഷം ക്രിയ നിരഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കലെപ്പോലെ.

ജ്ഞേയത്തിന്നു വിശേഷമുണ്ടാകയാൽ അതിനായിക്കൊണ്ടു ക്രിയാവിശേഷത്തെ പറയുന്നു.

പ്രാഗ്വൽ ലബ്ധോ ഗുണോ യോധികാഗ്രഹാരഹതോത്ര തു ।
യുക്തോധികാഗ്രേ ചോദ്ദിഷ്ടോ ഹാര്യസ്സ്യാൽ—

നിരഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കലെപ്പോലെ ഗുണകാരത്തെ വരുത്തി അതിനെ അധികാഗ്രഹാരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിൽ അധികാഗ്രം കൂട്ടിയാൽ ഉദ്ദിഷ്ടഭാജ്യം വരും.

പ്രകാരാന്തരം :

—അഥവാ പുനഃ ॥ 24

പ്രകല്പ്യാഗ്രാന്തരം ശുദ്ധിം വ്യത്യസ്തൗ ഭാജ്യഭാജകൌ ।
തഥാനീതോ ഗുണസ്തേനാഗ്രഹാരഗുണിതസ്സ തു ॥ 25
ഊനാഗ്രേണ യുതോ ഭവിഷ്ട്യദാഗ്രോ രാശിർഭവേദിഹ ।

എന്നിയെ അഗ്രാന്തരത്തെ ശുദ്ധിയെന്നും അധികാഗ്രഹാരത്തെ ഭാജകമെന്നും ഊനാഗ്രഹാരത്തെ ഭാജ്യമെന്നും കല്പിച്ചു നിരഗ്രകുട്ടാകാരവിധിപ്രകാരം വരുത്തിയ ഗുണകാരത്തെ ഊനാഗ്രഹാരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിൽ ഊനാഗ്രംകൂട്ടിയാലും ജ്ഞേയരാശി ഉണ്ടാകും.

സാഗ്രകുട്ടാകാരത്തിൻെറ ഉദാഹരണം :

യത്രാഗ്നിരമതുദ്ധ്രാപ്തേ ശേഷോ നവഷഡിന്ദവഃ ॥ 26
ശിഖിനന്ദാഗ്നിഭൂപാപ്തേ ശേഷോഷ്ടവിബുധാസ്തഥാ ।

ഇവിടെ ഒരു ഹാരകം=ഗോത്രഗായകാഃ=11323

ശേഷം=169

മറ്റൊരു ഹാരകം=ഗന്ധശീതകൃൽ=16393

ശേഷം=338

(ക) ഇവിടെ അധികാഗ്രഹാരമായിരിക്കുന്ന 16393-നെ ഭാജ്യമെന്നും ഊനാഗ്രഹാരമാകുന്ന 11323-നെ ഭാജകമെന്നും അഗ്രാന്തരമാകുന്ന 169(=338−169)-നെ ക്ഷേപമെന്നും കല്പിക്കുക.

ഭാജ്യഭാജകങ്ങളുടെ അപവർത്തനം=169

അപവർത്തിക്കുമ്പോൾ ദൃഢഭാജകം$=\frac{11323}{169}=67$

ദൃഢഭാജ്യം$=\frac{16393}{169}=97$

ദൃഢക്ഷേപം$=\frac{169}{169}=1$

97-നേയും 67-നേയും അന്യോന്യഹരണം ചെയ്താലുണ്ടാകുന്ന വല്ലീ:—

1...42
2...29→ഗുണകാരം
4...18
3...മതി
1...മതിഫലം

അപ്പോൾ ഉദ്ദിഷ്ടഭാജ്യം$=16393\times29+338=475735$

$\left[\frac{475735}{16393}\right.$, ശേഷം=338; $\frac{475735}{11323}$, ശേഷം=169]

അഥവാ അഗ്രാന്തരത്തെ ശുദ്ധി എന്നും അധികാഗ്രഹാരത്തെ ഭാജകമെന്നും ഊനാഗ്രഹാരത്തെ ഭാജ്യമെന്നും കല്പിച്ച ക്രിയചെയ്താൽ ഗുണകാരം 42 എന്ന്.

അവിടെ ഉദ്ദിഷ്ടഭാജ്യം $=11823\times42+169=475735$

സാഗ്രകുട്ടാകാരത്തിൻെറ വിശേഷത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

മണ്ഡലാദിഭവൌ ശേഷാവുദ്ദിഷ്ടൌ ഗ്രഹയോര്യദി ॥ 27

താഭ്യാം നിരഗ്രവിധിനാ ഗുണകാരൌ പൃഥങ്നയേൽ ।

താവഗ്രേ കല്പയിത്വാഥ ദ്വിച്ഛേദാഗ്രം സമാനയേൽ ॥ 28

സാധാരണോ ഗുണസ്സ സ്യാൽ ഗ്രഹയോസ്തദ്വയഭാജ്യയോഃ ।

രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളുടെ മണ്ഡലശേഷങ്ങൾ, രാശിശേഷങ്ങൾ മുതലായവയിൽ ഒന്നു ജ്ഞാതമാണെങ്കിൽ നിരഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ പറഞ്ഞവണ്ണം ആ ശേഷങ്ങളെക്കൊണ്ടു രണ്ടു ഗുണകാരങ്ങളേയും വെവ്വേറെ ഉണ്ടാക്കി ആ ഗുണകാരങ്ങളെ അഗ്രങ്ങൾ എന്നു കല്പിച്ചു മുൻശ്ലോകത്തിൽ പറഞ്ഞപ്രകാരം ദ്വിച്ഛേദാഗ്രരാശിയെ ഉണ്ടാക്കിയാൽ അതു രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളുടെ ഭാജ്യങ്ങൾക്കും സാധാരണമായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരമായിരിക്കും.

ഈ ക്രിയയുടെ ഉദാഹരണം:

ത്രിഘ്നോ ഗുണകോഽർക്കസ്യ ഹാരോ ദ്വ്യംശാഷ്ടിശോമിതഃ ॥ 29

ത്രിനന്ദാഗ്നിനൃപാ ഹാരഃ ഖഖാംഗാനി ഗുണോ വിധോഃ ।

തത്ര മണ്ഡലശേഷോഽർക്കസ്യാഷ്ടൌ ചന്ദ്രസ്യ വഹ്നയഃ ॥ 30

തയോസ്സാധാരണം ബ്രൂഹി ഗുണകം ഗണകോത്തമ ।

സൂര്യൻ	ചന്ദ്രൻ
ഹാരകം $=9862$	ഹാരകം $=16393$
ഗുണകാരം $=27$	ഗുണകാരം $=600$
മണ്ഡലശേഷം $=8$	മണ്ഡലശേഷം $=3$
വല്ലി: 365...8036	വല്ലി: 27...11721
3...22	3...429
6(മതി)	9...138
4(മതിഫലം)	5...15
	3
	0

∴ അധികാഗ്രഹാരം $=16393$ (ഭാജ്യം)

ഊനാഗ്രഹാരം $=9862$ (ഭാജകം)

അഗ്രാന്തരം $=11721-8036=3685$ ($=$ക്ഷേപം)

ഭാജ്യഭാജകങ്ങളുടെ അന്യോന്യഹരണവും വല്ലിയും: —

1	9862	16393	1
1	3331	6531	1
2	131	3200	24
1	19	56	2
	1	18	

ശേഷം	ഫലം	സംഹൃതഫലം	
16393	1		15032
9862	1		9043
6531	1		5989
3331	1		3054
3200	24	12535	2935
131	2	512	119
56	2	11055	247
19	1	3685	18
	3685		
	0		

രൂപം ഹാരകശേഷമാകയാൽ 3685 ക്ഷേപം തന്നെ. ഇവിടെ വല്ല്യുപസംഹാരത്തിന്നിടയിൽ തക്ഷണംചെയ്ത സംഖ്യകളെ ചെറുതാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

ഭാജ്യമേറിയതുകൊണ്ടു ഗുണകാരം = 9043

∴ ചിഷ്ടദ്യുഗണരാശി = 16393 × 9043 + 11721 = 148253620

[ഇതിനെ 27കൊണ്ടു ഗുണിച്ച 9862കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽശേഷം = 8
600കൊണ്ടു ഗുണിച്ച 16393കൊണ്ടുഹരിച്ചാൽശേഷം = 3]

ഉദാഹരണാന്തരം:

രൂപേ ഗുണേ കുജാർക്ക്യോര്യൗ ഹാരൗ തദ്ഭൂപസംഭവൗ || 31
രാശിശേഷഃ കുജസ്യാർക്കാ ലിപ്താശേഷസ്തു നേത്രഖാഃ |
അഥ താഭ്യാം ഗുണൗ ജ്ഞാത്വാ ബ്രൂഹി സാധാരണം ഗുണം || 32

ഒന്നു ഗുണകാരമാകുമ്പോൾ കുജമന്ദന്മാർക്കു യാവചിലവ ഹാരകങ്ങൾ, അവയെ ഹാരകങ്ങളാക്കിയും രൂപത്തെ ഗുണകാരമാക്കിയും ക്രിയചെയ്താൽ ചൊവ്വക്കു രാശിശേഷം 12, ശനിക്കു ലിപ്താശേഷം 20. അവറ്റെക്കൊണ്ടു ഗുണകാരങ്ങളുണ്ടാക്കി സാധാരണമായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരത്തെ ചൊല്ലുക.

ഇവിടെ ക്രിയ മുമ്പിലത്തെപ്പോലെതന്നെയാണെങ്കിലും കുറച്ചു വിശേഷമുണ്ട്. മുൻഉദാഹരണത്തിൽ മണ്ഡലശേഷങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്നതുകൊണ്ടു ഗുണകാരങ്ങളെ തന്നെ വെച്ചു ക്രിയ ചെയ്യാം. രാശിശേഷമാകുമ്പോൾ 12-ൽ ഗുണിച്ച ഗുണകാരത്തെക്കൊണ്ടും ലിപ്താശേഷമാണെങ്കിൽ 21600-ൽ ഗുണിച്ച ഗുണകാരംകൊണ്ടും ക്രിയ ചെയ്യേണമെന്നു വിശേഷമാകുന്നത്.

കുജൻ.

ഹാരകം=സുജാതഃ=687
ഗുണകാരം= കിം =1
രാശിശേഷം =12

കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ,

ഹാരകം=687
ഭാജ്യം =1×12=12
ശേഷം =12
ഭാജ്യഹാരകങ്ങളുടെ അപവർത്തനം=3
∴ദൃഢഹാരകം=229
ദൃഢഭാജ്യം =4
ശേഷം =4(ശുദ്ധി)
വല്ലി: 57...228 (ഗുണകാരം)
4
0

ശനി

ഹാരകം=തതസേനികം=10766
ഗുണകാരം=കിം =1
ലിപ്താശേഷം =20

കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ,

ഹാരകം=10766
ഭാജ്യം =21600
ശേഷം =20
ഭാജ്യഹാരകങ്ങളുടെ അപവർത്തനം=2
∴ദൃഢഹാരകം=5383
ദൃഢഭാജ്യം=10800
ശേഷം=10(ശുദ്ധി)
വല്ലി: 2...9530
158...4750
3...30
10
0

കുജപക്ഷത്തിൽ ഹാരകമേറുകയാൽ ഗുണകാരം=228

രൂപം ഹാരകശേഷമാകയാൽ സ്പഷ്ടഗുണകാരം=229−228=1

ഈ ഒന്നിനെ 4-ൽ ഗുണിച്ചാൽ 229-ൽ ഹരിക്കുവാനില്ല. അതുകൊണ്ട്,
സ്പഷ്ടഗുണകാരം=2×229−228=230 എന്നു കല്പിക്കണം.
അപ്പോൾ ഫലം=2×4−4=4

അപ്പോൾ 230-നെ 4-ൽ പെരുക്കി 229-ൽ ഹരിച്ചാൽ ശേഷം 4 എന്നു വരും.

കുജപക്ഷത്തിൽ ഗുണകാരം=230

ശനിപക്ഷത്തിൽ ഭാജ്യമേറുകയാൽ ഗുണകാരം=4750

ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ 10 ശുദ്ധിതന്നെ.

അപ്പോൾ അനന്തരക്രിയയിൽ

ഭാജ്യം=10766 (അധികാഗ്രഹാരം)
ഭാജകം=687 (ഊനാഗ്രഹാരം)
ക്ഷേപം=4750−230=4520

അന്യോന്യഹരണം: വല്ലി: ശേഷം. ഫലം. സംഹതഫലം.

1	687	10766	15
25	226	461	2
	1	9	

10766......15........................320 (=ഫലം)
687......1..............................20 (=ഗുണകാരം)
461......2......230520.........20
226 .....25......11300.........0
9...4520
1...0

ഇവിടെ ഭാജ്യമേറുന്നതുകൊണ്ട് ഗുണകാരം=20.

ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ 4520 ക്ഷേപം തന്നെ.

∴ സാധാരണഗുണകാരം $= 20 \times 10766 + 4750 = \underline{220070}$.

[ഈ സാധാരണഗുണകാരത്തെ 1-ൽ ഗുണിച്ച 687കൊണ്ടു ഹരിച്ച രാശിയെ ഭഗണമാക്കിയാൽ രാശിശേഷം = 12; ഇതിനെ തന്നെ ഒന്നിൽ ഗുണിച്ച 10766കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ഇലിയാൽ ഭഗണമാക്കിയാൽ ശേഷം = 20]

ലഘുക്കളായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരഹാരകങ്ങളുടെ ആനയനത്തിങ്കൽ കുട്ടാകാരത്തിന്റെ ഉപയോഗം:

യാവദിഷ്ടമ്മിഥോ ഹൃത്വാ ദൃഢേ ഭഗണഭൂദിനേ |
ഫലവല്ല്യാസ്തധോ രൂപം ന്യസ്യതാമുപസംഹരേൽ || 33

യൌ രാശീ തത്ര ലഭ്യേതേ ഗുണഹാരൌ വിധായതൌ |
ഭഗണാദ്യം നയേന്മദ്ധ്യം സംസ്കാരാൽ സൂക്ഷ്മതാസ്യ ച || 34

അപവൎത്തിക്കപ്പെട്ട ഭഗണഭൂദിനങ്ങളെ അന്യോന്യം ആവശ്യത്തോളം ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലങ്ങളെക്കൊണ്ടു വല്ലിയുണ്ടാക്കി അതിന്റെ ചുവട്ടിൽ രൂപത്തെ വെക്കുക. എന്നിട്ടു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്യുക. ശേഷിക്കുന്ന രാശികളിൽ ഫലരൂപമായിരിക്കുന്ന രാശി ഗുണകാരം, ഗുണരൂപമായിരിക്കുന്ന രാശി ഹാരകം. ഈ ഗുണകാരഹാരകങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഭഗണാദ്യമായിരിക്കുന്ന മദ്ധ്യമത്തെ വരുത്താം. എന്നാൽ ഈ മദ്ധ്യമത്തിന്നു സൂക്ഷ്മതവരുത്തുവാൻ ചില സംസ്കാരം ചെയ്യേണം.

സംസ്കാരപ്രകാരം:

ഇഷ്ടഹാരേണ നിഘ്നാൽ ദൃഢഹാരകതസ്തു യൽ |
മിഥോ ഹരണശേഷഘ്ന ചക്രലിപ്താഹൃതം ഫലം || 35

തേനേഷ്ടഭൂഗണാൽ ലബ്ധം ഫലം ലിപ്താദികം ധനം |
ശേഷശ്ചേൽ ഭഗണേ ദൃഷ്ടോ ഭൂദിനേ ചേദൃണം തഥാ || 36

കുട്ടാകാരംകൊണ്ടു വരുത്തിയ ഹാരകത്തേയും ദൃഢഹാരകത്തേയും (അപവൎത്തിക്കപ്പെട്ട ഭൂദിനം) തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതിനെ ചക്രലിപ്ത (21600) കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന അന്യോന്യഹരണശേഷം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ഫലം സംസ്കാരഹാരകം. ഈ സംസ്കാരഹാരകത്തെക്കൊണ്ടു ഭൂഗണത്തെ ഹരിച്ച ഫലം (ഇലി) മദ്ധ്യമത്തിൽ സംസ്കരിക്കേണം. അന്യോന്യഹരണത്തിങ്കലെ ഒടുക്കത്തെ ശേഷം ഭഗണശേഷമെങ്കിൽ ധനമായിട്ടും ഭൂദിനശേഷമെങ്കിൽ ഋണമായിട്ടും സംസ്കരിക്കേണം.

ഈ സംസ്കാരംകൊണ്ടും സൂക്ഷ്മതപോരാസ്സിൽ ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകവുമുണ്ടാക്കി അതുകൊണ്ടും സംസ്കാരം ചെയ്യേണം. ഇതിൻ പ്രകാരം:

സംസ്കാരഹാരാനയനേ യച്ഛേഷസ്തേന സംഹരേൽ |
സംസ്കാരഹാരേഷ്ടഹാരദൃഢഹാരവധം തതഃ || 37

യല്ലബ്ധം സ ദ്വിതീയോപി പ്രോക്തഃ സംസ്കാരഹാരകഃ |
പൂർവ്വവൽ സ്വർണ്ണതോനത്വേ ശേഷത്വസ്യാന്യഥാന്യഥാ || 38

സംസ്കാരഹാരകവും ഇഷ്ടഹാരകവും ദൃഢഹാരകവും മൂന്നിനേയും തമ്മിൽ ഗുണിച്ച് അതിനെ സംസ്കാരഹാരകം വരുത്തുന്നേടത്തെ ശേഷംകൊണ്ടു ഹരിക്ക. അപ്പോളുണ്ടാകുന്ന ഫലം ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകം. ഇതിനെക്കൊണ്ടും ദ്യുഗണത്തെ ഹരിച്ചഫലം (ഇലി) മദ്ധ്യമത്തിൽ സംസ്കരിക്കേണം, സൂക്ഷ്മതക്കായിക്കൊണ്ട്. ഈ പറഞ്ഞ ശേഷം ഊന (ഹരിക്കുവാൻ പോരാതെ വരുന്ന) ശേഷമാണെങ്കിൽ മുമ്പിലെപ്പോലെ സംസ്കാരത്തിൻെറ ഋണധനത്വം; അധികശേഷമെങ്കിൽ വിപരീതം.

ഈ ക്രിയയുടെ ഉദാഹരണം:

സൂര്യന്റെ ദൃഢഭഗണം = തിഥീശഃ = 576

| ദൃഢഭൂദിനം = ധീജഗന്നൂപുരം = 210389

ഇവയെ അന്യോന്യഹരണംചെയ്തതിൽ നാലു ഫലങ്ങളെവെച്ചു ക്രിയ ചെയ്യാം.

വല്ലി: 365...9862 (പ്രീതിജഝഃ)—ഗുണകാരം
3...27 (സൂരിഃ)—ഫലം
1...7
6
1

മദ്ധ്യമാനയനത്തിൽ ഗുണകാരം = 27; ഹാരകം = 9862

അന്യോന്യഹരണത്തിങ്കൽ 6 ഫലമാകുമ്പോൾ ശേഷം = 9. അതു ഭഗണശേഷം.

അപ്പോൾ സംസ്കാരഹാരകം $= \frac{9862 \times 210389}{9 \times 21600} = 10673$ (ധനം)

ശേഷമാകുന്ന 9 ഭഗണശേഷമാകയാൽ സംസ്കാരം ധനം.

സംസ്കാരഹാരകമുണ്ടാക്കുന്നേടത്തെ ശേഷം 25118. ഇതു് അധികശേഷം

അപ്പോൾ രണ്ടാം സംസ്കാരഹാരകം $= \frac{9862 \times 210389 \times 10673}{25118} = 881636336$

അധികശേഷമായതുകൊണ്ടു ദ്വിതീയസംസ്കാരം ഋണം (ആദ്യസംസ്കാരം ധനമായതുകൊണ്ട്).

[സംസ്കാരഹാരകത്തെ 10674 എന്നാക്കിയാൽ ശേഷം ഊനശേഷമായിട്ടുവരും. അതു $9 \times 21600 - 25118 = 169282$ എന്നു്.

അപ്പോൾ രണ്ടാംസംസ്കാരഹാരകം $= \frac{9862 \times 210389 \times 10674}{169282}$

ഊനശേഷമാകകൊണ്ടു് ഈ സംസ്കാരം ധനവുമാണു്.]

പരീക്ഷാർത്ഥം 100000000 ദിവസങ്ങളുടെ മദ്ധ്യമം വരുത്തി നോക്കാം.

ധ്രുവാനയനപ്രകാരം മദ്ധ്യമം $= \frac{10^8 \times 576}{210389} =$ 6രാശി $- 25 - 56 - 47$

ലഘുഗുണകാരഹാരകങ്ങളെക്കൊണ്ടു് ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം:—

രാ. തി. ഇ. വി.

(ക) $\frac{10^8 \times 27}{9862} = 1 - 19 - 47 - 28$

(ഖ) $\frac{10^8}{10673} = 5 - 6 - 9 - 26$ (ധനം)

(ക)+(ഖ) $= 6 - 25 - 56 - 54$

(ഗ) $\frac{10^8}{881636336} = 0 - 0 - 0 - 7$ (ഋണം)

ഉദ്ദിഷ്ടമദ്ധ്യമം $= 6 - 25 - 56 - 47$

ഒരേ ക്രിയകൊണ്ടുതന്നെ പല ഗുണകാരഹാരകങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം:—

യഥാ വല്ല്യൂർദ്ധ്വഗം രൂപം കൃത്വോർദ്ധ്വാദ്യമധോന്തിമം |
കുര്യാദ്വല്ല്യുപസംഹാരം പൂർവ്വം പൂർവ്വമനാശയൻ || 39
തത്ര ലബ്ധാഃ ക്രമേണൈവ ഹാരകാസ്സ്യുഃ പൃഥക് പൃഥക് |

ഭഗണഭൂദിനങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലവല്ലിയുടെ മേലെ രൂപത്തേയും വെച്ചു മേൽനിന്നു കീഴ്പ്പോട്ടു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്ക. മേലെ മേലെയുണ്ടായ രാശികളെ കളയാതെ സൂക്ഷിക്കുകയും വേണം. എന്നാൽ ഈ രാശികൾ വെവ്വേറെ ചില ഹാരകങ്ങളായിട്ടു വരും.

ഇവയുടെ ഗുണകാരാനയനം:

രൂപമാദ്യഫലസ്ഥാനേ ന്യസ്യ ഖഞ്ച തദൂർദ്ധ്വതഃ || 40
കർമ്മണാനേന തേഷാം സ്യുർഗ്ഗുണകാരാ യഥാക്രമം |

ഫലവല്ലിയിൽ ആദ്യത്തെ ഫലത്തെ കളഞ്ഞു് അതിന്റെ സ്ഥാനത്തു രൂപം വെക്കുക. അതിന്റെ മീതെ ശൂന്യത്തേയും വെക്കുക. മുമ്പിൽ പറഞ്ഞപ്രകാരം വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്ക. എന്നാൽ മുൻ വരുത്തിയിരിക്കുന്ന ഹാരകങ്ങളുടെ ഗുണകാരങ്ങളെ ക്രമേണ ലഭിക്കും.

ഇവററിന്നു സംസ്കാരഹാരകങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുവാനുള്ള ഉപായം:

പ്രാഗ്വത്തത്തൽഗതൈശ്ശേഷൈഃ കുര്യാൽ സംസ്കാരഹാരകാൻ ॥ 41

മുൻപറഞ്ഞപ്രകാരം അവിടവിടത്തെ ശേഷങ്ങളെക്കൊണ്ടു സംസ്കാരഹാരകങ്ങളേയും വരുത്തികൊൾക.

ഉദാഹരണം:

സൂര്യന്റെ യുഗഭഗണഭൂദിനങ്ങളെ (576; 210389) അന്യോന്യം ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലവല്ലിയെ രണ്ടേടത്തുവെച്ച് ഒന്നിന്റെ മീതെ രൂപത്തേയും മററതിന്റെ ആദ്യഫലമായ 365-നെ കളഞ്ഞ് ആ സ്ഥാനത്തു രൂപത്തേയും ഈ രൂപത്തിന്റെ മീതെ ശൂന്യത്തേയും വെച്ച രണ്ടിങ്കലും മുകളിൽനിന്നു കീഴ്പ്പോട്ടു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്ക.

രൂപാദി വല്ലീ	ഉപസംഹൃത ഫലങ്ങൾ	ശൂന്യാദി വല്ലീ	ഉപസംഹൃത ഫലങ്ങൾ	ശേഷങ്ങൾ	ശേഷങ്ങളുടെ ഋണധനത്വം
1		0			
365.		1			
3	1096	3	3	129	ഭഗണശേഷം (+)
1	1461	1	4	20	ഭൂദിനശേഷം (−)
6	9862	6	27	9	ഭഗണശേഷം (+)
2	21185	2	58	2	ഭൂദിനശേഷം (−)
4	94602	4	259	1	ഭഗണശേഷം (+)
2	210389	2	576	0	ഭൂദിനശേഷം (−)

ഇവിടെ രണ്ടാമത്തെ വരിയിലുള്ളവ ഹാരകങ്ങളാകുന്നു. നാലാമത്തെ വരിയിലുള്ളവ ഈ ഹാരകങ്ങളുടെ ക്രമേണയുള്ള ഗുണകാരങ്ങളുമാകുന്നു. അഞ്ചാമത്തെ വരിയിലെ ശേഷങ്ങളിൽ നിന്നു ക്രമേണയുള്ള സംസ്കാരഹാരകങ്ങളേയും ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകങ്ങളേയും മുൻപറഞ്ഞപ്രകാരം ഉണ്ടാക്കാം.

ഇവിടെ രണ്ടു ഹാരകങ്ങളുടെ യോഗത്തേയൊ അന്തരത്തേയൊ ഹാരകമായി കല്പിച്ചാൽ അതതു ഗുണകാരങ്ങളുടെ യോഗമൊ അന്തരമൊ ഗുണകാരമായിട്ടു വരും. അതതു ശേഷങ്ങളേയും ഋണധനം പോലെ യോഗവിയോഗം ചെയ്താൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഫലം ശേഷമായിട്ടു

വരും. ഈ ശേഷത്തിങ്കന്നു സംസ്കാരഹാരകത്തേയും ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകത്തേയും ഉണ്ടാക്കാം. ഹാരകങ്ങളായിരിക്കുന്ന 9862_ന്റേയും 1461 ന്റേയും യോഗം 11323; ഇവയുടെ ഗുണകാരയോഗം = 31. ഇങ്ങനെയാണ് **കലം** എന്ന ഗുണകാരത്തിന്നു **ഗോത്രഗായകഃ** എന്ന ഹാരകം ലഭിച്ചത്. ഇവിടത്തെ സംസ്കാരഹാരകാനയനം പിന്നെ. 1461_കലേക്കുള്ള ശേഷം 20 ഭൂദിനശേഷമാകകൊണ്ട് ഋണം. 9862_കലേക്കുള്ള ശേഷം 9 ഭഗണശേഷമാകകൊണ്ടു ധനം. ഇവയുടെ അന്തരം 11 ഋണം.

മുൻപറഞ്ഞ ന്യായപ്രകാരം,

$$\text{സംസ്കാരഹാരകം} = \frac{210389 \times 11323}{11 \times 21600} = 10026 \text{ — ചണ്ഡാനനയാ (ഋണം)}$$

മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ കുട്ടാകാരങ്ങളുടെ സംജ്ഞകൾ:

ക്രമാദ്രൂപാദിശൂന്യാദികുട്ടകൌ വ്യസ്തകുട്ടകൌ ।

ഫലവല്ലിയുടെ മീതെ രൂപംവെച്ച മേലെനിന്നു കീഴ്പ്പെട്ടു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്യുന്ന കുട്ടാകാരത്തിന്നു **രൂപാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാര**മെന്നു പേർ. ആദ്യഫലസ്ഥാനത്തു രൂപംവെച്ച് അതിന്നുമേൽ ശൂന്യവുംവെച്ച ചെയ്യുന്ന കുട്ടാകാരത്തിന്നു **ശൂന്യാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാര**മെന്നു പേർ.

കുട്ടാകാരങ്ങളുടെ ഉപയോഗങ്ങൾ :—

ഇഷ്ടദേശഭവോ യോഗോ ദ്വയോശ്ചേൽ ജ്ഞാതുമിഷ്യതേ ॥ 42
ഇഷ്ടകാലേ സമാനീതം മദ്ധ്യമം യന്മഹാഗതേഃ ।
ഇഷ്ടദേശം വിശോദ്ധ്യാതസ്ത്വിഷ്ടം ലിപ്തീകൃതം ഹതം ॥ 43
ഭൂദിനൈശ്ചക്രലിപ്താപ്തഭഗണൈർവ്വിഭജേത്തതഃ ।
ലബ്ധം ദിനാദികം ശോദ്ധ്യമിഷ്ടകാലാത്തദാ പുനഃ ॥ 44
മദ്ധ്യമല്പഗതേഃ കൃത്വാ തസ്മാച്ചേഷ്ടം വിശോധയേൽ ।
ശേഷം ലിപ്തീകൃതം ഹത്വാ മഹതാ ഭഗണേന തു ॥ 45
ചക്രലിപ്താഹൃതാ ശുദ്ധിഹാരകോ ഭഗണോ മഹാൻ ।
ഭാജ്യോല്പോ ഭഗണൈസ്തൈസ്തു നിരഗ്രവിധിനാഗതാൽ ॥ 46
തൽഗുണാൽ ഭൂദിനഘ്നാന്മഹതാ ഭഗണേന യൽ ।
ലഭ്യതേ തത്ത്യജേൽ പൂർവ്വസംസ്കൃതാദിഷ്ടകാലതഃ ॥ 47
ഇഷ്ടകാലേ ഭവേദ്യോഗ ഇഷ്ടദേശഗ്രഹേന്ദ്രയോഃ ।

രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളുടെ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലെ യോഗമറിവാൻ ഇച്ഛിക്കപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരിഷ്ടദിവസത്തിങ്കലെ കലി

കൊട്ടനാൾ വെച്ച രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളിലുംവെച്ചു ഗതി ഏറുന്നവന്റെ മദ്ധ്യമത്തെ വരുത്തി അതിൽനിന്ന് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തെ വാങ്ങി ശേഷിച്ചതിനെ ഇലിയാക്കി ഭൂദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ചക്രകലാഹതങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭഗണങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം ദിവസാത്മകം. ശേഷത്തെ 60-ൽ ഗുണിച്ചു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം നാഴിക. അതിനെ മുമ്പിലത്തെ കലിക്കൊട്ടനാളിൽനിന്നു വാങ്ങി ശേഷിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഗതി കുറഞ്ഞവന്റെയും മദ്ധ്യമത്തെ ഉണ്ടാക്കി അതിങ്കൽനിന്ന് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തെ വാങ്ങൂ. ശേഷിച്ചതിനെ ഇലിയാക്കി മഹാഗതിയുടെ ഭഗണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് "അനന്തപുരം"(=21600) കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ശുദ്ധിയാകുന്നത്. ഇവിടെ തികഞ്ഞ ഫലത്തെ മാത്രം സ്വീകരിച്ചാൽ മതി. ശേഷത്തെ കളയാം. മഹാഗതിയുടെ ഭഗണം ഹാരകമാകുന്നത്. അല്പഗതിയുടെ ഭഗണം ഭാജ്യമാകുന്നത്. ഇവറെറക്കൊണ്ടു നിരഗ്രകുട്ടാകാരം ചെയ്താൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഗുണകാരത്തെ ഭൂദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു മഹാഭഗണത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ദിവസാദി ആയിട്ടുണ്ടാകുന്ന ഫലത്തെ മുമ്പിൽ ഒരു സംസ്കാരം ചെയ്തുവെച്ചിരിക്കുന്ന കലിക്കൊട്ടനാളിൽനിന്നു വാങ്ങു. ശേഷിച്ച കാലത്തിങ്കൽ രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങൾക്കും ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കൽ യോഗമുണ്ടാകും.

ഉദാഹരണം:—

ഇഷ്ടപ്രദേശം=4രാശി 7തിയതി.

ഇഷ്ടകലി=1841000 (അജ്ഞാനകവിധേയം)

അർക്കകുജയോഗം ഇച്ഛിക്കപ്പെടുന്നത്.

[മദ്ധ്യമാനയനം, ഭഗണങ്ങൾ ഇവയെല്ലാം തന്ത്രസംഗ്രഹം അനുസരിച്ചു കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നു.]

അർക്കന്റെ ഭഗണം=4320000 }
കുജന്റെ ഭഗണം=2296864 } ഇവയുടെ അപവർത്തനഹാരകം=32.

ഭൂദിനം=1577917500.

അർക്കന്റെ ദൃഢഭഗണം=135000

കുജന്റെ ദൃഢഭഗണം=71777

ഇഷ്ടദിവസത്തിങ്കലെ അർക്കമദ്ധ്യമം=3-4-51-51-23

ഇഷ്ടകാലാർക്കമദ്ധ്യമത്തിൽനിന്നു ഇഷ്ടപ്രദേശം വാങ്ങിയത്:

$$\begin{array}{r} 3-4-51-51-23 \\ 4-7-\ 0-\ 0-\ 0 \\ \hline =10-27-51-51-23 \end{array}$$

=19671 ഇലി-51വി-23ത

$$\frac{19671-51-23 \times 1577917500}{21600 \times 4320000} = 332\text{ദി} - 39\text{നാ} - 12\text{വി} - 48 - 5$$

കലിക്കൊട്ടനാളിൽനിന്ന്

ഈ ദിവസത്തെ വാങ്ങിയത്=1840667-20-47-16-55.

ഈ സംസ്കൃതദിവസത്തിലെ കുജമദ്ധ്യമം = 3 – 16 – 42 – 59 – 33

ഇതിൽനിന്നു ഇഷ്ടപ്രദേശം വാങ്ങിയതു് = $\frac{4 - 7 - 0 - 0 - 0}{11 - 9 - 42 - 59 - 33}$

= 20382ദി – 59നാ – 33വി.

$\frac{20382 - 59 - 33 \times 135000}{21600}$ = ശുദ്ധി = 127394 (അല്പാധികം കൂട്ടിയതു്)

ഹാരകം = 135000

ഭാജ്യം = 71777

അർക്കകുജന്മാരുടെ ദൃഢഭഗണങ്ങളായ 135000, 71777 ഇവയെ അന്യോന്യഹരണം ചെയ്തുണ്ടായ വല്ലി:

1......5287
1......2811
7......2476
2......335
1......131
1......73
3......58
1......15
6......13
1......2
1......1
1
0

വല്ലിയുടെ ചുവട്ടിൽ രൂപവും അതിന്റെ ചുവട്ടിൽ ശൂന്യവും വെച്ച് വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്തു. ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ 1 ക്ഷേപം. ഓജമാകയാൽ ഗുണകാരം = 5287. അപ്പോൾ 1 ശുദ്ധിയാകുമ്പോൾ ഗുണകാരം = 135000 – 5287 = 129713. അപ്പോൾ 127394 ശുദ്ധിയാകുമ്പോൾ ഗുണകാരം = 129713 × 127394 = 16524657922 തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം = 117922.

$\frac{1577917500 \times 117922}{4320000}$ = 43072034ദി – 7 – 42 – 30

1840667 – 20 – 47 – 17 എന്ന കലിദിവസസമയത്തിങ്കന്നു 43072034 – 7 – 42 – 30 ദിവസം മുമ്പു കുജാർക്കന്മാരുടെ യോഗം ഇഷ്ടപ്രദേശത്തു സംഭവിച്ചു.

[ഈ കാലത്തിൽ അർക്കൻ 117922 ഭഗണങ്ങളും തികച്ചും ഗമിച്ചു; കുജൻ $\frac{43072034 - 7 - 42 - 30 \times 2296864}{1577917500}$ = 62696ഭഗണം. 11രാശി. 9തി. 43ഇ. 2വി. ഗമിച്ചു.

അപ്പോൾ യോഗസമയമായി കണക്കാക്കിയ സമയത്തെ

അർക്കമദ്ധ്യമം = (4 – 7 – 0 – 0) – 0 = 4 – 7 – 0 – 0

കുജമദ്ധ്യമം = (3 – 16 – 43 – 0) – (11 – 9 – 43 – 2) = 4 – 6 – 59 – 58

വ്യത്യാസം 2വിലി മാത്രമാകുന്നു. അതു് അല്പാധികം കൂട്ടിയതിനാലും മറ്റും ഉണ്ടായതായിരിക്കണം.]

ഗണിതത്തിൽ ആസന്നയോഗങ്ങളെക്കൊണ്ടാണ് അധികം ആവശ്യം. അതുകൊണ്ടു ചില ആസന്നയോഗങ്ങളെ അറിവാനുള്ള ഉപായത്തെ ചൊല്ലുന്നു:—

ഭഗണൌ തു തയോർഹൃത്വാ മിഥോ വ്യസ്താഖ്യകർമ്മണാ || 48
ജാതാൻ ഭൂദിവസൈർഹത്വാ വിഭജേൽ ഭഗണേന താൻ |
രൂപാദികേ തു മഹതാ സ്വല്പേന വിയദാദികേ || 49
ലബ്ധാസ്സ്യുർദ്ദിവസാഷ്ഷഷ്ട്യാ ഹതാന്നാഡ്യാദയോപി തേ |
ഇഷ്ടദേശയുതൌ ശീഘ്രാല്പഗത്യോസ്സമയാഃ ക്രമാൽ|| 50

രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളുടേയും ഭഗണങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരിച്ചു ഫലവല്ലി ഉണ്ടാക്കി രൂപാദിയായിട്ടോ ശൂന്യാദിയായിട്ടോ ഉള്ള വ്യസ്തകുട്ടാകാരംചെയ്തുണ്ടായ രാശികളെ വെവ്വേറെ ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഭഗണംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. രൂപാദിയെങ്കിൽ വലിയഭഗണംകൊണ്ടും ശൂന്യാദിയെങ്കിൽ ചെറിയ ഭഗണംകൊണ്ടും ഹരിക്കേണ്ടുവതു്. ഉണ്ടായ ഫലങ്ങൾ ദിവസാത്മകങ്ങൾ. ശേഷങ്ങളെ 60-ൽ ഗുണിച്ചു ഭഗണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ നാഴിക മുതലായവയും ഉണ്ടാകും. ഈ ഉണ്ടായ കാലങ്ങൾ ശീഘ്രഗതിഗ്രഹത്തിൻെറയും അല്പഗതിഗ്രഹത്തിൻെറയും ഇഷ്ടദേശയോഗങ്ങളുടെ അന്തരങ്ങൾ

ഇവിടെ നേരെ യോഗം വരായ്കയാൽ ഗ്രഹങ്ങൾ തങ്ങളിലുള്ള അന്തരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

തത്ര തത്ര ഗതാൻ ശേഷാംശ്ചക്രലിപ്താഹതാൻ ഹരേൽ |
ഇഷ്ടസ്യ ഭഗണേന സ്യാദിതരസ്യ തദന്തരഃ || 51

അന്യോന്യഹരണത്തിങ്കൽ അവിടെയവിടെ ഉണ്ടായ ശേഷങ്ങളെ "അനന്തപുരം"കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു് ഇഷ്ടഗ്രഹത്തിൻെറ ഭഗണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അവന്നു് ഇതരഗ്രഹത്തോടുള്ള അന്തരം ലിപ്താത്മകമായി കിട്ടും.

ഇതിൻെറ ഉദാഹരണം:—

സിംഹേ സപ്തമഭാഗേഭൂൽ കദാ യോഗോർക്കഭൌമയോഃ |
തയോരന്യതരസ്യാത്ര യോഗസ്തദിതരസ്യ തു || 52
അത്യാസക്തിർഭവേൽ പശ്ചാൽ കസ്മിൻ കസ്മിന്നഹോഹസി |
തയോരന്തരലിപ്താശ്ച കതിസ്യുർഗ്ഗണകോത്തമ || 53

ഒരിക്കൽ ആദിത്യനും ചൊവ്വക്കും ചിങ്ങത്തിൽ ഏഴു തിയതി തികയുന്നേടത്തു യോഗമുണ്ടായി, പിന്നെ അവരിൽ ഒരുത്തന്നു് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തു യോഗവും മറേറവന്നു് ഏററവും അണവും (=സാമീപ്യം, അടുപ്പം) ഏതേതു കാലത്തുണ്ടായി എന്നു ചൊല്ലുക. അന്നു ഇവ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരകലകൾ എത്ര എന്നും ചൊല്ലുക.

സൂര്യന്റെയും കുജന്റെയും ദൃഢഗുണങ്ങളായ 185000, 71777 ഇവയെ അന്യോന്യം ഹരിച്ച ഫലവല്ലിയും രൂപാദിശൂന്യാദികുട്ടാകാരങ്ങളെക്കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ സംഹൃതഫലങ്ങളും;—

വല്ലീ	രൂപാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരം		ശൂന്യാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരം		ദൃഢശേഷങ്ങൾ
1	1		0		
1	1		1		
7	1	2	1	1	
2	7	15	7	8	
1	2	32	2	17	
1	1	47	1	25	1481
3	1	79	1	42	383
1	3	284	3	151	332
6	1	363	1	193	51
1	6	2462	6	1309	26
1	1	2825	1	1502	25
	1	5287	1	2811	1

ശേഷംവെച്ച് അന്തരം കാണുമ്പോൾ ദൃഢശേഷങ്ങളെ ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ ദൃഢഗുണങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മതി.

ക്രിയചെയ്തിട്ടുള്ള ഫലങ്ങൾ:

	സംഹൃതഫലം	യോഗങ്ങൾതങ്ങളിൽ അന്തരദിവസങ്ങൾ	അദ്ദിവസത്തെ സൂര്യമധ്യമം	കുജമധ്യമം	അന്തരകല	ശേഷംകൊണ്ടുകിട്ടിയ അന്തരകലി
രൂപാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരം	5287	1931122—38—39	0	11-29-59-50	10വി.	10വി.
	2825	1031855—46—21	0	0—0—4—0	4ക.	4′
	2462	899266—52—18	0	11-29-55-50	4′—10″	4′—10″
	363	132588—54— 3	0	0—0—8-10	8′—10″	8′—10
	284	103733—27—10	0	11-29-6-53	53′—7″	53′—7″
ശൂന്യാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരം	2811	1931122—38—57	0—0—0—18	0	18″	18″
	1502	1031855—38—43	11—29—52—29	0	7′—31″	7′—31″
	1309	899267— 0—14	0—0—7—49	0	7′—49″	7′—49″
	193	132588—38—29	11—29—44—40	0	15′—20″	15′—21″

ഇവിടെ രൂപാദിയിലും ശൂന്യാദിയിലും അന്തരദിവസങ്ങൾ തങ്ങളിൽ നാഴികകൊണ്ടു മാത്രമേ വ്യത്യാസമുള്ളൂ. ഒരിക്കൽ ചിങ്ങത്തിൽ 7 തിയ്യതി തികയുന്ന പ്രദേശത്തു യോഗമുണ്ടായി എന്നു കല്പിച്ചാൽ ആ സമയത്തിൽനിന്ന് ഈ അന്തരദിവസങ്ങൾ ചെല്ലുന്ന നേരത്തോ അത്ര ദിവസം മുമ്പോ ആസന്നയോഗമുണ്ടാവും. ശേഷം കുജഭഗണശേഷമെങ്കിൽ കുജൻ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തുനിന്നു ഗതം, സൂര്യഭഗണമെങ്കിൽ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിലേയ്ക്കു ഗമ്യം. സൂര്യൻ ഇഷ്ടപ്രദേശത്ത്. ഇങ്ങനെ രൂപാദിക്രിയയിൽ. ശൂന്യാദിയിങ്കൽ കുജൻ ഇഷ്ടപ്രദേശത്ത്. സൂര്യഭഗണശേഷമെങ്കിൽ സൂര്യൻ ഗതം, കുജഭഗണശേഷമെങ്കിൽ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലേയ്ക്കു ഗമ്യം

ഇവിടെ ഒരു ഗ്രഹം ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലും മറേറതു് ആസന്നമായും വരത്തക്കവണ്ണമാണല്ലോ അന്തരദിവസങ്ങളെ വരുത്തിയതു്. അനന്തരം ഒരു ദിവസം രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങൾക്കും യോഗം വരികയും ആ യോഗപ്രദേശം ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിനോടു് ഏററവും അണവുണ്ടാകുകയും ചെയ്യത്തക്കവണ്ണമുള്ള അന്തരദിവസങ്ങളെ വരുത്തുവാനും ആ യോഗപ്രദേശവും ഇഷ്ടപ്രദേശവും തമ്മിലുള്ള അന്തരകലകളെ കാണുവാനുമുള്ള ഉപായത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

ഇഷ്ടദേശസമീപസ്ഥയുതൌ കാലോ യദാ ദ്വയോഃ ।
യോഗേഷ്ടദേശാന്തരഞ്ച ജിജ്ഞാസ്യേത തദാനയോഃ ॥ 54
ഭേദോ ഭഗണയോസ്ത്വല്പഭഗണഞ്ച തയോർമ്മിഥഃ ।
ഹരണാൽ ലബ്ധവല്ലീനാം ശൂന്യാദാവുപസംഹൃതൌ ॥ 55
ലബ്ധാനി ഭൂദിനൈർന്നിഘ്നാന്യാപ്താനി ദിവസാദികാഃ ।
തേ സ്യുർഭഗണഭേദേന കാലാ ജിജ്ഞാസിതാഃ ക്രമാൽ ॥ 56
വല്ലീശേഷാൽ ക്രമാച്ചക്രകലാഘ്നാൽ വിഭജേൽ പുനഃ ।
ദ്വയോർഭഗണഭേദേന കലാ യോഗേഷ്ടദേശയോഃ ॥ 57
അന്തരേ സ്യുർഗ്ഗതൈഷ്യത്വം താസാം ശേഷവശാൽ ഭവേൽ ।

രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങൾക്ക് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിന്നടുത്തുള്ള യോഗത്തിങ്കലെ കാലവും ആ യോഗപ്രദേശവും ഇഷ്ടപ്രദേശവും തമ്മിലുള്ള അന്തരകലയും അറിവാൻ ഇച്ഛിക്കപ്പെടുന്നു. അതിന്നു ഗ്രഹങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും ഭഗണാന്തരത്തേയും അല്പഭഗണത്തേയും തമ്മിൽ അന്യോന്യം ഹരണംചെയ്തു ശൂന്യാദിയായി വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്തുണ്ടായ രാശികളെ ഭൂദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഭഗണാന്തരംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ദിവസാദികൾ മുമ്പിൽ അറിവാൻ ഇച്ഛിക്കപ്പെട്ട

കാലങ്ങളായിട്ടുവരും. പിന്നെ ഫലവല്ലി ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തെ ശേഷങ്ങളെ ക്രമത്താലെ "അനന്തപുരം"കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഭഗണാന്തരംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഉണ്ടായ ഫലങ്ങൾ യോഗത്തിന്റെയും ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിന്റെയും അന്തരത്തിങ്കലെ കലകളായിട്ടു ക്രമേണ വരും. അവററിന്റെ ഗതഗമ്യത്വത്തെ ശേഷവശാൽ അറിഞ്ഞുകൊള്ളണം.

ഇതിന്റെ ഉദാഹരണം:—

സിംഹേ സപ്തമഭാഗസ്യ സമീപേ സ്യാൽ കുജാർക്കയോഃ || 58
യോഗഃ കദാകദാ ബ്രൂഹി കതി ലിപ്താസ്തദന്തരേ ||

ചിങ്ങത്തിൽ ഏഴു തിയ്യതിക്കടുത്തു കുജാർക്കന്മാരുടെ യോഗം ഏതേതു കാലത്തു ഭവിക്കുമെന്നും അവററിന്റെ അന്തരത്തിങ്കൽ എത്ര ഇലികളുണ്ടാകുമെന്നും പറയുക.

ദൃഢാർക്കഭഗണം=135000; ദൃഢകുജഭഗണം=71777
ദൃഢഭഗണാന്തരം=63223; ഭഗണാന്തരം=2028136

71777-നേയും 63223-നേയും അന്യോന്യം ഹരിച്ചുണ്ടായ വല്ലി:—

വല്ലി:	ശൂന്യാദിവല്ല്യുപസംഹാരം:		ശേഷങ്ങൾ
1	0		
7	1		
2	7	7	
1	2	15	
1	1	22	
3	1	37	383
1	3	133	332
6	1	170	51
1	6	1153	26
1	1	1323	25
	1	2476	1

അന്യോന്യഹരണം

7	63223	71777	1
1	3345	8554	2
3	1481	1864	1
6	332	383	1
1	26	51	1
	1	25	

വല്ലീഫലം	അന്തരകാലങ്ങൾ	അല്പദിവസത്തെ സൂര്യമദ്ധ്യമം	അല്പദിവസത്തെ കുജമദ്ധ്യമം	യോഗേഷ്ടപ്രദേശങ്ങളുടെ അന്തരം	ശേഷംകൊണ്ടു കിട്ടിയ അന്തരം
2476	1931122—38—18	11—29—59—39	11—29—59—39	21വി.	20വി.
1323	1031855—55—1	0—0—8—32	0—0—8—32	8′—32″	8′—32″
1153	899266—43—17	11—29—51—7	11—29—51—7	8′—53″	8′—53″
170	132589—11—45	0—0—17—25	0—0—17—25	17′—25″	17′—25″

ഇവിടെ 1-ഉം 26-ഉം ഭഗണാന്തരശേഷങ്ങളാകുന്നു. 25-ഉം 51-ഉം അല്പഭഗണശേഷങ്ങളാകുന്നു. അപ്പോൾ അന്തരശേഷത്തിങ്കൽ ഇഷ്ടപ്രദേശം ഏഷ്യം, അല്പഭഗണശേഷത്തിങ്കൽ ഗതം.

ഈ കുട്ടാകാരത്തെക്കൊണ്ടു ഗ്രഹണദിവസത്തെ അറിവാനു പായം:—

അഭീഷ്ടമദ്ധ്യപർവ്വാന്തേ കൃത്വാ പാതാർക്കമദ്ധ്യമൌ ॥ 59

തദ്വിശ്ലേഷം കലീകൃത്യ ശശിമാസൌഘതാഡിതം ।
ഖഖാഷ്ടപങ്ക്തിഭിർഹൃത്വാ ലബ്ധം ശുദ്ധിഃ പ്രകല്പ്യതാം ॥ 60

പാതശ്ചേൽ ഭാസ്കരാച്ഛുദ്ധഃ ക്ഷേപഃ കല്പ്യോ വിപര്യയേ ।
ദ്വിഘ്നോ ഭഗണയോര്യോഗഃ പാതപാഥോജമിത്രയോഃ ॥ 61

ശശിമാസഗണോ യശ്ച തൌ കൃത്വാ ഭാജ്യഭാജകൌ ।
നിരഗ്രവിധിനാ യാതാൽ ഗുണകാൽ ഭൂദിനാഹതാൽ ॥ 62

മാസൌഘാപ്തം ത്യജേദിഷ്ട മദ്ധ്യപർവ്വാന്തകാലതഃ ।
സ സഞ്ചിന്ത്യോപരാഗസ്യ സമയോ ദിവസാദികഃ ॥ 63

ഏതെങ്കിലും ഒരു ഇഷ്ടമദ്ധ്യപർവ്വാന്തത്തിങ്കലെ സൂര്യന്റേറയും രാഹുവിന്റേറയും മദ്ധ്യമങ്ങാം ഉണ്ടാക്കി അവയെ അന്തരിച്ച ശേഷത്തെ ഇലിയാക്കി യുഗചാന്ദ്രമാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച പതിനായിരത്തി എണ്ണൂററിൽ ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന ഫലത്തെ (ശേഷമാവശ്യമില്ല) കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ ശുദ്ധിയെന്നോ ക്ഷേപമെന്നോ കല്പിക്കുക. സൂര്യനിൽനിന്നു രാഹുവിനെ വാങ്ങി എങ്കിൽ ഈ ഫലം ശുദ്ധിയാകുന്നു. രാഹുവിൽനിന്നു സൂര്യനെ വാങ്ങി എങ്കിൽ അതു ക്ഷേപമാകുന്നു. രാഹുവിന്റേറയും സൂര്യന്റേറയും ഭഗണങ്ങാം തങ്ങളിൽ കൂട്ടി ഇരട്ടിച്ചതു ഭാജ്യമാകുന്നു. ചാന്ദ്രമാസഭഗണം ഭാജകമാകുന്നതു്. ഇവറെറക്കൊണ്ടു നിരഗ്രകുട്ടാകാരം ചെയ്തുവന്ന ഗുണകാരത്തെ ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ചാന്ദ്രമാസഭഗണങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ദിവസാദിയായി വന്ന ഫലത്തെ മുമ്പിലത്തെ അഭീഷ്ടമദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലത്തിങ്കലെ കലിക്കൊട്ടനാളിൽനിന്നു വാങ്ങിയാൽ ശേഷിച്ച ദിവസത്തുന്നാം ഗ്രഹണം നിരൂപിക്കപ്പെടുവാൻ യോഗ്യം.

I. 1117 മിഥുനം 14-ാംനു- ഉദയകലി=1842073

അന്നു മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലത്തിങ്കലെ കലി=1842073—33—29—58

മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലസൂര്യമദ്ധ്യമം=2—12—57—58	}	വെള്ളത്തവാവു ദിവസം
,, രാഹുമദ്ധ്യമം=4—14—10—7		

II. 1117 മിഥുനം 29-ാംനു-

പർവ്വാന്തകാലത്തിങ്കലെ കലി=1842088—14—45—44

മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലസൂര്യമദ്ധ്യമം=2—27—29—17	}	കറുത്തവാവു ദിവസം
,, രാഹുമദ്ധ്യമം=4—13—23—10		

ചന്ദ്രഭഗണം=57753320

സൂര്യഭഗണം=4320000

ചാന്ദ്രമാസങ്ങാം=53433320

രാഹുഭഗണം=232300

ഭാജകം=53433320

ഭാജ്യം=2(4320000 + 232300)=9104600

ദൃഢഭാജകം=1335833

ദൃഢഭാജ്യം=227615

വല്ലീ:
5......591208
1......100737
6......87523
1......13214
1......8239
1......4975
1......3264
1......1711
9......1553
1......158
4......131
1......27
5......23
1......4
3......3
1
0

ഇവിടെ ഭാജകത്തിൽ രൂപം ശേഷിച്ചിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ടു രൂപം ക്ഷേപമാകയാൽ ഫലങ്ങളിൽനിന്നും സൂക്ഷ്മത്തെ വാങ്ങണം.

ഭാജകം ഏറുകകൊണ്ടു 591208 ഗുണകാരമാകുന്നു.

I. രാഹുമദ്ധ്യമം=4–14–10–7

അർക്കമദ്ധ്യമം=2–12–57–58

അർക്കരാഹ്വന്തരം=2–1–12–9=3672 കലി. 9 വികലി.

$$\text{ക്ഷേപം}=\frac{1335833\times 3672'-9''}{10800}=\frac{4905379151}{10800}=454201$$

(ശേഷത്തെ കളഞ്ഞു. ഫലത്തിൽ അല്പാധി കൂട്ടിയിട്ടില്ല. ദൃഢക്ഷേപമുദ്ദിഷ്ടമാകയാൽ ദൃഢഗുണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു)

454201-നെ രൂപക്ഷേപത്തിന്റെ ഗുണകാരമാകുന്ന 591208കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു സ്വതക്ഷണമായ 1335833കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ,

തക്ഷണശേഷം=786814. ഇതു് ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരം.

$$\frac{786814\times 1577917500}{53433320}=23235082\text{ദിവസം. 9നാ. 6വി. 35ഗു.}$$

ഇഷ്ടപര്വ്വാന്തകാലത്തിൽനിന്നു് ഈ ദിവസം വാങ്ങിയാൽ ആ സമയവും പര്വ്വാന്തകാലമാകുന്നു. അപ്പോഴും ഗ്രഹണം ചിന്തിക്കുകയും വേണം.

[ഇക്കാലത്തിങ്കൽ സൂര്യഗതി=63612ഭ. 8രാ. 3തി. 24ഇ. 31വി.

രാഹുഗതി=3420ഭ. 7രാശി. 25തി. 23ഇ. 20വി.

ഗ്രഹണം ചിന്തിക്കേണ്ട സമയത്തു്,

സൂര്യമദ്ധ്യമം=(2–12–57–55)−(18–3–24–31)=6–9–33–27

രാഹുമദ്ധ്യമം=(4–14–10–7)+(7–25–23–20)=0–9–33–27]

അല്പാധികം കൂട്ടി എങ്കിൽ ക്ഷേപം=454202. എന്നാൽ ഇതിനെ 591208 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു തക്ഷണംചെയ്താൽ ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരം=42189

$$\frac{42189\times\text{ഭൂദിനം}}{\text{ചാന്ദ്രമാസഭഗണം}}=1245866\text{ദി. 5നാ. 20വി. 11ഗു.}$$

ഈ അന്തരദിവസത്തിങ്കലും ഗ്രഹണം ചിന്തിക്കണം.

[ഇക്കാലത്തെ സൂര്യഗതി=3410ഭ. 10–29–10–47

" രാഹുഗതി=183ഭ. 4–29–37–4

അപ്പോൾ സൂൎയ്യമദ്ധ്യമം = (2 – 12 – 57 – 58) – (10 – 29 – 10 – 47)

= 3 – 13 – 47 – 11

രാഹുമദ്ധ്യമം = (4 – 14 – 10 – 7) + (4 – 29 – 37 – 4)

= 9 – 13 – 47 – 11]

II. 1117 മിഥുനം 29-ാംനു- കറുത്തവാവു്.

അൎക്കോനരാഹു = 1 – 15 – 53 – 53 = 2753ഇ. 53വി.

$$\frac{\text{ഭഗണചാന്ദ്രമാസസംഖ്യം} \times 2753' - 53''}{10800} = 340622$$

$$\frac{591208 \times 340622}{1335833}$$; ശേഷം = 290793 = ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരം

$$\frac{290793 \times \text{ഭൂദിനം}}{\text{ചാന്ദ്രമാസഗണം}} = 8587289\text{ദി}.\ 2\text{നാ}.\ 48\text{വി}.\ 58\text{ഗു}.$$

[അക്കാലത്തെ സൂൎയ്യഗതി = 23510ഭ. 1 – 26 – 38 – 23

,, രാഹുഗതി = 1264ഭ. 2 – 17 – 27 – 45

ഉദ്ദിഷ്ടപൎവ്വാന്തകാലത്തിലെ സൂൎയ്യമദ്ധ്യമം

= (2 – 27 – 29 – 17) – (1 – 26 – 38 – 23) = 1 – 0 – 50 – 54

രാഹുമദ്ധ്യമം = (2 – 17 – 27 – 45) + (4 – 13 – 23 – 10) = 7 – 0 – 50 – 55]

അനന്തരം ഇവിടെനിന്നു ഗ്രഹണാന്തരങ്ങളെ അറിവാൻ ചൊല്ലുന്നു.

ഇഹോക്തൌ ഭാജ്യഹാരൌ യൌ താഭ്യാം വല്ലീമഥാനയേൽ |
ക്രമാദിവ്യസ്തവിധിനാ ജാതാൻ ഭൂദിനതാഡിതാൻ || 64
മാസൌഘേന വിഭജ്യാപ്താ ദിവസാ ഗ്രഹണാന്തരാഃ |

മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ഭാജ്യഹാരകങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരണം ചെയ്തു വല്ലിയുണ്ടാക്കി ക്രമാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരംകൊണ്ടു ചെയ്തുണ്ടായ രാശികളെ വെവ്വേറെ ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ചാന്ദ്രമാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ വരുന്ന ദിവസങ്ങൾ ഈ രണ്ടു ഗ്രഹണങ്ങളുടെ അന്തരദിവസങ്ങളായിട്ടു വരും.

വല്ലി:	ഫലം	ശേഷം
1		
5		
1	6	29857
6	41	18616
1	47	11241
1	88	7375
1	135	3866
1	223	3509
1	358	357
9	3445	296
1	3803	61
4	18657	52
1	22460	9
5	130957	7
1	153417	2
3	591208	1

ഈ ഫലങ്ങളെ വെവ്വേറെ 1577917500 എന്നതുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു 53433320കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഉണ്ടായ ഫലങ്ങൾ ഗ്രഹണങ്ങളുടെ അന്തരദിവസങ്ങളായിട്ടു വരും. ഈ ശേഷങ്ങളെ 10800കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു 1335833കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഉണ്ടാവുന്ന ഇലിയാദി ഫലങ്ങൾ അൎക്കോനരാഹുവിന്റെ ഭുജകളുടെ അന്തരങ്ങളായിരിക്കും.

	I	II				III	IV				V						VI						VII						VIII			
	ഫലങ്ങൾ	ഗ്രഹണാന്തര ദിവസങ്ങൾ				ശേഷങ്ങൾ	ശേഷങ്ങളിൽ നിന്നു അക്കാന രാഹുവിൻെറ ഭുജാന്തരങ്ങൾ				അന്തരദിവസത്തിങ്കലെ സൂര്യമദ്ധ്യമം						രാഹുമദ്ധ്യമം						മദ്ധ്യമയോഗം						യോഗത്തിങ്കന്ന് അക്കാന രാഹുവിൻെറ ഭുജാന്തരങ്ങൾ			
		ദി.	നാ.	വി.	ഗു.		വി.	ഇ	വി.	ത	രാ.	തി.	ഇ.	വി.	ത.	പ്ര.	രാ.	തി.	ഇ.	വി.	ത	പ്ര.	രാ.	തി.	ഇ.	വി.	പ്ര.		തി	ഇ.	വി.	ത.
1	6	177	11	0	45	29857	4	1	23	18	5	24	37	57	21	55	0	9	23	25	57	24	6	4	1	23	19	19	4	1	23	19
2	41	1210	45	15	11	18616	2	30	30	25	3	23	19	22	9	29	2	4	10	7	24	44	5	27	29	29	34	13	2	30	30	26
3	47	1387	56	15	56	11241	1	30	52	53	9	17	57	19	31	24	2	13	33	33	22	8	0	1	30	52	53	32	1	30	52	54
4	88	2598	41	31	7	7375	0	59	37	32	1	11	16	41	40	53	4	17	43	40	46	52	5	29	0	22	27	45	0	59	37	32
5	135	3986	37	47	3	3866	0	31	15	21	10	29	14	1	12	17	7	1	17	14	9	0	6	0	31	15	21	17	0	31	15	21
6	223	6585	19	18	10	3509	0	28	22	11	0	10	30	42	53	10	11	19	0	54	55	52	11	29	31	37	49	2	0	28	22	11
7	358	10571	57	5	14	357	0	2	53	10	11	9	44	44	5	27	6	20	18	9	4	52	6	0	2	53	10	19	0	2	53	10
8	3445	101732	53	5	15	296	0	2	23	35	6	8	13	19	44	43	11	21	44	16	40	20	5	29	57	36	25	3	0	2	23	35
9	3803	112304	50	10	28	61	0	0	29	35	5	17	58	3	50	10	6	12	2	25	45	12	0	0	0	29	35	22	0	0	22	35
10	18657	550952	13	47	8	52	0	0	25	13	4	20	5	35	5	23	1	9	53	59	41	8	5	29	59	34	46	31	0	0	25	13
11	22460	663257	3	57	37	9	0	0	4	22	10	8	3	38	55	33	7	21	56	25	26	20	6	0	0	4	21	53	0	0	4	22
12	130957	3367237	33	35	11	7	0	0	3	24	8	0	23	49	43	28	3	29	36	6	52	51	11	29	59	56	36	19	0	0	3	24
13	153417	4530494	37	32	48	2	0	0	0	58	6	8	27	28	39	1	11	21	32	32	19	11	6	0	0	0	58	12	0	0	0	58
14	591208	17458721	26	13	36	1	0	0	0	29	2	25	46	15	40	13	3	4	13	43	50	24	5	29	59	59	30	55	0	0	0	29

ഈ പട്ടികകളിൽ I = ഫലങ്ങൾ=ത്രൃപാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരംകൊണ്ടുണ്ടായ ഫലങ്ങൾ. II = ഓരോ ഫലത്തേയും ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ചാന്ദ്രമാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഗ്രഹണാന്തരദിവസങ്ങൾ. III = ശേഷങ്ങൾ—അന്യോന്യഹരണത്തിങ്കലുണ്ടായ ദൃഢശേഷങ്ങൾ. IV. ഓരോ ശേഷത്തേയും 10800കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ദൃഢഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഇലിയാദി ഫലം—അൎക്കാനരാഹുവിൻെറ (അല്ലെങ്കിൽ രാഹുനാൎക്കൻെറ) ഭുജാന്തരം. V. ഗ്രഹണാന്തരദിവസത്തെ സൂൎയ്യഭഗണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഹരിച്ചു ഭഗണം കളഞ്ഞാൽ അക്കാലത്തെ സൂൎയ്യമദ്ധ്യമം ഉണ്ടാകും. V. അതിനെ രാഹുഭഗണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ രാഹു മദ്ധ്യമം. അഥവാ അതതു ഫലത്തെ സൂൎയ്യഭഗണംകൊണ്ടും രാഹുഭഗണംകൊണ്ടും ഗുണിച്ചു ചാന്ദ്രമാസൌഘംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും ക്രമേണ സൂൎയ്യമദ്ധ്യമവും രാഹുമദ്ധ്യമവും ലഭിക്കും. VII. ഈ മദ്ധ്യമങ്ങൾ രണ്ടും കൂട്ടിയാൽ മദ്ധ്യമയോഗം വരും. VIII. ആറുരാശിയിൽനിന്നോ പന്ത്രണ്ടുരാശിയിൽനിന്നോ ഈ യോഗത്തിൻെറ ഏററലോ കുറച്ചിലോ ഭുജാന്തരമാകുന്നു. ഭുജാന്തരാനയനം രണ്ടു വിധത്തിൽ സാധിച്ചിരിക്കുന്നു (IVലും VIIIലും). രണ്ടിലും ഫലങ്ങൾക്കു തുല്യതചമുണ്ട്.

ഏതെങ്കിലും ഒരു വെളുത്തവാവിൻേറയൊ കറുത്തവാവിൻേറയൊ മദ്ധ്യമപൎവ്വാന്തകാലത്തിൽനിന്നു ഗ്രഹണാന്തരദിവസത്തോളം കാലം കിഴെട്ടോ മേല്പോട്ടൊ നിരൂപിക്കുമ്പോൾ അസ്സമയത്തു വെളുത്തവാവിൻേറയൊ കറുത്തവാവിൻേറയൊ മദ്ധ്യമപൎവ്വാന്തകാലമായിട്ടു വരുമെന്നു ക്രിയയുടെ സ്വരൂപത്തിൽനിന്നു മനസ്സിലാകുന്നുണ്ടല്ലൊ. അപ്പോൾ ചന്ദ്രസൂൎയ്യമദ്ധ്യമാന്തരം ആറുരാശിയോ പന്ത്രണ്ടു രാശിയോ ആയിരിക്കും.

ഭാജകശേഷമെങ്കിൽ അൎക്കരാഹുക്കളുടെ മദ്ധ്യമയോഗം 6രാശിയിൽനിന്നോ പന്ത്രണ്ടുരാശിയിൽനിന്നോ ഭുജാന്തരത്തോളം കുറഞ്ഞിരിക്കും. ഭാജ്യശേഷമെങ്കിൽ അത്രകൊണ്ടു ഏറിയുമിരിക്കും. ഭാജകം ചാന്ദ്രമാസൌഘവും ഭാജ്യം ഭൂ-ഗുണിതസൂൎയ്യരാഹുഭഗണയോഗവുമാണെന്നു് ഓൎക്കുമ്പോൾ ഈ ഏററക്കുറച്ചിലിൻെറ യുക്തി വ്യക്തമാകും. ഒരു വാവുദിവസം മദ്ധ്യമപൎവ്വാന്തകാലത്തിൽ രാഹു സൂൎയ്യന്മാരുടെ മദ്ധ്യമാന്തരത്തിൻെറ ഭുജാ പതിമ്മൂന്നു തിയതിയിൽ കുറവാണെങ്കിൽ ഗ്രഹണം ചിന്തിക്കേണമെന്നുണ്ടല്ലോ. ആ ഗ്രഹണപ

വ്പാന്തകാലത്തിൽനിന്നു ഗ്രഹണാന്തരകാലത്തോളം കീഴ്പ്പോട്ടോ മേല്പ്പോട്ടോ നിരൂപിച്ചാൽ അന്നു വാവുതന്നെ ആയിരിക്കും. അപ്പോഴത്തെ രാഹുനസൂര്യന്റെ ഭുജ ആദ്യത്തെ ഭുജയിൽ ഏറിയിട്ടോ കുറഞ്ഞിട്ടോ ഇരിക്കും. ഭുജാന്തരങ്ങൾ കുറവാകയാൽ രണ്ടാമത്തെ ഭുജയും 13 തിഥതിയിൽ മിക്കവാറും കുറഞ്ഞിരിപ്പാൻ ന്യായമുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് അന്നും ഗ്രഹണത്തിനു സംഭാവ്യതയുണ്ട്. വിക്ഷേപാദികളെക്കൊണ്ടു ഗ്രഹണം സംഭവിച്ചില്ല എന്നും വരാം.

മുൻ ഉദാഹരണത്തിൽ 1117 മിഥുനം 14-ാംനു- 33നാ. 29വി. 58ഗ്ര. സമയത്തു (കലി 1842078—33—29—58) വെളുത്തവാവിന്റെ മദ്ധ്യമപര്വ്പാന്തകാലമാണെന്നും അതിൽനിന്നും 23235082 9നാ. 6വി. 35ഗ്ര. വാങ്ങിയാൽ ആ സമയത്തു സൂര്യനും കേതുവിനും യോഗമുണ്ടെന്നും അപ്പോൾ ഗ്രഹണം ഊഹിക്കുവാൻ ന്യായമുണ്ടെന്നും കണ്ടുവല്ലോ. ആ ദിവസത്തേയും ഗ്രഹണാന്തരദിവസങ്ങളേയും അപേക്ഷിച്ച നമ്മുടെ കാലത്തിനടുത്തു സൂര്യനു രാഹുവിനോടൊ കേതുവിനോടൊ കരാസന്നയോഗമുള്ള ദിവസം വരുത്തി അന്നു ഗ്രഹണമുണ്ടായോ എന്നു ചിന്തിക്കാം. ഇവിടത്തെ ക്രിയ:— ഈ ദിവസത്തിൽനിന്നു എല്ലാററിലും വലിയ ഗ്രഹണാന്തരദിവസത്തെ എത്ര തവണ വാങ്ങാമൊ അത്രയും വാങ്ങുക. ഈ ശേഷത്തിങ്കൽനിന്നു പിന്നത്തെ ഗ്രഹണാന്തരദിവസത്തെ അതുപോലെത്തന്നെ വാങ്ങുക. ഇങ്ങനെ ഏതാണ്ട് ഉദ്ദിഷ്ടകാലം വരുവോളം ക്രിയ ചെയ്യുക. കടക്കത്തെ ശേഷത്തെ മുമ്പിലത്തെ കലികൊട്ടനാളിൽനിന്നും വാങ്ങുക. അന്നു ഗ്രഹണമുണ്ടാകുവാൻ സംഗതിയുണ്ട്.

	23235082— 9— 6—35
(14)×1	17458721—26—13—36
	5776360—42—52—59
(13)×1	4530494—37—32—48
	1245866— 5—20—11
(11)×1	663257— 3—57—37
	582609— 1—22—34
(10)×1	550952—13 47— 8
	31656—47—35—26
(7)×2	21143—54—10—28
	10512—53—24—58
(6)×1	6585—19—18—10
	3927—34— 6—48
(4)×1	2598—41—31— 7
	1328—52—35—41
(2)×1	1210—45—15—11
	118— 7—20—30

[(14), (13), (11) ഇത്യാദി സംഖ്യകൾ മുൻകൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ ഗ്രഹണാന്തരദിവസങ്ങളുടെ ക്രമത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നവയാകുന്നു.]

1117 മിഥുനം 14-ാംനു- പച്ഛാന്തകാലത്തിലെ കലി=1842073—33—29—58

118—7—20—30

1841955—26—9—28

അതായതു 1117 കുംഭം 19-ാംനു-. അന്നു സോമഗ്രഹണമുണ്ടായി

1117 കുംഭം 19-ാംനു- മദ്ധ്യമപച്ഛാന്തകാലത്തിങ്കൽ (അതായതു 26നാ. 9വി. 28ഘ. എന്ന സമയത്തു്.)

സൂര്യമദ്ധ്യമം=	10—16—32—41	ഇവ ധ്രുവാനയനപ്രകാരം വരുത്തിയവ.
ചന്ദ്രമദ്ധ്യമം=	4—16—32—40	
രാഹുമദ്ധ്യമം=	4—20—25—44	
അർക്കോനരാഹുവിന്റെ ഭുജ=	0—3—53—3	

ഈ സൂര്യരാഹുമദ്ധ്യമങ്ങളേയും അർക്കോനരാഹുവിന്റെ ഭുജയേയും മറ്റൊരുപ്രകാരം വരുത്താം. മുമ്പിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടികയനുസരിച്ച് 23235082—9—6—35 എന്നതിൽ ഏതെല്ലാം ദിവസങ്ങളെയാണു് വാങ്ങിയതു് അദ്ദിവസങ്ങളിൽ സൂര്യന്റെയും രാഹുവിന്റെയും മദ്ധ്യമങ്ങളെ വെവ്വേറെ കൂട്ടി, 1117 മിഥുനം 14-ാംനു- 33നാ. 29വി. 58ഘ. എന്ന സമയത്തിൽനിന്നു്, 23235082—9—6—35 എന്ന ദിവസം വാങ്ങിയ സമയത്തെ അർക്കരാഹുമദ്ധ്യമങ്ങളായ 6—9—33—27, 0—9—33—27 എന്നിവയിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ 1117 കുംഭം 19-ാംനു- മദ്ധ്യമപച്ഛാന്തകാലത്തിങ്കലേയ്ക്കു് ഉണ്ടാക്കിയ മദ്ധ്യമങ്ങൾ തന്നെ വരും. അതുപോലെതന്നെ അദ്ദിവസങ്ങളിലെ ഭുജാന്തരങ്ങളെ വേണ്ടവിധം യോഗവിയോഗം ചെയ്തുണ്ടായ ഫലം അർക്കോനരാഹുവിന്റെ ഭുജയായിട്ടു വരും. ഓജകശേഷത്തിൽനിന്നുണ്ടായ ഭുജാന്തരത്തേയും യുഗ്മശേഷത്തിൽനിന്നുണ്ടായതിനേയും വിപരീതചിഹ്നകളായിട്ടു കണക്കാക്കണം.

വാങ്ങിയ ഗ്രഹണാന്തരദിവസങ്ങളും എത്ര ആവൃത്തി വാങ്ങി എന്നും	സൂര്യമദ്ധ്യമം	രാഹുമദ്ധ്യമം
(14)×1	2—25—46—15—40—31	3—4—13—48—50—24
(13)×1	6—8—27—28—39—1	11—21—32—32—19—11
(11)×1	10—8—3—38—55—33	7—21—56—25—26—20
(10)×1	4—20—5—35—5—23	1—9—53—59—41—8
(7)×2	10—19—29—28—10—54	1—10—36—18—9—44
(6)×1	0—10—30—42—53—10	11—19—0—54—55—52
(4)×1	1—11—16—41—40—53	4—17—43—40—46—52
(2)×1	3—23—19—22—9—29	2—4—10—7—24—44
	4—6—59—13—14—54	7—19—7—42—34—15

1117 കുംഭം 19-ാംനു- പച്ഛാന്തകാലത്തിങ്കലെ

സൂര്യമദ്ധ്യമം=(6—9—33—27)×(4—6—59—13)=10—16—32—40

രാഹുമദ്ധ്യമം=(0—9—33—27)−(7—19—7—43)= 4—20—25—44

ഭാജകശേഷത്തിങ്കലെ അന്തരം

	തി.	ഇ.	വി.	ത.
1×(14)...	0	0	0	29
1×(10)...	0	0	25	13
1× (6)...	0	28	22	11
1× (4)...	0	59	37	32
1× (2)...	2	30	30	25
	3	58	55	50
	0	5	51	40
അന്തരം=	3	53	4	10

ഭാജ്യശേഷത്തിങ്കലെ അന്തരം

	തി.	ഇ.	വി.	ത.
1×(13)...	0	0	0	58
1×(11)...	0	0	4	22
2× (7)...	0	5	46	20
	0	5	51	40

അപ്പോൾ അർക്കാനരാഹുവിന്റെ ഭുജ =3തി. 53ഇ. 4വി.

1245866–5–20–11 എന്ന ദിവസത്തിൽനിന്നും 1×(11), 1×(10), 2×(7), (1)×(6), 1×(4), 1×(2) എന്ന ദിവസാന്തരങ്ങളെ വാങ്ങിയാലും 118–7–20–30 ദിവസം എന്നു കിട്ടും. അതായതു് 1841955–26–9–28 എന്ന കലിക്കൊട്ടു നാൾതന്നെ (1117 കുംഭം 19-ാംനു-) അന്നു സോമഗ്രഹണമുണ്ടായിരുന്നുവെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞുവല്ലോ. കുംഭം 19-ാംനു- പർവ്വാന്തകാലത്തിലെ കലിയിൽനിന്നു 1×(1) അതായതു 177ദി. 11–0–45 എന്ന ദിവസാന്തരം മറിക്കൽ വാങ്ങിയാൽ 1841778–15–18–48 എന്നു് (1117 ചിങ്ങം 20-ാംനു-). 1117 ചിങ്ങം 19-ാംനു- 58നാ. 38വി ക്കു സ്ഫുടപർവ്വാന്തകാലമായിട്ടു് ഒരു സോമഗ്രഹണമുണ്ടായിട്ടുണ്ടു്. സോമഗ്രഹണത്തിന്റെ മദ്ധ്യകാലം സ്ഫുടപർവ്വാന്തകാലമാകുന്നു. ഇവിടെ മദ്ധ്യപർവ്വാന്തകാലമാണു ഗണിച്ചുണ്ടാക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതു്.

II. 1117 മിഥുനം 29-ാംനു- കറുത്തവാവു്. ഇതിന്റെ മദ്ധ്യപർവ്വാന്തകാലത്തിങ്കനു കുട്ടാകാരക്രിയകൊണ്ടു മുമ്പിലുണ്ടാക്കിയ ദിവസം 8587289–2–48–58. 1×(13) 1×(12), 1×(9), 7×(7), 1×(4), 3×(1) ഈ ദിവസാന്തരങ്ങളുടെ യോഗം ഇതിൽനിന്നു വാങ്ങുകയാണെങ്കിൽ 118ദി. 7–20–31 എന്നു കിട്ടും. 1117 മിഥുനം 29-ാംനു- മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലമായ 1842088–14–45–44ൽ നിന്നു 118–7–20–31 എന്നതു വാങ്ങിയാൽ 1841970–7–24–13 (1117 മീനം 4-ാംനു-). അന്നു സ്ഫുടപർവ്വാന്തകാലം സൂര്യോദയത്തിനു മുമ്പാകയാൽ സൂര്യഗ്രഹണം സംഭവിച്ചില്ല. ഈ 1841970–7–24–13ൽ നിന്നു് ആദ്യത്തെ ദിവസാന്തരമായ 177ദി. 11–0–43 വാങ്ങിയാൽ 1841792–56–23–30 എന്നു്. (117 കന്നി 4-ാംനു- 56നാ 23വി 30ഗു ചെന്നസമയം). കന്നി 5-ാംനു- സൂര്യഗ്രഹണമുണ്ടായി. ഇങ്ങനെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടു പല ഗ്രഹണങ്ങളും മേല്പോട്ടും കീഴ്പോട്ടും ഉണ്ടാക്കാം.

ഈ കുട്ടാകാരന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള യോഗങ്ങളുടെ അന്തരദിവസങ്ങളെക്കൊണ്ടു് അവയുടെ ആസന്നയോഗദിവസങ്ങളേയും വരുത്താം. വാക്യദ്ധ്രുവം ഉണ്ടാക്കുവാൻ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന "വിവിധം നിജ വത്സരോധം......" ഇത്യാദിക്രിയ ഈ ന്യായത്തെ അനുസരിച്ചിട്ടുള്ളതാകുന്നു.

On the Genesis of the Mathematical Problems designated as 'Kuttākāram' in Hindu Mathematics and its bearing on 'The Rule of Three' 'Indeterminate Equations' and 'Continued Fractions' of Modern Mathematics.

This kind of problem arises chiefly in connection with the determination of the mean anomaly of a planet at a given instant when it is known that in a certain *integral* number of days, the planet makes a certain number of complete revolutions. For example, the Sun completes 576 revolutions in a period of 210389 days. To find the mean anomaly M of the Sun on the completion of x days from an epoch, we have to apply *The Rule of Three* as follows:—

$$210389 : 576 :: x : M.$$

$$\therefore \quad M=\frac{576\,x}{210389}.$$

The result may not always be an integer. Hence, suppose the integral part of the quotient is y and the remainder C. Then,

$$M=y+\frac{C}{210389}.$$

This gives rise to the relation,

$$210389 : 576 :: x : y+\frac{C}{210389}.$$

$$\therefore \quad 210389\left(y+\frac{C}{210389}\right)=576x$$

$$\textit{i.e.}\ 210389\,y+C=576x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \text{I}$$

Now, in finding the mean anomaly M, the integral part y is not important and is therefore neglected. It is only the remainder C shown above which gives the mean position of the planet. Thus in equation (I), if x is given, y and C are determinable.

Conversely, there arises the problem of determining the integral value of x for a given integral value of C (less than 576), and incidentally the corresponding integral value of y.

This converse problem of determining the least integral values of x and y for a given value of C (less than 576) has been styled as Kuttākāram by ancient Hindu mathematicians.

The problem in "Kuttākāram" can therefore be enunciated thus:— The 1st and 2nd term of a proportion being known, find an integral 3rd term such that the fractional part of the 4th term may be one having for its numerator a given number (less than the 2nd term) and for its denominator the 1st term. In other words, the remainder after dividing

the product of the 2nd and 3rd terms by the 1st term shall be a given number (less than the 2nd term). [*Note: In the example given above, the 1st term is supposed to be greater than the 2nd term*]. It is clear therefore that Kuttākāram is a direct descendant of "The Rule of Three".

When put into algebraic form, the problem takes the following shape: A, B & C are three integers C being less than A & B. Find the least integral multiplier x of B, such that when C is added to or subtracted from the product Bx, the sum or remainder respectively shall be exactly divisible by A, thus giving incidentally an integral quotient y.

i.e. $\frac{Bx \pm C}{A} = y$ (an integer)

i.e. $Bx \pm C = Ay$

For easy comprehension, let us first consider the case where C has to be subtracted. Then the case where C has to be added can be easily deduced from the first.

Let the integers x_1 and y_1 satisfy the equation,

$$Bx - C = Ay$$

Then $Bx_1 - C = Ay_1$ ... ... (1)

$AB = AB.$ ... ... (2)

(2)−(1) gives, $B(A - x_1) + C = A(B - y_1)$.

Therefore, the values $(A - x_1)$ and $(B - y_1)$ of x & y respectively would satisfy the equation,

$$Bx + C = Ay.$$

The problem, now, is to find the least integral value of x such that

$$\frac{Bx - C}{A} = y \text{ (an integer).}$$

i.e. $Bx - Ay = C$ II

Now, (II) is called an 'Indeterminate Equation' with the condition that x & y should be determined as integers. The equation admits of an infinite number of solutions; but as a problem in Kuttākāram only the least integral values of x and y are called for. The value of x would be less than A and that of y less than B. These solutions therefore are *unique*.

It is obvious now, that if A & B have a common factor h so that $A = ah$ and $B = bh$, where a and b are integers, then equation II becomes

$bhx - ahy = C$

i.e. $h(bx - ay) = C$

$\therefore \frac{C}{h} = (bx - ay) = \text{an integer} = c$

So, the problem $Bx - Ay = C$ would be insolvable if the given value of C is not also divisible by the H. C. F of A & B (if they have one). Hence, when equation II is reduced by dividing by the H. C. F of A & B, we get

$$bx-ay=c \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{III}$$

where a and b are prime to each other.

It is not essential that a should be divisible by the common factor of b & c or b by that of a and c for a solution to equation III.

For, let b and c have a common factor f, such that

$b=b_1 f$ and $c=c_1 f$. Then eqn. III becomes

$b_1 f x-ay=c_1 f$.

i.e. $ay=f(b_1 x-c_1)$

$\frac{ay}{f}=(b_1 x-c_1)$=an integer.

For this, it is enough if y instead of a is divisible by f. Similarly it can be shown that if a and c have a common factor, it is enough if x instead of b is divisible by that factor. Thus equation III is always solvable except in the case where the given value of c is not divisible by the H. C F (if any) of A and B.

The foregoing discussion thus shows, the intimate connection between 'Kuttākāram', 'Rule of Three' and the 'Indeterminate Equations'.

Now, for the actual process involved in seeking the required values of x & y to satisfy the equation, $bx-ay=c$ where a and b are prime to each other. The process is explained in the tabular form given below.

Case I. $a > b$.

Step No.	Operation done	Result obtained	
		Quotient	Remainder
1	a is divided by b	q_1	$R_1=a-bq_1$
2	b .. R_1	q_2	$R_2=b-R_1 q_2$
3	R_1 .. R_2	q_3	$R_3=R_1-R_2 q_3$
4	R_2 .. R_3	q_4	$R_4=R_2-R_3 q_4$
5	..	..	..

and so on

It is obvious that R_1, R_2, R_3......will be in descending order of magnitude. Continue thus to get an *even* number of remainders, such that the last two are small enough to enable you to guess easily an integer m to satisfy the relation

$R_{2n}\times m-c=R_{2n-1}\, q$. ($q$ also being an integer).

For instance if division is carried up to say the 4th remainder R_4, and at that stage you are able to guess easily a value for m such that

$R_4\times m-c=R_3\, q$.

From the values m and q the values of x and y can be easily obtained.

[*Note: There are several variations and these are dealt with later on.*]

The detailed process will appear as follows:—

$b)\ \underline{a}\ (q_1$
$\quad R_1)\ \underline{b}\ (q_2$
$\qquad R_2)\ \underline{R_1}\ (q_3$
$\qquad\quad R_3)\ R_2\ (q_4$
$\qquad\qquad R_4$

Column I	II	III
a	q_1	$Q_2\ q_1 + Q_3 = Q_1$
b	q_2	$Q_3\ q_2 + Q_4 = Q_2$
R_1	q_3	$Q_4\ q_3 + m = Q_3$
R_2	q_4	$m\ q_4 + q = Q_4$
R_3	m	... ... m
R_4	q	... ... q

Column I consists of the elements a, b, R_1, R_2...in order downwards.
... II " " q_1, q_2,...and m & q " "

The number of elements is the same in columns I & II.

... III is obtained from column II operating upwards as indicated above.

Then it will be seen, that $b\ Q_1 - c = a\ Q_2$, so that a value of x is Q_1 and the corresponding value of y is Q_2.

If $Q_1 > a$, then divide it by a and take the resulting remainder Q_1' as the required least value of x. In that case Q_2 will also be greater than b. Divide Q_2 also by b and take the resulting remainder Q_2' as the value of y. Care should be taken to see that the same multiple of b is subtracted from Q_2 as the multiple of a is subtracted from Q_1.

Case II $a < b$.

From the order of the remainders as shown above it is clear that the greater of the two numbers a and b is the source from which the *odd order* remainders are produced; Similarly the smaller of the two numbers is that of all the *even order* remainders. So, whenever $a < b$, R_{2n} is a remainder of the divisor a. The *eqn.* $bx - ay = c$, reduces to the form $\frac{ay+c}{b} = x$. So, the value m guessed should be such that it satisfies the relation

$$R_{2n} \times m + c = R_{2n-1}\ q.$$

i.e. if 4 remainders are obtained, then

$$R_4\ m + c = R_3\ q.$$

The rest of the process is as in case I.

Now for the rationale of this process of finding the least values of x and y.

If $\frac{b}{a}$ (where $a > b$) is expressed as a continued fraction it will take the form

$$\frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\frac{1}{q_3+}\frac{1}{q_4+}\frac{R_4}{R_3}.$$

Now, if m and q are known such that

$$R_4\,m-c=R_3\,q \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

Then since $R_4=R_2-R_3\,q_4 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

We have from (1) & (2), $(R_2-R_3\,q_4)\,m-c=R_3\,q.$

$$i.e. \quad m\,R_2-c=R_3\,(mq_4+q)$$

But $mq_4+q=Q_4$.

$$\therefore \quad m\,R_2-c=R_3\,Q_4 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

Again, $R_3=R_1-R_2\,q_3 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

$\therefore$ from (3) & (4), $m\,R_2-c=(R_1-R_2\,q_3)\,Q_4$

$$i.e. \quad R_1\,Q_4+c=R_2\,(m+q_3\,Q_4)$$
$$=R_2\,Q_3$$
$$\therefore \quad R_2\,Q_3-c=R_1\,Q_4 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

Substituting in (5), the value $R_2=b-R_1\,q_2$,

$$Q_3\,(b-R_1\,q_2)-c=R_1\,Q_4.$$
$$i.e. \quad b\,Q_3-c=R_1\,(q_2\,Q_3+Q_4)$$
$$=R_1\,Q_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

Substituting in (6) the value $R_1=a-bq_1$,

$$b\,Q_3-c=(a-bq_1)\,Q_2$$
$$i.e. \quad a\,Q_2+c=b\,(q_1\,Q_2+Q_3)$$
$$=b\,Q_1.$$
$$\therefore \quad b\,Q_1-c=a\,Q_2. \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

It is thus proved that if m and q satisfy the relation

$$m\,R_4-C=R_3\,q,$$

then, m and Q_4 satisfy relation (3)

Hence, Q_3 and Q_4 „ „ (5)

Q_3 and Q_2 „ „ (6)

and finally Q_1 and Q_2 „ „ (7)

Considering the table of division on page XLIII, in another way, we have from the relation shown in the last column, $a-bq_1=R_1$,

i.e. $bx_1-ay_1=-R_1$ ... (1) where $x_1=q_1$, and $y_1=1$.

Now, $b-R_1\,q_2=R_2$

i.e. $b+(bx_1-ay_1)\,q_2=R_2$.

i.e. $b\,(q_2x_1+1)-aq_2=R_2$ (note $y_1=1$)

i.e. $bx_2-ay_2=R_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$ where

$$x_2=q_2\,x_1+1 \text{ and } y_2=q_2.$$

Again, $R_2 q_3 - R_1 = -R_3$

Substituting the value of R_2 obtained in (2) and R_1 as obtained in (1)

$$(bx_2 - ay_2) q_3 + (bx_1 - ay_1) = -R_3.$$

i.e. $\quad b(q_3 x_2 + x_1) - a(q_3 y_2 + y_1) = -R_3$

i.e. $\quad bx_3 - ay_3 \quad ... = -R_3 \quad ... \quad$ (3)

where, $x_3 = q_3 x_2 + x_1$ and $y_3 = q_3 y_2 + y_1$.

Again, $R_2 - R_3 q_4 = R_4$

i.e. $\quad (bx_2 - ay_2) + q_4 (bx_3 - ay_3) = R_4.$

i.e. $\quad b(q_4 x_3 + x_2) - a(q_4 y_3 + y_2) = R_4.$

i.e. $\quad bx_4 - ay_4 = R_4 \quad ... \quad ... \quad$ (4)

where $x_4 = q_4 x_3 + x_2$ and $y_4 = q_4 y_3 + y_2$

and so on.

In general $\quad bx_{2n} - ay_{2n} = R_{2n} \quad ... \quad ... \quad$ (5)

where, $x_{2n} = q_{2n} x_{2n-1} + x_{2n-2}$ and

$y_{2n} = q_{2n} y_{2n-1} + y_{2n-2}$.

Since the remainders get successively smaller and smaller, it would be possible to guess easily at some stage, such as R_3 and R_4 a value of m so that $\dfrac{R_4 m \mp c}{R_3} = q$ (an integer) according as $a > b$ or $< b$.

Thus if $m R_4 - c = q R_3$, we have from (3) & (4)

$$m(bx_4 - ay_4) - c = q(ay_3 - bx_3)$$

i.e. $\quad b(mx_4 + qx_3) - c = a(my_4 + qy_3) \quad ... \quad$ (6)

It now remains to show that

$mx_4 + qx_3 = Q_1$ and $my_4 + qy_3 = Q_2$ — Q_1 and Q_2 are obtained by the process shown in page xLiv.

A short process of getting the successive numbers $x_1, x_2, x_3, ...$ and $y_1, y_2, y_3 ...$ arranged in two columns side by side is shown below in tabular form.

I	II Values of x to multiply 'b'	III	IV Values of 'y' to multiply 'a'	V Equations giving the value of c
1	$1 = 1$	0	0	$b \times 1 - a \times 0 = b$
q_1	$q_1 = x_1$	1	$1 = y_1$	$bx_1 - ay_1 = -R_1$
q_2	$x_1 q_2 + 1 = x_2$	q_2	$y_1 q_2 = y_2 \ (= q_2)$	$bx_2 - ay_2 = R_2$
q_3	$x_2 q_3 + x_1 = x_3$	q_3	$y_2 q_3 + y_1 = y_3$	$bx_3 - ay_3 = -R_3$
q_4	$x_3 q_4 + x_2 = x_4$	q_4	$y_3 q_4 + y_2 = y_4$	$bx_4 - ay_4 = R_4$

(Table—3)

Column I consists of the number 1 and the successive quotients q_1, q_2...arranged downwards.

Column II: Obtained from I by operations downwards as indicated therein.

" III: Consists of 0, 1, and the successive quotients (omitting q_1,) arranged downwards.

" IV: is Obtained from III by operations downwards as indicated.

" V: Equations giving the value of c.

Now, $mx_4+qx_3=m(q_4 x_3+x_2)+q(q_3 x_2+q_1)$

$$=m\{q_4(x_2 q_3+q_1)+q_1 q_2+1\}+q\{q_3(q_1 q_2+1)+q_1\}$$
$$=m\{q_4[q_3(q_1 q_2+1)+q_1]+q_1 q_2+1\}+q(q_3 q_2 q_1+q_3+q_1)$$
$$=m\{q_1 q_2 q_3 q_4+q_4 q_3+q_4 q_1+q_1 q_2+1\}+qq_1 q_2 q_3+qq_3+qq_1.$$

Also, from page xLiv

$$Q_1=q_1 Q_2+Q_3.$$
$$=q_1(q_2 Q_3+Q_4)+Q_3$$
$$=q_1\{q_2(q_3 Q_4+m)+Q_4\}+q_3 Q_4+m.$$
$$=q_1\{q_2[q_3(q_4 m+q)+m]+(q_4 m+q)\}+q_3(q_4 m+q)+m$$
$$=q_1\{q_2 q_3 q_4 m+q_2 q_3 q+q_2 m+q_4 m+q\}+q_3 q_4 m+q_3 q+m$$
$$=m(q_1 q_2 q_3 q_4+q_1 q_2+q_1 q_4+q_3 q_4+1)+qq_1 q_2 q_3+qq_1+qq_3.$$

This shows that

$mx_4+qx_3 \equiv Q_1$. So, the values of x & y obtained by either of the foregoing processes will be the same.

It has already been shown that if $a > b$, $\frac{b}{a}$ when expressed as a continued fraction, will take the form, $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\frac{1}{q_4}+\ldots\ldots$

Now the part $\frac{1}{q_1}$ is called the 1st *convergent* $=\frac{y_1}{x_1}$

2nd convergent $=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=\frac{q_2}{q_1 q_2+1}=\frac{y_2}{x_2}$

3rd " $=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{q_3}{q_2 q_3+1}}$

$$=\frac{q_2 q_3+1}{q_1(q_2 q_3+1)+q_3}$$

$$=\frac{q_3 y_2+y_1}{q_3 x_2+x_1}=\frac{y_3}{x_3}$$

Similarly $\frac{y_4}{x_4}=\frac{q_4 y_3+y_2}{q_4 x_3+x_2}$

Thus by induction, $\frac{y_n}{x_n}=\frac{q_n y_{n-1}+y_{n-2}}{q_n x_{n-1}+x_{n-2}}$

It may now be observed that the values y_1, y_2, y_3......obtained on page XLVI are the same as the numerators of the successive convergents. Likewise, the values x_1, x_2, x_3......also tally with the denominators of the successive convergents.

Again, if $\frac{b}{a}$ is a proper fraction which is converted into a continued fraction of the form $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}$.......... and the successive convergents are $\frac{y_1}{x_1}, \frac{y_2}{x_2}, \frac{y_3}{x_3}$ ...... etc.

$$\frac{b}{a} - \frac{y_1}{x_1} = \frac{b}{a} - \frac{1}{q_1} = \frac{bq_1 - a}{aq_1} = -\frac{R_1}{aq_1} \quad \text{(Column V, Page XLVI)}$$

$$\frac{b}{a} - \frac{y_2}{x_2} = \frac{bx_2 - ay_2}{ax_2} = \frac{R_2}{ax_2} \quad \text{"}$$

$$\frac{b}{a} - \frac{y_3}{x_3} = \frac{bx_3 - ay_3}{ax_3} = -\frac{R_3}{ax_3},$$

$$\frac{b}{a} - \frac{y_4}{x_4} = \frac{bx_4 - ay_4}{ax_4} = \frac{R_4}{ax_4}$$

Thus we see that the successive convergents are alternately greater and less than the real fraction, the difference getting less and less with the successive convergents. The last convergent is of course equal to the fraction itself.

From the above equations it can also be deduced that

$$\frac{b}{a} - \frac{y_n}{x_n} = (-1)^n . \frac{R_n}{ax_n}.$$

Hence $$\frac{b}{a} = \frac{y_n}{x_n} + (-1)^n . \frac{R_n}{ax_n}.$$

Hence to multiply any number T by $\frac{b}{a}$, when both b and a are big numbers, it is enough if T is multiplied by any convergent $\frac{y_n}{x_n}$ of $\frac{b}{a}$ and then a correction applied to the result as shown by the formula

$$T \times \frac{b}{a} = T \times \frac{y_n}{x_n} + (-1)^n . \frac{T}{\left(\frac{ax_n}{R_n}\right)}$$

(In cases where $T > a$, reduce T to $(T - Ka)$ where Ka is the highest multiple of a which can be subtracted from T.)

The practical application of this formula occurs in finding the mean position of a planet. Suppose it is known that in a given number of days, say 210389, the sun performs 576 complete revolutions, and the position in T days is required. For this we have to multiply T by 576 and divide the product by 210389.

Now, if 576/210389 is to be converted into a continued fraction we have to find the successive quotients of mutual division, thus:—

Suppose 4 quotients are found and then the remainder is 9. Then the continued fraction $= \frac{1}{365+} \frac{1}{3+} \frac{1}{1+} \frac{1}{6+} \frac{9}{20}$

3	576	210389	365
6	129	149	1
	2	20	

To find the 4th convergent.

$$\begin{array}{ll} 365 & =27\times365+7=9862 \\ 3 & 3\times7+6=27 \\ 1 & 1\times6+1=7 \\ 6 & \\ 1 & \end{array}$$

Hence the 4th convergent is $\frac{27}{9862}$ and the corresponding remainder is $+9$

$$\text{Hence } \frac{576}{210389}-\frac{27}{9862}=\frac{9}{210389\times9862}$$

$$\therefore \frac{576\text{T}}{210389}=\frac{27\text{ T}}{9862}+\frac{9\text{ T}}{210389\times9862}$$

The integral part of 27 T/9862 being the number of complete revolutions can be neglected and the fractional part alone retained to find the mean position. This fractional part can be converted into *signs, degrees and minutes*. The correction in *minutes* to the fractional part is

$$\frac{9\text{ T}\times21600}{210389\times9862}$$

$$\text{Now, } \frac{210389\times9862}{9\times21600}=10673+\frac{25118}{9\times21600}$$

$$\text{Hence, } \frac{9\text{ T}\times21600}{210389\times9862}=\frac{\text{T}}{10673+\frac{25118}{9\times21600}}$$

$$\text{But, since } \frac{b}{a+x}=\frac{b}{a}-\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{(a+x)},$$

$$\frac{\text{T}}{10673+\frac{25118}{9\times21600}}=\frac{\text{T}}{10673}-\frac{\text{T}}{10673}\times\frac{\frac{25118}{9\times21600}}{10673+\frac{25118}{9\times21600}}$$

$$=\frac{\text{T}}{10673}-\frac{\text{T}}{10673}\times\frac{25118}{9\times21600\times10673+25118}$$

$$=\frac{\text{T}}{10673}-\frac{\text{T}}{10673}\times\frac{1}{\frac{210389\times9862}{25118}}$$

$$=\frac{\text{T}}{10673}-\frac{\text{T}}{881636336}$$

Here, both these are obtained as *minutes*.

The above discussion has indicated to some extent the intimate relation between 'Kuttākāram', 'Rule of Three', 'Indeterminate Equations', and 'Continued Fractions'. We thus derive the following rule for finding the values of x and y, so that $bx-ay=c$ where a, b and c are integers and x and y are also integers.

First convert $\frac{b}{a}$ into the form of a continued fraction, taking an even number of quotients and the corresponding remainders in the division. From the last pair of remainders guess the values m and q such that

$$R_{2n}\times m-c=R_{2n-1}\times q$$

Then find the last convergent of the continued fraction

$$\frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\frac{1}{q_3+}\frac{1}{q_4}\cdots\cdots+\frac{1}{m+}\frac{1}{b}$$

The numerator of this convergent will be a value of y and the denominator the corresponding value of x. If the values of y and x thus found are greater than b and a respectively, subtract from them equal multiples of b and a and take the remainders y' and x' as the values of y and x.

The process of reducing the values of x and y to the lowest is known as "Takshanam" which is explained later. That x' and y' satisfy the equation can be seen easily.

Let $x > a$ and $=(x'+Ka)$ K being an integer

and $y > b$ and $=(y'+Kb)$

Then, $bx-ay=c$, becomes

$$b\,(x'+Ka)-a\,(y'+Kb)=c$$

$$i.e.\quad bx'-ay'=c$$

The operations which are done in a simplified form are known as "Valliyupasamhāram". Viz. the operations shown in column III, page xLiv and column II and IV page xLvi, according to the aim in view.

Some variations in guessing the values 'm' and 'q'

I. c is to be added to bx, *i.e.* $bx-ay=-c$:—

m and q should satisfy the relation,

$$R_{2n}\times m+c=R_{2n-1}\times q.$$

II. An odd order of remainder is taken :—

m and q should satisfy

$R_{2n+1}\times m+c=R_{2n}\times q$ if c is to be subtracted from bx

and $R_{2n+1}\times m-c=R_{2n}\times q$,, c ,, added to bx.

III. Sometimes it may so happen, that it is not possible to guess easily m & q. Then continue mutual division till the remainder is 1. Then $m=c$ and $q=0$.

(*a*) If unit is a remainder of the divisor a, and c is negative, or if unit is a remainder of the multiplier b of x, and c is positive, the values of x and y obtained should be subtracted from a & b respectively.

(*b*) Consider c to be unity; find the values of x and y as described above taking into consideration the sign of c. Then multiply the values so obtained by the actual value of c. These will be values of x & y. If they exceed a and b reduce them to their lowest value by subtracting equal multiples of a and b.

IV. In case $b > a$, the above rules have to be reversed.

Some interesting relations:—(dealt with in Yuktibhasa)

The following tabular arrangements of all the foregoing results is a good device of getting some interesting relations in quite a mechanical manner.

I	II	III
a	q_1	$Q_2\, q_1 + Q_3 = Q_1$
b	q_2	$Q_3\, q_2 + Q_4 = Q_2$
R_1	q_3	$Q_4\, q_3 + m = Q_3$
R_2	q_4	$m\, q_4 + q = Q_4$
R_3	m	m
R_4	q	q

I	III
a	Q_1
b	Q_2
R_1	Q_3
R_2	Q_4
R_3	m
R_4	q

$m\, R_4 - q\, R_3 = c$ ... ... (1)

$m\, R_2 - Q_4\, R_3 = c$ ... ... (2)

$Q_3\, R_2 - Q_4\, R_1 = c$ ... ... (3)

$Q_3\, b - Q_2\, R_1 = c$ ... ... (4)

$Q_1\, b - Q_2\, a = c$ ... ... (5)

Again, if column IV is obtained from I and III by subtraction,

$$R_4\,(R_3 - m) - R_3\,(R_4 - q) = R_3 q - R_4\, m = -c$$

I	III	IV
a	Q_1	$a - Q_1 = a_1$
b	Q_2	$b - Q_2 = b_1$
R_1	Q_3	$R_1 - Q_3 = r_1$
R_2	Q_4	$R_2 - Q_4 = r_2$
R_3	m	$R_3 - m = r_3$
R_4	q	$R_4 - q = r_4$

i.e. $r_3\, R_4 - r_4\, R_3 = -c$ (6)

Similarly $r_3\, R_2 - r_2\, R_3 = -c$ (7(

$r_1\, R_2 - r_2\, R_1 = -c$ (8)

$r_1\, b - b_1\, R_1 = -c$ (2)

$b\, a_1 - a\, b_1 = -c$ (10)

Again, arranging the remainders and quotients in another way,

I	V	VI Value of 'x'	VII	Value of 'y'
a				
b	1		0	
R_1	q_1	$q_1 = x_1$	1	$1 = y_1$
R_2	q_2	$q_1 q_2 + 1 = x_2$	q_2	$q_2 y_1 = y_2$
R_3	q_3	$q_3 x_2 + x_1 = x_3$	q_3	$q_3 y_2 + y_1 = y_3$
R_4	q_4	$q_4 x_3 + x_2 = x_4$	q_4	$q_4 y_3 + y_2 = y_4$

$bx_1 - ay_1 = -R_1$ (11) $\qquad bx_3 - ay_3 = -R_3$ (13)

$bx_2 - ay_2 = R_2$ (12) $\qquad bx_4 - ay_4 = R_4.$ (14)

Hence if any number K can be represented as $m\,R_4 - q\,R_3$, then

$$m\,(bx_4 - ay_4) + q\,(bx_3 - ay_3) = b\,(mx_4 + qx_3) - a\,(my_4 + ay_3) = K.$$

Also, if K can be expressed as $p\,R_2 + q\,R_4$,

then $K = p\,(qx_2 - ay_2) + q\,(bx_4 - ay_4)$

$= b\,(px_2 + qx_4) - a\,(py_2 + qy_4)$; and so on.

Now, for a concrete example:—

Suppose in a certain instance of mutual division, between $a=121$ and $b=84$, and their remainders, the division is carried on till the last remainder is 1.

	b	a	
2	84	121	1
1	10	37	3
	3	7	2
		1	

Arrange the columns as shown below and perform the "upasambāram" upwards.

I	II	III	Then,
121	1	$25\times1+11=36$	$3\times0-1\times1=-1$
84	2	$11\times2+3=25$	$3\times2-7\times1=-1$
37	3	$3\times3+2=11$	$10\times2-7\times3=-1$
10	1	$2\times1+1=3$	$10\times11-37\times3=-1$
7	2	$1\times2+0=2$	$84\times11-37\times25=-1$
3	1	1	$84\times36-121\times25=-1$
1	0	0	

Column III is obtained from calumn II, and column I consists of the numbers, a, b, and the remainders up to 1, in succession down wards. Now, suppose in column II the last remainder 1 alone is multiplied by any number, say 3—the value of c—and the "upasamharam" is done

with the new column IV. Then column V will be obtained in which the elements are each thrice the elements of column III. Column VI is the difference between columns I and V.

I	IV	V	VI
121	1	108	13
84	2	75	9
37	3	33	4
10	1	9	1
7	2	6	1
3	3	3	0
1	0	0	0

Then, from I and V

$$3\times 0-3\times 1=-3$$
$$3\times 6-3\times 7=-3$$
$$6\times 10-7\times 9=-3$$
$$33\times 10-9\times 37=-3$$
$$33\times 84-37\times 75=-3$$
$$108\times 84-75\times 121=-3.$$

Also, from I and VI

$$1\times 10-1\times 7=3$$
$$4\times 10-1\times 37=3$$
$$4\times 84-37\times 9=3$$
$$13\times 84-9\times 121=3.$$

Thus we get the following rule to be followed when the mutual division is carried on till the last remainder is 1:—

Arrange the quotients in order downwards and below them the required numerical value of c and below it 0. Then perform the "*upasaṃhāram*" upwards in this column, and get a fresh column. The two topmost elements of this column will be the values of x and y. Observe the rule III (a)—page Li;

Example :- $a=210389$. $b=576$; $c=5$.

	b	a	
3	576	210389	365
6	129	149	1
4	9	20	2
	1	2	

I	II	III
210389	365	473010
576	3	1295
149	1	335
129	6	290
20	2	45
9	4	20
2	5	5
1	0	0

$$2\times 0-1\times 5=-5$$
$$2\times 20-9\times 5=-5$$
$$20\times 20-9\times 45=-5$$
$$20\times 290-129\times 45=-5$$
$$149\times 290-129\times 335=-5$$
$$149\times 1295-576\times 335=-5$$
$$210389\times 1295-576\times 473010=-5$$

i.e. $576 \times 473010 - 5 = 210389 \times 1295$

The value of x, 473010 is greater than 210389 and we ar search of the *unique* value of x, below 210389. Hence take only remainder after dividing 473010 by 210389. This is 52232 —(4730 $2 \times 210389 = 52232$)—. Similarly subtract 2×576 from 1295. We get This is the value of y corresponding to 52232, the value of x.

$$576\,(2 \times 210389 + 52232) - 5 = 210389\,(2 \times 576 + 143)$$

i.e. $576 \times 52232 - 5 = 210389 \times 143$

Now, if c is -5 instead of 5, the value of x is 158157, $(210389 - 52232)$ and that of y is 433 *i.e.* $(576 - 143)$.

These numbers could have been obtained direct if in the cours the "upasamhāram" itself, the element 20 of column III which exceeded the corresponding element 9 of column I had been then and t reduced by subtracting 9 twice, and recording only the remainder 2

I Remainder	II Quotients	III	IV
210389	365		$143 \times 365 + 37 = 52232$
576	3		$37 \times 3 + 32 = 143$
149	1		$32 \times 1 + 5 = 37$
129	6		$5 \times 6 + 2 = 32$
20=(5×4+0	2		$2 \times 2 + 1 = 5$
9	4	20	$20 - 2 \times 9 = 2$
2	5	5	$5 - 2 \times 2 = 1$
1	0	0	

The process of reducing elements to their lowest value is kn as "Takshanam". This may be done either at the end or even du *upasamharam*. This may be defined thus:— If a set of values of x y are obtained which satisfy the equation, $bx - ay = c$ and if such va exceed the values of a and b respectively, so that

$x = na + r_x$ and $y = nb + r_y$, then

$$b\,(na + r_x) - a\,(nb + r_y) = c$$

i.e. $br_x - ar_y = c$

Reducing the values to r_x and r_y is called 'Takshanam'.

It was stated and proved before that in the equation $Bx - Ay =$ C must contain the common factor of A & B; but it is not neces that A should contain the common factor of B and C, or that B sho contain the common factor of A & C.

This will be evident from the following problem.

Solve:— $100x + 90 = 63y$

H. C. F. of 90 and 63 is 9. Dividing 90 and 63 alone by 9, m another eqn., $100x + 10 = 7y$

(Valli) *Mutual division*

100	14				30	
7	3	...	30	...	2=(30−4×7)	
2	10	...	10	...	2=(10−4×2)	
1	0					

3	7 / 1	100 / 2	1

$$100 \times 2 + 10 = 7 \times 30$$

$$\therefore \quad 100 \times 18 + 90 = 63 \times 30$$

$$\therefore \quad x = 18\ ; \quad y = 30.$$

So, x is obtained by multiplying 2 by the H. C. F. 9.

Again, 10 is a common factor of 100 and 90. Dividing 100 & 9 alone by 10 and make another equ, $10x + 9 = 63y$.

63	...	6	...	...	...	45		
10	...	3	...	27	...	7=(27−2×10)		
3	...	9	...	9	...	3=(9−2×3)		
1	...	0						

3	10 / 1	63 / 3	

Here the divisor 63, is greater than the multiplier of x; in mutua division the remainder 1 comes in the column of the multiplier of x but 9 is to be added. So, the values obtained have to be subtracted fron 63 and 10. (See page I, — Rule III).

$$\text{Hence} \quad y = 10 - 7 = 3. \qquad x = 63 - 45 = 18.$$

$$10 \times 18 + 9 = 3 \times 63$$

$$\therefore \quad 100 \times 18 + 90 = 30 \times 93$$

$$\therefore \quad x = 18 \text{ and } y = 30$$

The same values can also be obtained without dividing by the H. C. F. thus:—

100	1			30=y
63	1			18=x
37	1		86	12
26	2		58	6
11	2	270	28	
4	1	90	2	
3	90	90		
1	0	0		

	x	y	
1	100	63	1
1	37	26	2
2	11	4	8
	3	1	

The problems so far discussed are known as *Niragra-Kuttākāram* so called because $(bx \pm c)$ when divided by a leaves no remainder. There are also problems known as *Sāgra-Kuttākāram* wherein the quest is for a number which leaves two different remainders when divided separately by two different numbers.

For example find that number K which when divided by p leaves a remainder R and when divided by p_1 leaves a remainder R_1. Here let $R > R_1$.

$$\text{Then} \quad K = pq + R$$

$$\text{and} \quad = p_1 q_1 + R_1 \quad \text{where } q \text{ and } q_1 \text{ are the quotients,}$$

$$i.e. \quad 576\times473010-5=210389\times1295$$

The value of x. 473010 is greater than 210389 and we are in search of the *unique* value of x, below 210389. Hence take only the remainder after dividing 473010 by 210389. This is 52232 $-(473010-2\times210389=52232)$—. Similarly subtract 2×576 from 1295. We get 143. This is the value of y corresponding to 52232, the value of x.

$$576\ (2\times210389+52232)-5=210389\ (2\times576+143)$$

$$i.e. \quad 576\times52232-5=210389\times143$$

Now, if c is -5 instead of 5, the value of x is 158157, *i e*, $(210389-52232)$ and that of y is 433 *i.e.* $(576-143)$.

These numbers could have been obtained direct if in the course of the "upasamhāram" itself, the element 20 of column III which first exceeded the corresponding element 9 of column I had been then and there reduced by subtracting 9 twice, and recording only the remainder 2

I Remainder	II Quotients	III	IV
210389	365		$143\times365+37=52232$
576	3		$37\times3+32=143$
149	1		$32\times1+5=37$
129	6		$5\times6+2=32$
$20=(5\times4+0$	2		$2\times2+1=5$
9	4	20	$20-2\times9=2$
2	5	5	$5-2\times2=1$
1	0	0	

The process of reducing elements to their lowest value is known as "Takshanam". This may be done either at the end or even during *upasamharam*. This may be defined thus:— If a set of values of x and y are obtained which satisfy the equation, $bx-ay=c$ and if such values exceed the values of a and b respectively, so that

$$x=na+r_x \text{ and } y=nb+r_y, \text{ then}$$

$$b\ (na+r_x)-a\ (nb+r_y)=c$$

$$i.e, \quad br_x-ar_y=c$$

Reducing the values to r_x and r_y is called 'Takshanam'.

It was stated and proved before that in the equation $Bx-Ay=\pm C$, C must contain the common factor of A & B; but it is not necessary that A should contain the common factor of B and C, or that B should contain the common factor of A & C.

This will be evident from the following problem.

Solve:— $\quad 100x+90=63y$

H. C. F. of 90 and 63 is 9. Dividing 90 and 63 alone by 9, make another eqn., $100x+10=7y$

(Valli)					
100	14				30
7	3	...	30	...	2=(30−4×7)
2	10	...	10	...	2=(10−4×2)
1	0				

Mutual division

3	7	100	14
	1	2	

$$100\times 2+10=7\times 30$$

$$\therefore \quad 100\times 18+90=63\times 30$$

$$\therefore \quad x=18\,; \quad y=30.$$

So, x is obtained by multiplying 2 by the H. C. F. 9.

Again, 10 is a common factor of 100 and 90. Dividing 100 & 90 alone by 10 and make another eqn, $10x+9=63y$.

63	...	6	...	...	...	45
10	...	3	...	27	...	7=(27−2×10)
3	...	9	...	9	...	3=(9−2×3)
1	...	0				

3	10	63	6
	1	3	

Here the divisor 63, is greater than the multiplier of x; in mutual division the remainder 1 comes in the column of the multiplier of x, but 9 is to be added. So, the values obtained have to be subtracted from 63 and 10. (See page L—Rule III).

$$\text{Hence} \quad y=10-7=3. \qquad x=63-45=18.$$

$$10\times 18+9=3\times 63$$

$$\therefore \quad 100\times 18+90=30\times 93$$

$$\therefore \quad x=18 \text{ and } y=30$$

The same values can also be obtained without dividing by the H. C. F. thus:—

100	1			30=y
63	1			18=x
37	1		86	12
26	2		58	6
11	2	270	28	
4	1	90	2	
3	90	90		
1	0	0		

	x	y	
1	100	63	1
1	37	26	2
2	11	4	3
	3	1	

The problems so far discussed are known as *Niragra-Kuttākāram* so called because $(bx \pm c)$ when divided by a leaves no remainder. There are also problems known as *Sāgra-Kuttākāram* wherein the quest is for a number which leaves two different remainders when divided separately by two different numbers.

For example find that number K which when divided by p leaves a remainder R and when divided by p_1 leaves a remainder R_1. Here let $R > R_1$.

Then $\quad K=pq+R$

and $\quad\quad =p_1 q_1+R_1$ where q and q_1 are the quotients,

$\therefore \quad p_1 q_1 - (R - R_1) = pq. \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$

Since p, p_1 and R, R_1 are known, this reduces to the form

$bx - c = ay$ where

$$b = p_1$$
$$x = q_1$$
$$c = (R - R_1),$$
$$a = p$$
$$\text{and } y = q.$$

Hence q and q_1 can be found easily and thence K also. Specimens of more advanced problems of this type are indicated below.

Problem: 1 Find a number which when multipled by 27 and divided by 9862 leaves a remainder 8, and which when multiplied by 600 and divided by 16393 leaves a remainder 3.

First find a and b which satisfy the two equations,

$$27\, a = 9862\, m + 8 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$600\, b = 16393\, n + 3 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

Then find a number K so that

$$K = 9862\, m_1 + a \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

$$\text{and} \quad K = 16393\, n_1 + b \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

Then $27\, K = 27 \times 9862\, m_1 + 27\, a$

$= 27 \times 9862\, m_1 + 9862\, m + 8$

$= \underline{9862\ (27\, m_1 + m) + 8}$

and $600\, K = 16393\, (600\, n_1 + n) + 3.$

The K so found will be the required number, for

$\frac{27\,K}{9862}$ leaves the remainder 8 and $\frac{600\,K}{16393}$ leaves the remainder 3.

From (3) and (4)

$$9862\, m_1 + (a - b) = 16393 n_1. \qquad \ldots \qquad (5)$$

From this m_1 and n_1 can be found. Find a, m, b and n from equations (1) and (2).

Step—I. *To find 'a' and 'm'* from (1)

9862	365	•	1826	9862 − 1826 = 8036	3	27	9862	365
27	3		5	27 − 5 = 22		6	7	1
7	1	8	1				1	
6	8	8	2					
1	0							

Since unit occurs in the divisor column, 1826 and 5 should be subtracted from 9862 and 27 respectively

So, $a = 8036$ and $m = 22.$

Step II. *To find 'b' and 'n' from* (2)

16393	27	$3907 \times 3 = 11721 = b$
600	3	$143 \times 3 = 429 \quad = n.$
193	9	46
21	5	5 $\qquad b = 11721.$
4	1	1 $\qquad n = 429.$
1	0	$(b-a) = 11721 - 8036 = 3685$

3	600	16393	27
5	21	193	9
	1	4	

The values are multiplied by 3, since $c=3$. See page LI

To find n_1 and m_1 from the equation

$$16393\, n_1 - 3685 = 9862\, m_1 \qquad \ldots \qquad (6)$$

1	876	m_1'
1	527	n_1'
1	349	
1	178	
24	171	
2	7	
2	3	
1	1	
1		
0		

1	9862	16393	1
	6531	9862	
1	3331	6531	1
	3200	3331	
2	131	3200	24
	112	3144	
1	19	56	2
	18	38	
	1	18	

Here the last remainder is unity. But c is 3685. So the values of m_1' and n_1' should be multiplied by 3685

Now, $876 \times 3685 = 3228060$.

and $527 \times 3685 = 1941995$.

Abrading the values, $m_1 = 3228060 - 196 \times 16393$

$= 15032$

$n_1 = 1941995 - 196 \times 9862$

$= 9043.$

$\therefore \quad K = (16393\, n_1 + b)$ or $(9862\, m_1 + a)$

$= 16393 \times 9043 + 11721 = \underline{148253620}$

If during 'Vallyupasamharam' itself the device shown below had been employed for the proposed remainder 3685, the values of m_1 and n_1 could have been obtained more easily without making figures unnecessarily too large. The device is termed "Takshanam" as has already been referred to.

<u>Artifices to be employed in '*Vallyupasahāram*'.</u>

Arrange all the quotients in order downwards with the last desired remainder at the bottom with 0 below it. Arrange also the two given numbers and the successive remainders downwards in a parallel column. The two columns will contain the same number of elements.

The results of *Upasamharam* are to be recorded in a third column upwards. If during this operation, at any stage any element in the new column is found to exceed the corresponding element of the 'Remainder' column reduce this element at once to the remainder obtained by dividing it by that element in the 'Remainder' column against it. At the same time reduce the previous element (below it in the new column) by just as many times the corresponding remainder and then continue the *upasamharam* upwards.

Example: $a=16393$, $b=9862$. $c=3685$

Remainders	Quot.	Results of 'upasamharam' (III)		
I	II	(1)	(2)	(3)
16393	1			15032 }
9862	1			9043 }
6531	1			5989
3331	1			3054
3200	24			2935
131	2		512	$512-3\times131=119$
56	2		247	$247-3\times56=79$
19	1	3685	$3685-19\times193=18$	
18	3685	3685	$3685-18\times193=211$	
1	0			

Thus we get, $9862\times15032-16393\times9043=\underline{\underline{3685}}$

Problem II Find that number which when multiplied by 7 and divided by 982 leaves the remainder 4, and which when multiplied by 11 and divided by 2023 leaves the remainder 6.

$$7a=982m+4 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$11b=2023n+6 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

Number $K=(982m_1+a)$ or $(2023n_1+b)$ (3)

i.e. $982m_1=2023n_1+(b-a)$

I *To find 'a' and 'm'*

982	140		702=(*a*)
7	3	12	5=(*m*)
2	4	4	2
1	0		

3	7	982	140
	6	980	
	1	2	

II *To find 'b' and 'n'*

2023	183	1104=(*b*)
11	1	6=(*n*)
10	6	
1	0	

1	11	2023	183
	10	2013	
	1	10	

$b-a=\underline{\underline{402}}$.

III $982\,m_1 - 402 = 2023\,n_1$

2023	2			16	982	2023	
982	16	$775 = m_1$		1	38	59	2
59	1	$376 = n_1$		4	17	21	1
38	1	23			1	4	1
21	1						
17	4						
4	402						
1	0						

$46 - 1 \times 38 = 8$

$36 - 1 \times 21 = 15$

$1608 - 17 \times 94 = 10$

$402 - 4 \times 94 = 26$

$\therefore$ Number $= 982 \times 775 + 702 = 761752$

Verification : $\dfrac{K \times 7}{982} = \dfrac{982 \times 775 \times 7}{982} + \dfrac{702 \times 7}{982}$ 982) 4914 (5; 4910; 4

$= 775 \times 7 + 5 +$ Remainder 4.

$\dfrac{K \times 11}{2023} = \dfrac{2023 \times 376 \times 11}{2023} + \dfrac{1104 \times 11}{2023}$ 2023) 12144 (6; 12138; 6

$= 376 \times 11 + 6 +$ Remainder 6

Problem III. Find the number which when multiplied by 17 and divided by 123 leaves the remainder 5 and which when multiplied by 13 and divided by 953 leaves the remainder 7.

$17\,a = 123\,m + 5$ ... ... (1)

$13\,b = 953\,n + 7$ ... ... (2)

$K = (953\,n_1 + b)$ or $(123\,m_1 + a)$ ...

$\therefore\ 953\,n_1 - 123\,m_1 = (a - b)$ ... (3)

Step I

123	7	$= 22 = a$	4	17	123	7
17	4	$20 - 17 = 3 = m$		1	4	
4	5	$5 - 4 = 1$				
1	0					

Step II

953	73	$587 = (b)$	3	13	953	73
13	3	$21 - 13 = 8 = (n)$	1	1	4	
4	7	$7 - 4 = 3$				
1	0					

$b - a = 587 - 22 = 565$

$123\,m_1 - 565 = 953\,n_1.$

Step III

953	7	$361 = m_1$	1	123	953	7
123	1	$46 = n_1$	1	31	92	2
92	2	39		1	30	
31	1	$565 - 18 \times 31 = 7$				
30	565	$565 - 18 \times 40 = 25$				
1	0					

$\because \quad K=(953\, n_1+b)$ or $(123\, m_1+a)$

$=(953\times 46+587)$ or $(123\times 361+22)$

$=\underline{\underline{44425}}$

Problem IV. Find the number which when multiplied by 23 and divided by 12347 leaves the remainder 9 and which when multiplied by 150 and divided by 4999 leaves the remainder, 5.

$23\, a=12347\, m+9 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

$150\, b=4999\, n+5 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$K=(12347\, m_1+a)$ or $(4999\, n_1+b)$.

$\therefore\ 12347\, m_1=4999\, n_1+(b-a) \quad \ldots \quad (3)$

Step I

12347	536	4295=a
23	1	8
19	4	7
4	1	9−2×4=1
3	9	9−2×3=3
2	0	

1	23	12347	536
1	4	19	4
	1	3	

$a=\underline{4295}$

Step II

4999	33	3166=b'
150	3	95=n'
49	16	80−49=31
3	5	5−3=2
1	0	

3	150	4999	33
	3	49	16
		1	

Since unit comes under the divisor, b' and n' should be subtracted.

$\therefore \quad b=4999-3166=\underline{\underline{1833}}$

$(a-b)=4295-1833=2462.$

$\therefore \quad 4999\, n_1-2462=12347\, m_1 \quad \ldots \quad (3)$

Mutual dsvision

2	4999	12347	2
1	301	2349	7
9	59	242	4
	5	6	1
		1	

12347	2			1805	$=n_1'$
4999	2			731	$=m_1'$
2349	7			343	
301	1			45	
242	4		1722−7×242	28	
59	9		430−7×59	17	
6	1	2452−6×410	2		
5	2462	2462−5×410	412		
1	0				

$m_1 = 4999 - 731 = 4268;\ n_1 = 12347 - 1805 = \underline{10542}$

$$\therefore \quad K = \left.\begin{array}{r} 4999 \times 10542 + 1833 \\ 12347 \times 4268 + 4295 \end{array}\right\} = \underline{\underline{5,27,01,291}}$$

To test whether this is the least value:—

Since an odd order of quotients are taken,

$$1805 \times 4999 + 2462 = 731 \times 12347 \quad \ldots \quad (1)$$

$$12347 \times 4999 = 4999 \times 12347 \quad \ldots \quad (2)$$

$$(2) - (1) = 4999 \times 10542 - 2462 = 12347 \times 4268$$

$$\therefore \quad 4999 \times 10542 - 2462 + 4295 = 12347 \times 4263 + 4295$$

i.e. $4999 \times 10542 + 1833 = 12347 \times 4268 + 4295 = K.$

$$23\ K = 12347 \times 4268 \times 23 + 23 \times 4295$$
$$= 12347 \times 4268 \times 23 + 12347 \times 8 + 3$$
$$= 12347 \left(\overline{4268 \times 23 + 8} + \frac{9}{12347} \right)$$

$$\therefore \quad \frac{23K}{12347} = \text{Integer} + \text{remainder } 9.$$

Similarly $\dfrac{150\ K}{4999} = \overline{150 \times 10542 + 55} = \dfrac{5}{4999}$

Hence, this is the least value.

"യുക്തിഭാഷ"യിൽ അതിദേശിച്ചിട്ടുള്ള "സിദ്ധന്യായങ്ങൾ"

1. ഒരു രാശിയെ വൎഗ്ഗിക്കേണ്ടുമ്പോൾ അതിനെ രണ്ടായി ഖണ്ഡിച്ചു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചിരട്ടിച്ചു രണ്ടു ഖണ്ഡത്തിന്റെയും വൎഗ്ഗവും കൂട്ടിയാൽ ഖണ്ഡയോഗത്തിന്റെ വൎഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 19)

2. രണ്ടു രാശികളുടെ വൎഗ്ഗയോഗവും അവയുടെ ദ്വിഘ്നഘാതവും കൂട്ടിയാൽ രാശിയോഗത്തിന്റെ വൎഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും.

$$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$$

3. രണ്ടു രാശികളുടെ ഘാതത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചിട്ട് അതിൽ അവയുടെ അന്തരവൎഗ്ഗവും കൂട്ടിയാൽ യോഗവൎഗ്ഗമുണ്ടാകും. (പേജ് 20)

$$4ab+(a-b)^2=(a+b)^2$$

4. രണ്ടു രാശികളുടെ വൎഗ്ഗയോഗത്തിങ്കന്നു ഘാതത്തിൽ ഇരട്ടി കളഞ്ഞാൽ അവയുടെ അന്തരവൎഗ്ഗം ശേഷിക്കും. (പേജ് 22)

$$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$$

5. രണ്ടു രാശികളുടെ യോഗവൎഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ഘാതത്തിൽ നാന്മടങ്ങു പോയാൽ അന്തരവൎഗ്ഗം ശേഷിക്കും. (പേജ് 22)

$$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$$

6. രണ്ടു രാശികളുടെ വൎഗ്ഗയോഗത്തിന്റെ ഇരട്ടിയിങ്കന്നു യോഗവൎഗ്ഗം പോയാൽ അന്തരവൎഗ്ഗം ശേഷിക്കും. (പേജ് 22)

$$2(a^2+b^2)-(a+b)^2=(a-b)^2$$

7. യോഗാന്തരാഘാതിവൎഗ്ഗാന്തരം (പേജ് 25)

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

8. ഗുണനത്തിങ്കൽ ക്രമഭേദംകൊണ്ടു ഫലഭേദമില്ല. (പേജ് 34)

$$a.b.c.=a.c.b.=b.c.a.=b.a.c.=c.a.b.=c.b.a.$$

9. ഗുണിച്ചിട്ടു പിന്നെ വൎഗ്ഗിച്ചതും വൎഗ്ഗിച്ചിട്ടു പിന്നെ ഗുണിച്ചതും തുല്യം. (പേജ് 234, 254)

$$(a\,b)^2=a^2.\,b^2$$

10. അന്തരാൎദ്ധവും അൎദ്ധാന്തരവും ഒന്നു (254)

$$\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$$

11. വൎഗ്ഗചതുരംശവും അൎദ്ധവൎഗ്ഗവും തുല്യം (254)

$$\tfrac{1}{4}a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

12. രണ്ടു രാശികളുടെ വൎഗ്ഗാന്തരത്തെ യോഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം അവയുടെ അന്തരം. (പേജ് 38)

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}=(a-b)$$

13. സദൃശങ്ങൾക്കേ യോഗവിയോഗങ്ങൾക്ക് ആഞ്ജസ്യമുള്ളൂ.

Addition and subtraction can be performed only between quantities of the same denomination.

14. ഭിന്നരാശിയെ വർഗ്ഗിക്കേണ്ടുമ്പോൾ ഛേദത്തെയും അംശത്തെയും വർഗ്ഗിക്കണം. അവ വർഗ്ഗിച്ച രാശിയുടെ ഛേദാംശങ്ങളായിരിക്കും. ഛേദം കൂടിയിരിക്കുന്ന രാശിയെ മൂലിക്കേണ്ടുമ്പോൾ, ഛേദത്തെയും അംശത്തെയും മൂലിക്കേണം. അവ മൂലിച്ച രാശിയ്ക്ക് ഛേദാംശങ്ങൾ. (പേജ് 44)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2};\quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

15. ഇച്ഛാഫലത്തെ പ്രമാണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും പ്രമാണഫലത്തെ ഇച്ഛകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും തുല്യസംഖ്യകളായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 48, 55)

If $a : b :: c : d$, then $ad=bc$. The product of the *extremes* of a proportion is equal to the product of the *means*.

16. വ്യസ്തത്രൈരാശികഫലമിച്ഛാഭക്തഃ പ്രമാണഫലഘാതഃ (പേജ് 48)

Law of inverse proportion. If a varies as $\frac{1}{b}$, then ab is constant.

17. ഭുജാവർഗ്ഗവും കോടിവർഗ്ഗവും കൂടിയാൽ കർണ്ണവർഗ്ഗമാകും (പേജ് 72)

The square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the other two sides.

18. ഒരു ത്ര്യശ്രത്തിൽ ഭുജകൾ തങ്ങളിലെ വർഗ്ഗാന്തരവും ആബാധകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നേ. (പേജ് 75)

The difference of the squares of the two sides of a triangle is equal to the difference of the squares of their projections on the base.

19. ത്ര്യശ്രങ്ങളുടെ തുല്യാകാരത്വത്തിന്റെ ലക്ഷണങ്ങൾ —

(1) ഇതരേതരഭുജാകർണ്ണങ്ങൾക്ക് അന്യോന്യദിക്സാമ്യം, ഇതരേതര കോടികർണ്ണങ്ങൾക്ക് ദിഗ്വൈപരീത്യം.

(2) രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികർണ്ണങ്ങൾ മൂന്നിനും അന്യോന്യം ദിഗ്വൈപരീത്യം.

(3) രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികർണ്ണങ്ങൾ മൂന്നിനും ദിക്സാമ്യം. (പേജ് 89)

Conditions of similarity of two triangles :—

1) Parallelism between the hypotenuses and a side of each; perpendicularity between the hypotenuses and a side of each.

2) Perpendicularity between the three sides of the one and the three sides of the other, each to each;

3) Parallelism between the three sides of the one and the three sides of the other, each to each.

20. മിക്കവാറും തുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന രണ്ടു രാശികളുടെ ഘാതത്തെ അവയുടെ വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധമെന്നു മിക്കവാറും കല്പിക്കാം. (പേജ് 92)

If a is nearly equal to b, then ab is nearly equal to $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

21. (1) ഏകാദ്യേകോത്തരസങ്കലിതം പദവർഗ്ഗാർദ്ധം.

(2) ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗസങ്കലിതം പദഘനത്തിൽ മൂന്നൊന്നു്

(3) ,, ഘനസങ്കലിതം വർഗ്ഗത്തിൽ നാലൊന്നു്

(4) ,, വർഗ്ഗവർഗ്ഗസങ്കലിതം സമപഞ്ചഘാതത്തിന്റെ അഞ്ചൊന്നു്.

1) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

2) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$

3) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}$

4) $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5}$

22. (1) ഋണധനഘാതം ഋണം

(2) ഋണഋണഘാതം ധനം

(3) ധനധനഘാതം ധനം. (പേജ് 123)

In multiplication *like* signs give *plus* and *unlike* signs give *minus*.

23. ഒരു ത്ര്യശ്രത്തിൽ രണ്ടു ഭുജകൾ തങ്ങളിൽ നീളമൊക്കുമെങ്കിൽ ലംബം ഭൂമദ്ധ്യത്തിൽ സ്പർശിക്കും; ഒന്നു ചെറുതാകിൽ അപ്പുറത്തു നീങ്ങും. (പേജ് 144)

If two sides of a triangle are equal, the perpendicular from the vertex bisects the base; if they are unequal the foot of the perpendicular is nearer the shorter side.

24. വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന ആറു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം മുഴുവനും തികയും.

Six chords, each equal to the radius, can be placed in order inside a circle.

25. വൃത്തഷഡ്ഭാഗം രണ്ടുരാശി, രണ്ടുരാശിയുടെ സമസ്തജ്യാവു വ്യാസാർദ്ധതുല്യം. (പേജ് 146)

The chord of the sixth part of the circumference of a circle is equal to the radius.

26 ഭുജാജ്യാമൂലങ്ങൾ എല്ലാം പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കും. (പേജ് 153)

The feet of all the ordinates lie on the horizontal axis.

27. ചാപം പ്രമാണമായിട്ടു ജ്യാവിനെ ത്രൈരാശികം ചെയ്യരുതു്. (പേജ് 160)

The ordinate is not proportional to the length of the corresponding arc.

28. യാതൊരു ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ജ്യാസങ്കലിതം ചെയ്തതു അതിന്റെ മീതെ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ജ്യാചാപാന്തരം വരും. (പേജ് 182)

The difference between any arc and its ordinate is obtained from the integral of all the ordinates up to the previous ordinate.

29. ജീവേ പരസ്പരന്യായം.—രണ്ടു ചാപങ്ങളുടെ ജ്യാക്കളെ വെവ്വേറെ അറിഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ, ആ ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തിന്റേയോ അന്തരത്തിന്റേയോ ജ്യാവിനെ അറിയേണമെങ്കിൽ ഒന്നിന്റെ ഭുജയെ മറ്റേതിന്റെ കോടികൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും മറ്റേതിന്റെ ഭുജയെ ആദ്യത്തേതിന്റെ കോടികൊണ്ടു ഗുണിച്ചതുമായ ഘാതങ്ങൾ രണ്ടിനേയും ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ രാശികളുടെ യോഗമോ അന്തരമോ ചാപയോഗത്തിന്റെയോ ചാപാന്തരത്തിന്റെയോ ക്രമേണ ജ്യാവായിട്ടു വരും. (പേജ് 208)

$$R \operatorname{Sin}(A \pm B) = \frac{R \operatorname{Sin} A \cdot R \operatorname{Cos} B \pm R \operatorname{Cos} A \cdot R \operatorname{Sin} B}{R}$$

30. അതാതു ജ്യാവർഗ്ഗത്തിൽനിന്ന് ആദ്യജ്യാവർഗ്ഗത്തെക്കളഞ്ഞ് അതതു കീഴെ ജ്യാവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം മേലെ മേലെ ജ്യാവായിട്ടു വരും. (പേജ് 219)

$$\frac{J_n^2 - J_1^2}{J_{n-1}} = J_{n+1}$$
where J_1, J_2, ...are the successive Bhujas.

31 ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലം ഭൂമ്യർദ്ധലംബങ്ങളുടെ ഘാതത്തിന്നു തുല്യം. (പേജ് 222)

Area of a triangle $= \frac{1}{2}$ base $\times$ altitude.

32. യോഗാന്തരചാപജ്യാക്കളുടെ ഘാതം യാതൊന്ന് അതു യോഗാന്തരചാപാർദ്ധജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 225)

33. രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം യാതൊന്ന് അതു് ആ ജ്യാക്കളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപങ്ങളുടെ യോഗാന്തരങ്ങൾ യാവ ചിലവ അവറ്റെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കളുടെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 226—228)

$$R \operatorname{Sin}(A+B) \cdot R \operatorname{Sin}(A-B) = R^2 \operatorname{Sin}^2 A - R^2 \operatorname{Sin}^2 B$$
The converse of 32.

34. യാവ ചിലവ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെയും ഘാതം യാതൊന്നു അതു് അച്ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും യോഗാന്തരങ്ങളുടെ അർദ്ധങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കൾ യാവ ചിലവ, അവറ്റിന്റെ വർഗ്ഗാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. (226—228)

$$R \operatorname{Sin} A \times R \operatorname{Sin} B = R^2 \operatorname{Sin}^2 \left(\frac{A+B}{2}\right) - R^2 \operatorname{Sin}^2 \left(\frac{A-B}{2}\right)$$

35. പരിധ്യർദ്ധത്തെ രണ്ടായി ഖണ്ഡിച്ചുവർഗ്ഗത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികളായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 229)

The chords of any two arcs of a semicircle are mutually perpendicular.

36. വ്യാസരേഖയിങ്കന്നു് ഇരുപുറവും തുല്യമായിട്ടകലുമ്പോൾ ജ്യാക്കൾ തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും.

Chords equidistant from the centre are equal.

37. ജ്യാകളായിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രഭുജങ്ങളുടെ ഘാതത്തെ ആ വൃത്തവ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ആ ഭുജാചാപയോഗത്തിൻെറ ജ്യാവ് ഭൂമിയായിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൻെറ ലംബമുണ്ടാകും. (പേജ് 231)

In a triangle, the product of the two sides, divided by the diameter of the circum-circle gives the altitude.

38. വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായ ചതുരശ്രത്തിൻെറ ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം കർണ്ണഘാതത്തിന്നു തുല്യമായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 233)

In a cyclic quadrilateral the sum of the products of the opposite sides is equal to the product of the diagonals.

39. വൃത്താന്തർഗ്ഗതചതുരശ്രത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം ഭുജങ്ങളുടെ യോഗാർദ്ധത്തിൽനിന്നു ഓരോ ഭുജവും വാങ്ങിയാൽ ശേഷിക്കുന്ന നാലു രാശികൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചു മൂലിച്ചതിനോടു ഒക്കും. (പേജ് 256)

The area of a cyclic quadrilateral is equal to $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, where a, b, c and d are the sides and $2s=a+b+c+d$.

40. പ്രമാണേച്ഛ തൽഫലങ്ങൾ എന്നപോലെ സംബന്ധമുള്ള നാലു രാശികൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ, ഇവററിൻെറ വർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിലും വർഗ്ഗാർദ്ധങ്ങൾ തങ്ങളിലും സംബന്ധമുണ്ടായിരിക്കും. ഇപ്രകാരംതന്നെ യോഗാർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവും അന്തരാർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവും തങ്ങളിലുള്ള സംബന്ധം. (പേജ് 266)

If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, then $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$;

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2};$$

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

41. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കുറെയൊരു പ്രദേശം മറെറാരു വൃത്തത്തിൻെറ അകത്തു പുക്കിരിക്കുമാറു കല്പിക്കുന്നതായാൽ രണ്ടിൻെറയും കേന്ദ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന വ്യാസരേഖക്കു വിപരീതമായിരിക്കും ഈ വൃത്തങ്ങൾക്കു സാധാരണമായിട്ടിരിക്കുന്ന സമസ്തജ്യാ. (പേജ് 273)

The common chord of two intersecting circles is perpendicular to the line of centres.

42. ഒരു ചെറിയ വൃത്തത്തിൻെറ കുറെയൊരു പ്രദേശം ഒരു വലിയ വൃത്തത്തിൻെറ അകത്തു പുക്കിരിക്കുമാറു കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്നു ശരം വലുത്. വലിയ വൃത്തത്തിന്നു ശരം ചെറുത്. (പേജ് 273)

If unequal circles intersect, the sag of the common chord of the smaller circle is greater than that of the other circle.

43. ഒരു വൃത്തത്തിൽ ശരവും ശരോനവ്യാസവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു് അൎദ്ധജ്യാവിന്റെ വൎഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 278)

The product of the heights of a segment of a circle and its complementary segment is equal to the square on half the chord.

44. ഗോളവ്യാസത്തെ ഗോളപരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഗോളപൃഷ്ഠത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രഫലമുണ്ടാകും. (പേജ് 280)

The surface area of a sphere = circumference $\times$ Diameter

45. വൃത്താൎദ്ധവും വ്യാസാൎദ്ധവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ വൃത്തക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാകും. (പേജ് 283)

Area of a circle = semicircumference $\times$ Radius

46. ഗോളവ്യാസവൎഗ്ഗത്തെ ഗോളപരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു് ആറിൽ ഹരിച്ച ഫലം ഗോളത്തിങ്കലെ ഘനഫലമായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 284)

Volume of a sphere $= \frac{\text{Circumference} \times \text{Diameter}^2}{6}$

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷുപദങ്ങൾ
	അ
അഗ്രം	The extremity of a line or arc; remainder in Division in Kuttakaram
അഞ്ചിൽ ഇറങ്ങിയ മൂന്ന	The fraction $\frac{3}{5}$
അതിദെശിക്കുക	To appy or use a general rule
അധികാഗ്രഹാരം	The divisor in സാഗ്രകുട്ടാകാരം which has numerically the greater remainder
അധികശേഷം	The positive remainder after division
അധിമാസം	Additive month on account of the difference in the number of days in Solar and Lunar years
അന്തരചാപം	The intervening arc between two points in the circumference of the circle
അന്തരാളം	Difference; the perpendicular distance from a point to a straight line or plane
അന്ത്യം	10^{15} (place and number); The digit of the highest denomination; the last term in a series
അന്ത്യസ്ഥാനം	The place of the digit of the highest denomination; the ultimate place when arranged in a column
അണുപരിമാണം	Infinitesimal
അന്യോന്യഹരണം	Mutual continued division(as in finding G. C. M.)
അപരപക്ഷം(കറുത്തപക്ഷം)	The period from Full moon to New moon
അപവർത്തനം	G. C. M.; reducing a fraction or ratio to lowest terms
അപവർത്തനഹാരകം	G. C. M.
അബ്ജം	10^9 (number and place)
അമാവാസി	New moon
അയുതം	10^4 (number and place)
അർദ്ധജ്യാവ്	Refer to "ജ്യാ"
അവമം	Subtractive days (same as തിഥിക്ഷയം)

അവൎഗ്ഗസ്ഥാനം	Even place counting from the unit's place
അവാന്തരയുഗം	A unit of time, viz 576 years or 210389 days adopted by ancient Hindu Astronomers
അവിശേഷിക്കുക	To carry on an operation till the results of two successive operations are practically the same
അവ്യക്തരാശി	An unknown quantity
അല്പശേഷം	In Kuttakaram, the smaller of the last two remainders taken into consideration
അഷ്ടാശ്രം	Octogon
അശ്രം	A side of a polygon; an edge
അസ്ഫുടം	Rough; inexact
അഹൎഗ്ഗണം	The number of days elapsed from a fixed epoch
അംഗുലം	Unit of length
അങ്കം	Number, digit
അംശം	Part; numerator of a fraction

ആ

ആദിത്യമദ്ധ്യമം	The mean longitude of the sun
ആദ്യകൎണ്ണം	One of the diagonals of a quadrilateral taken for reference. The other is known as 'ദ്വിതീയകൎണ്ണം' or 'ഇതരകൎണ്ണം'
ആദ്യസംകലിതം	First integral or sum of an A. P.
ആദ്യസ്ഥാനം	Unit's place
ആബാധകൾ	The two segments into which the base of a triangle is divided by the perpendicular from the vertex
ആയതചതുരശ്രം	Rectangle
ആയാമം	Length
ആയാമവിസ്താരം	Length and breadth
ആഹതി	Product

ഇ

ഇച്ഛാ	The desired antecedant; The third in a proportion

ഇച്ഛാഫലം	The desired consequent; the fourth proportional
ഇടം	Breadth
ഇതരകൎണ്ണം	Refer to ആദ്യകൎണ്ണം
ഇതരജ്യാവ്	The other Co-ordinate
ഇതരേതരകോടി	The ordinate of the other ഭുജം
ഇലി	A minute of arc
ഇഷ്ടദോഃ കോടിധനുസ്സ്	The complementary arc of any chosen arc
ഇഷ്ടപ്രദേശം	The desired point

ഉ

ഉപപത്തി	Proof
ഉപാധിവശാൽ	By assumption
ഉപാന്ത്യം	Penultimate; next to the digit of the highest denomination
ഉൽക്രമജ്യാ	Same as 'ശരം'

ഊ

ഊനാഗ്രഹാരം	The divisor in സാഗ്രകുട്ടാകാരം which has numerically the smaller remainder
ഊനാധിക്യധനുസ്സ്	The deficit or excess of an arc
ഊൎദ്ധ്വം	The topmost
ഊനശേഷം	The smallest number to be added to the dividend to make it exactly divisible by the given divisor

ഋ

ഋണം	Negative

ഏ

ഏകദേശം	In the same straight line; a part
ഏകം	Unit; Unit's place
ഏകാദിക്രമേണ	Consecutive starting from unity
ഏകചിത്യാദി	Consecutive, numbers starting from unity
ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങൾ	Same as ഏകചിത്യാദി

ഏകാദ്യേകോത്തരമൂല
സംകലിതം — $1+2+3+\ldots\ldots$

ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗ
സംകലിതം — $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots$

" ഘന " — $1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots$

" വർഗ്ഗവർഗ്ഗ " — $1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots$

" സമപഞ്ചാഘാത — $1^5+2^5+3^5+\ldots\ldots$

ഏകൈകോനങ്ങൾ — Numbers descending by unity

ഏഷ്യചാപം — The arc to be traversed. (Refer to ഗതചാപം)

ഓ

ഓജസ്ഥാനം — Odd place counting from the unit's place

ഒററപ്പെട്ട — Odd number

ഓജം — Odd

ക

കർണ്ണം — The diagonal of a quadrilateral; hypotenuse of a right angled triangle; rad-vector

കല — $\frac{1}{21600}$ of the circumference of a circle

കലിക്കൊട്ടനാൾ — The number of days past from a fixed epoch called Kalyadi, the beginning of Kaliyuga

കുട്ടാകാരം — A special method of calculation employed in Hindu Astronomy involving the principles of Rule of Three, indeterminate equations and continued fractions

കൂറ — Group; Section

കൃഷ്ണപക്ഷം — Same as 'അപരപക്ഷം'

കേന്ദ്രം — Centre of a circle; the particular point on the circumference from which the arc is measured

കോടി — Abscissa; adjacent side of a rightangled triangle; Corner rafters of hipped roof, 10^7 (number and place)

കോടിഖണ്ഡം	The difference between two successive abscissa, the first differential of Kotijya
കോടിമൂലം; കോട്യഗ്രം	The point at which Koti touches the circle is its starting point and the other end is its end
കോൺ	Corner; Direction
കോൽ	A unit of length equal to about 28″.

ഖ

ഖണ്ഡം	Part
ഖണ്ഡഗുണനം	Multiplication by parts
ഖണ്ഡജ്യാ	The difference between two successive ordinates, the first differential of Bhujajya
ഖണ്ഡജ്യാന്തരം	The second differential of Jya.
ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം	The summation of all ഖണ്ഡാന്തരങ്ങൾ
ഖർവ്വം	10^{10} (number and place)

ഗ

ഗച്ഛം	Number of terms in a series
ഗണിതം	Calculation; Science of calculation
ഗതചാപം	The arc already traversed; the quadrant —ഗതചാപം=ഇഷ്ടചാപം
ഗുണം	Multiplication, multiplier
ഗുണകാരം	Multiplier
ഗുണനം	Multiplication
ഗുണ്യം	Multiplicand
ഗുർവ്വക്ഷരം	A unit of time(Refer to table appended)
ഗോളഘനക്ഷേത്രഫലം	Volume of a sphere
ഗോളപൃഷ്ഠചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം	Surface area of a sphere
ഗോളം	Sphere
ഗ്രഹം	Planet
ഗ്രാസം	The maximum width of the overlap of two intersecting circles
ഗ്രാസോനവ്യാസം	The difference between the diameter and ഗ്രാസം

ഘ

ഘനം	Cube of a number
ഘനമൂലം	Cube root
ഘനക്ഷേത്രഫലം	Volume of a body
ഘാതം	Product
ഘാതക്ഷേത്രം	Rectangle

ച

ചക്രകല	The circumference of a circle is assumed to be divided into 21600 equal parts and each part is known as a Kala or Ili
ചക്രകലാസമസംഖ്യ	The number 21600—Same as "അനന്തപുരം"
ചതുരശ്രം	Quadrilateral
ചതുരശ്രഭൂമി	The base of a quadrilateral, the opposite side is known as മുഖം
ചതുർയുഗം	A unit of time viz 4320000 years adopted by ancient Hindu Astronomers
ചയം	The common difference in an A. P.
ചാന്ദ്രമാസം	Lunar month
ചാപം	Arc of a circle
ചാപീകരണം	Calculating the arc of a circle from its semichord
ചാപം — ഭുജം	An arc measured from മേഷാദി & തുലാദി in the anti-clock-wise direction in the first and third quadrants and in the clock-wise direction in the second and fourth quadrant
ചാപം, കോടി	Complementary arc of ഭുജാചാപം (Refer to Fig. 33 on page 156)
ചെരുവ്	Inclination, angle

ഛ

ഛായ	Shadow
ഛേദം	Denominator

ജ

ജലധി — 10^{14} (number and place)

ജീവാ — Same as ജ്യാവ്

ജ്യാചാപാന്തരം — Difference between an arc and the corresponding semi-chord

ജ്യാവ്—അൎദ്ധ — The ordinate of an arc; Semi-chord

ജ്യാവ്—സമസ്ത — Complete Chord of the arc

ജ്യാവ്. പിണ്ഡ — The semi-chords of one, two... parts of the arcs of a quadrant which is divided into any number of equal parts

ജ്യാസംകലിതം — The summation of semi-chords

ത

തല്പര — $\frac{1}{60} \times \frac{1}{60}$ or $\frac{1}{3600}$ of a കല

താഡിക്കുക — To multiply

തഷ്ടം — Abraded

തക്ഷണം — The method of abrasion-The numbers by which the ഗുണകാരം and ഫലം are abraded

തിഥി — Elongation of the moon—the phase of the moon

തിഥിക്ഷയം — Subtractive day

തുംഗൻ — Apogee of the moon

തുല്യാകാരക്ഷേത്രങ്ങൾ — Similar Figures

തൃതീയകൎണ്ണം — In a cyclic quadrilateral, there are two diagonals. If any two sides are interchanged, a third diagonal is obtained which is called the തൃതീയകൎണ്ണം (Refer to page 233–fig. 47)

തൃതീയസംകലിതം — Third integral

ത്രിജ്യം — The ordinate of 3 rasis of arc of a circle *ie* $\frac{1}{4}$ the circumference, the unit of measurement being $\frac{1}{21600}$th part of the whole circumference

ത്രിശരാദി — 3, 5, 7 etc

ത്രൈരാശികം — Rule of three—(Direct proportion)

ത്ര്യശ്രം	Triangle
,, വിഷമം	Scalene
,, സമം	Equilateral

ദ

ദശം	10 (number and place)
ദളം	Half
ദക്ഷിണോത്തരരേഖ	North-south line or direction
ദിഗ്വൈപരീത്യം	Perpendicularity
ദിക്‌സാമ്യം	Same or parallel line or direction
ദിവസം	Solar day
ദൃഢഭാജ്യം	Reduced dividend (by their G. C. M.)
,, ഭാജകം	Reduced divisor (by their G. C. M.)
,, ക്ഷേപം	Additive and subtractive divided by the G. C. M. of dividend and divisor in Kuttakaram
,, ശുദ്ധി	(same as above)
ദോസ്	Same as ഭുജ
ദ്യുഗണം	Same as കലിക്കൊട്ടനാൾ
ദ്വാത്രിംശദശ്രം	A polygon of 32 sides
ദ്വാദശാംഗുലശങ്കു	A gnomon 12 അംഗുലം long used by ancient Hindu Mathematicians in the measurement of shadows
ദ്വിതീയസംകലിതം	Second intergal
ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകം	The divisor used to calculate a second correction after a first correction

ധ

ധനം	Positive
ധനുസ്	Arc

ന

നാഴിക	A unit of time $=\frac{1}{60}$ of a solar day
നിഖർവം	10^{11} (number and place)
നിരന്തരസംഖ്യ	Consecutive numbers
നേമി	Circumference with reference to position

പ

പകർന്നു കല്പിക്കുക	Transpose
പങ്‌ക്തി	Column, ten, (number and place)

പഞ്ചരാശികം — Compound proportion involving five terms

പഠിതജ്യാ — Same as മഹാജ്യാ

പദം — A quadrant, number of terms in a series

പരമ്പര — A series

പരാർദ്ധം — 10^{17} (number and place)

പരികർമ്മം — Arithmetical processes or manipulations

പരിധി — Circumference with reference to magnitude

പരിഭ്രമണം — A complete revolution of a planet along the Zodiac with reference to a fixed star

പർവ്വാന്തം — The time when moon is in conjunction with or opposition to the sun

പാർശ്വം — Side, surface

പുറവം — Outer side

പൂർവ്വാപരരേഖ — East-west line

പ്രതിഭുജാ — Opposite side

പ്രമാണം — The antecedant, the first term of a proportion

പ്രമാണഫലം — The consequent; the second term in a proportion

പ്രയുതം — 10^{16} (number and place)

പ്രസ്താരം — Number of combinations

ഫ

ഫലം — Result

ബ

ബാണം — Same as ശരം

ബാഹു — Side of a triangle, a quadrilateral etc; a semi-chord ($R \sin \theta$)

ഭ

ഭഗണം — Same as പരിഭ്രമണം

ഭാഗം — $\frac{1}{360}$ of the circumference

ഭാജകം — Divisor (General and in Kuttakaram)

ഭാജ്യം — Dividend (General)-The multiplicand in Kuttakaram

ഭിന്നസംഖ്യ — Fraction

ഭുജാ — Side of a triangular polygon; ordinate of an arc; opposite side in a right angled triangle

ഭുജാഖണ്ഡം — The difference between two successive ordinates

ഭൂദിനം — The number of terrestrial days in a Kalpa or Yuga

ഭൂമി — One side of a triangle or quadrilateral taken for reference

മ

മണ്ഡപം — A square with a pyramidal roof usually found in Hindu temples

മതി — Small tentative multiplier in kuttakaram got by guessing correctly according to the condition given

മതിഫലം — The result corresponding to a given മതി

മത്സ്യം — The overlapping portion of two intersecting circles

മദ്ധ്യം — 10^{16} (number and place); middle point

മദ്ധ്യമം — The mean longitude of a planet

മഹാജ്യാ — Same as പരിതജ്യാ

മഹാപത്മം — 10^{12} (number and place)

മഹാശേഷം — In Kuttakaram, the greater of the last two remainders taken into consideration

മാനം — An arbitrary unit of measurement

മീനാന്തം — Same as മേഷാദി; Beginning of first quadrant

മുഖം — Refer to ചതുരശ്രഭൂമി

മുടിയുക — To end without remainder

മുറിവാ — The line of section

മൂലം — The starting point of a line or arc; square root; cube root etc.

മുഴപ്പ് — Thickness

മേഷാദി — The starting point on the ecliptic which is fixed in നിരയന calculation

യ

യാമ്യം	Southern
യുഗ്മം	Even
യുഗ്മസ്ഥാനം	Even place counting from unit's place
യോഗം	Sun; Contact; one of the elements of a പഞ്ചാംഗം derived from the sum of the true longitudes of the sun and moon നിത്യയോഗം
യോഗചാപം	Arc whose semi-chord is equal to the sum of two given semi-chords

ര

രാശി	A number; one of the signs of the zodiac a term & a ratio
രൂപം	Unity
രൂപവിഭാഗം	Division by magnitude

ല

ലക്ഷം	10^{15} (number and place)
ലങ്കാ	A chosen point on the equator
ലംബം	Perpendicular; Vertical
ലംബനിപാതം	Foot of the perpendicular
ലിപ്ത	Same as ഇലി

വ

വർണ്ണമൊപ്പിക്കുക	Convert fractions to the same denomination
വർഗ്ഗം	Square
വർഗ്ഗമൂലം	Square root
വർഗ്ഗസ്ഥാനം	The odd place counting from the unit's place
വർഗ്ഗക്ഷേത്രം	A square
വല്ലി	A column or series
വല്ല്യുപസംഹാരം	A particular kind of operation in Kuttakaram
വാങ്ങുക	Subtract
വിയോഗം	Subtraction
വിലി	$\frac{1}{60}$ of an Ili (ഇലി)

വിഷമസംഖ്യ	Odd number
വിസ്താരം	Breadth
വൃത്തം	Circle
വൃത്താന്തർഗതചതുരശ്രം	A cyclic quadrilateral
വൃന്ദം	10^9 (number and place)
വ്യക്തി	Unity
വ്യവകലിതം	Subtraction
വ്യസ്തത്രൈരാശികം	Inverse proportion
വ്യസ്തകുട്ടാകാരം	Inverse process in Kuttakaram
വ്യാപ്തിഗ്രഹണം	Generalisation.
വ്യാസം	Diameter
വ്യാസാർദ്ധം	Radius

ശ

ശതം	10^2 (number and place)
ശങ്കു	Gnomon; Style; Vertical post; 10^{13} (number and place)
ശരഖണ്ഡം	Parts of the height of an arc
ശരം	Sag or height of an arc
ശരോനവ്യാസം	Diameter less ശരം
ശിഷ്ടചാപം	The difference between the given ചാപം and the nearest മഹാജ്യാചാപം
ശുദ്ധി	Subtractive
ശൂന്യം	Zero
ശോദ്ധ്യഫലം	Correction to be applied to a result
ശ്രേഢി	A series
ശ്രേഢീക്ഷേത്രം	A figure representing a seriesgraphically

ഷ

ഷഡശ്രം	Hexagon
ഷോഡശാശ്രം	A polygon of 16 sides

സ

സദൃശങ്ങൾ	Of the same denomination or kind, Similar

സംകലിതം	Addition; summation of a series; sum of a series
സംകലിതസംകലിതം	Integral of an integral
സംകലിതൈക്യം	Sum of the integrals
സംക്രമം	The moment a planet enters into a sign of the Zodiac. Also the entry from one sign to the next
സംപാതജീവ	The common chord
സംവത്സരം	Solar year
സംവൎഗ്ഗം	Product
സംസ്കാരം	Correction by addition or subtraction
സമഘാതം	Product of like terms
,, ചതുരശ്രം	A square
,, ച്ഛേദം	Same denominator
,, ലംബചതുരശ്രം	Trapezium
,, വിതാനം	Level
,, സംഖ്യ	Even number
,, ഷഡശ്രം	Regular Hexagon
സമാന്തരരേഖ	Parallel straight line
സൎവ്വദോൎയ്യുതിദളം	Semi-perimeter
സൎവ്വസാധാരണത്വം	Universality
സവൎണ്ണങ്ങൾ	Of the same denomination or nature
സഹസ്രം	10^3 (number and place)
സാഗ്രം	With remainder; a kind of kuttakaram
സാധനം	Given data
സാവനദിനം	Solar day
സൂത്രം	Line, direction, formula
സൌമ്യം	Northern
സൌരാബ്ദം	Solar year
സ്ഥാനവിഭാഗം	Division according to place
സ്ഥൌല്യം	Difference from the correct value, (Error)
സ്ഫുടം	Correct; True longitude of a planet
സോപാന്ത്യം	The number above the penultimate in Kuttakaram

ഹ

ഹരണം	Division
ഹാരകം	Divisor
ഹാര്യം	Dividend
ഹനിക്കുക	Multiply
ഹൃതശേഷം	Remainder after division

ക്ഷ

ക്ഷേത്രം	A plane figure
ക്ഷേത്രഫലം	Area
ക്ഷേപം	Additive

Technical Terms and Their corresponding Malayalam equivalents

Abraded	തഷ്ടം
Abscissa	കോടി
Addition	യോഗം, സംകലിതം
Additive	ക്ഷേപം
Antecedent	പ്രമാണം
Application	അതിദേശം
Arc	ധനുസ്, ചാപം
,, already traversed	ഗതചാപം
,, chord of	സമസ്തജ്യാ
,, complementary	കോടിചാപം
,, sag of	ശരം
,, ordinate of	അർദ്ധജ്യാ
Area	ക്ഷേത്രഫലം
Breadth	വിസ്താരം, ഇടം
Base	ഭൂമി
Calculate	ഗണിക്കുക
Calculation	ഗണിതം
Centre of a circle	കേന്ദ്രം
Chord	സമസ്തജ്യാ
Circle	വൃത്തം
Circumference	പരിധി, നേമി
Column	പങ്ക്തി, വല്ലി
Combination	പ്രസ്താരം
Common	സാധാരണം
Conclusion	അനുമാനം
Contact	സ്പർശം
Continuity	സർവ്വസാധാരണത്വം
Conversely	നേരേമറിച്ചു
Corner	കോൺ
Correction	ശോദ്ധ്യഫലം
Cube	ഘനം
,, root	ഘനമൂലം

Cyclic	വൃത്താന്തർഗ്ഗതം
Day	ദിവസം
,, solar	സാവനദിവസം
,, subtractive	അവമം, തിഥിക്ഷയം
Decimal system	ദശഗുണോത്തരഗണിതം
Diagonal	കർണ്ണം
Diameter	വ്യാസം
,, less sag	ശരോനവ്യാസം
Diurnal	പ്രതിദിനം
Difference	അന്തരാളം, അന്തരം
Digit	അംകം
Direction	ദിക്ക്
Divide	ഹരിക്കുക
Dividend	ഹാര്യം, ഭാജ്യം
Division	ഹരണം
,, mutual	അന്യോന്യഹരണം
Divisor	ഭാജകം, ഹാരകം
Ecliptic	അപക്രമവൃത്തം
Elongation of the Moon	തിഥി
Even	യുഗ്മം
,, place	യുഗ്മസ്ഥാനം
Extremity	അഗ്രം
Fraction	ഭിന്നസംഖ്യ
Formula	സൂത്രം
G. C. M.	അപവർത്തനഹാരകം
Generalisation	വ്യാപ്തിഗ്രഹണം
Gnomon	ശംകു
Group	കൂറു, പരിഷ
Half	ദളം, അർദ്ധം
Hexagon	ഷഡശ്രം
,, regular	സമഷഡശ്രം
Horizontal	സമവിതാനം
Height	ലംബം, ഉന്നതി
Hypotenuse	കർണ്ണം
Hemisphere	അർദ്ധഗോളം
Hypothesis	അനുമേയം
Inclination	ചെരിവ്

Infinitesimal	അണുപരിമാണം
Integral	സംകലിതം
Inverse proportion	വ്യസ്തത്രൈരാശികം
Known	ജ്ഞാതം
Lac	ലക്ഷം
Latitude	അക്ഷം
L. C. M.	സമച്ഛേദം
Length	ആയാമം, നീളം
,, and breadth	അയാമവിസ്താരം
Level	സമവിതാനം
Longitude	മദ്ധ്യമം
Longitude (mean) of a planet	ദേശാന്തരം
Limit	പദം
Last	അന്ത്യം
Month	മാസം
,, additive	അധിമാസം
,, lunar	ചാന്ദ്രമാസം
Multiply	ഹനിക്കുക, ഗുണിക്കുക
Multiplicand	ഗുണ്യം
Multiplication	ഗുണനം, ഗുണം
,, by part	ഖണ്ഡഗുണനം
Multiplier	ഗുണം, ഗുണകാരം
Negative	ഋണം
North	ഉത്തരം
Northern	സൌമ്യം
Number	സംഖ്യ
,, consecutive	നിരന്തരസംഖ്യ
Odd	ഓജസംഖ്യ
,, even	യുഗ്മസംഖ്യ
Odd	ഓജം
,, number	വിഷമസംഖ്യ, ഒററപ്പെട്ട
,, place	ഓജസ്ഥാനം
Opposite side	പ്രതിഭുജം
Ordinate	ഭുജാ
Octagon	അഷ്ടാശ്രം
Parallel	സമാന്തരം

Parallel straight line	സമാന്തരരേഖ
Part	അംശം, ഖണ്ഡം
Penultimate	ഉപാന്ത്യം
Perpendicular	ലംബം, വിപരീതം
Perimeter	ചുററളവ്
Perpendicular—foot of	ലംബനിപാതം
Perpendicularity	ദിക്വൈപരീത്യം
Planet	ഗ്രഹം
Positive	ധനം
Product	ആഹതി, ഘാതം, സംവർഗ്ഗം
,, of equal terms	സമഘാതം
Proof	ഉപപത്തി
Proportion (inverse)	വ്യസ്തത്രൈരാശികം
Proportion direct	ത്രൈരാശികം
Progression	ശ്രേഢി
Problem	പ്രശ്നം
Permanence	വ്യവസ്ഥ, സർവ്വസാധാരണത്വം
Proposition	അനുമാനവാക്യം
Quadrilateral	ചതുരശ്രം
,, cyclic	വൃത്താന്തർഗതചതുരശ്രം
Quadrant	പദം
Quotient	ഹരിതഫലം
Radius	വ്യാസാർദ്ധം
Rectangle	ആയതചതുരശ്രം
Remainder	ശേഷം
,, positive	അധികശേഷം
,, after division	ഹൃതശേഷം
Result	ഫലം
Rotation	ഭ്രമണം, ഭഗണം
,, complete	പരിഭ്രമണം
Rough	സ്ഥൂലം
Rotate	തിരിക്കുക
Rule of three	ത്രൈരാശികം
Semi-perimeter	സർവ്വദോര്യുതിദളം
Series	പരമ്പര, ശ്രേഢി, പരിഷ
Shadow	ഛായ
Side	പാർശ്വം

Similar Figures	തുല്യാകാരക്ഷേത്രങ്ങൾ
Sphere	ഗോളം
Southern	യാമ്യം
Square	വൎഗ്ഗക്ഷേത്രം, സമചതുരശ്രം, വൎഗ്ഗിക്കുക
Subtract	വാങ്ങുക
Subtraction	വിയോഗം, വ്യവകലിതം
Subtractive	ശുദ്ധി
Ten	ദശം
Thickness	ഘഴപ്പ്
Triangle	ത്ര്യശ്രം
,, scalene	വിഷമത്ര്യശ്രം
,, equilateral	സമത്ര്യശ്രം
Topmost	ഉൎദ്ധ്വം
Trapezium	സമലംബചതുരശ്രം
Transpose	പകൎന്നുകല്പിക്കുക
Transition	സംക്രമം
Transit	ഉച്ചയാവുക
Unit	ഏകം
Unit's place	ആദ്യസ്ഥാനം
Units of time	ഗുൎവ്വക്ഷരാദികൾ (പട്ടിക നോക്കുക)
Unity	രൂപം, വ്യക്തി
Universality	സൎവ്വസാധാരണത്വം
Unknown	അജ്ഞേയം
Volume of a sphere	ഗോളഘനക്ഷേത്രഫലം
,, of a body	ഘനക്ഷേത്രഫലം
Year	അബ്ദം
,, solar	സൌരാബ്ദം
Zero	ശൂന്യം
Zodiac	രാശിചക്രം